

2012

金牌有效复习

华师宏达

高考

理科数学(第一轮)



YZLI0890146546

中山大学出版社

2012
金牌有效复习

华师宏达

高 考

理科数学(第一轮)



YZLI0890146546

中山大学出版社
· 广州 ·

版权所有 翻印必究

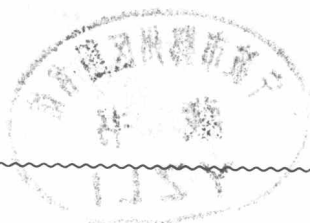
图书在版编目 (CIP) 数据

2012 高考金牌有效复习·理科数学 (第一轮) / 华师宏达高考研究组编. — 广州: 中山大学出版社, 2011.5

ISBN 978 - 7 - 306 - 03866 - 1

I. 2... II. 华... III. 中学数学课—高中—升学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 058268 号



出版人: 祁军

策划编辑: 邹正芬

责任编辑: 赵婷

封面设计: 陈贤健

责任校对: 赵丽华

责任技编: 何雅涛

出版发行: 中山大学出版社

电话: 编辑部 020 - 84111996, 84111997, 84113349, 84110779

发行部 020 - 84111998, 84111981, 84111160

地址: 广州市新港西路 135 号

邮编: 510275 传真: 020 - 84036565

网址: <http://www.zsup.com.cn> E-mail: zdcbs@mail.sysu.edu.cn

印刷者: 广州中大印刷有限公司

规格: 880mm × 1230mm 1/16 19 印张 790 千字

版次印次: 2011 年 5 月第 1 版 2011 年 5 月第 1 次印刷

印数: 1 ~ 22000 册 定价: 69.80 元

如发现本书因印装质量影响阅读, 请与出版社发行部联系调换

序

新课标实施已达十年,其间各实验区积累了关于高考复习研究的丰富成果,如何将这些成果应用于高考复习实践,是每位高中教师的重要任务,特别是高三教师的当务之急。

教学实践表明,学生能否在高考中取得佳绩与高三复习工作成效有着紧密联系,而高三有效复习的首要条件,则是师生共同拥有一本好的复习参考书,因此,为学生、为自己挑选一本好的复习用书,既是教师的职责所在,也是高考复习工作顺利完成的保证。

研究当前社会上名目繁多的高三复习资料,我们发现部分资料或是将不同书籍、网络上的资料剪辑相凑成书;或是部分资料老化,没有吸收当前教改以及高考命题新思路;更有部分资料习题过易或过难、缺少层次、结构混乱。

华师宏达高考研究组借助高校科研力量,将高考研究、高考评卷中积累的丰硕成果融于本书,同时考查了珠三角地区、东西两翼的省重点高中、地区性重点高中、县级重点高中以及普通高中高考复习的教学模式,集各地区、各类型高中骨干教师的教学智慧于大成。本书从三个方面贯彻“有效性复习”的策略:第一个方面,充分体现数学学习心理学的研究成果,如根据心理学中关于“数学记忆中几何命题的记忆优于符号命题的记忆”这一结论,我们在本书的结构中将“数形结合”的思想融入解题,使得高考试题的难题变得直观易懂;第二个方面,将数学教育理论的研究成果作为编写的指导,如根据在数学教学中重视“联系”的论述,我们将数学结构看成一个整体,在高三复习时,帮助学生整理知识,就是揭示各种数学知识间的联系,这里即包含了以“一题多解”、“数学知识的多重表示”为特征的发散性思维训练,也包含了以“合情推理”为特征的适合于大多数学生的“笨”方法;第三个方面,本书立论于我们对高考深入研究之上,所用全部习题皆由近三年来最新(高考)命题精练而成,代表了高考数学试题的命题趋势,精准地揭示了解题训练的方向。

本书以科学设定的栏目引领全书,主要栏目有“概念回顾”、“双基演练”、“典例精讲”、“方法简提”、“考题演练”、“综合测试”,还有“方法探究”、“教材探源”、“温馨提示”、“思路点拨”等小栏目,并提供“拓展变式”项目。这些精心设计的栏目,结构清晰、繁简得当、层次分明,适合于不同类型的学生。

遵循师范院校的座右铭——“学高为师,身正为范”,华师宏达高考研究组本着对学生负责、对社会负责的精神,以严谨的治学态度,为高考复习参考书立下新标杆,从质量上提高高三总复习的准入门槛。

华师宏达高考研究组

2011年1月

目 录

第一部分 代数

第 1 章 集合与常用逻辑用语	1
§ 1.1 集合的含义与运算	1
§ 1.2 命题及其关系	3
§ 1.3 简单的逻辑联结词与量词	5
第 2 章 函数的概念与基本初等函数 (I) (指数函数、对数函数、幂函数)	7
§ 2.1 函数的概念与表示法	7
§ 2.2 函数的奇偶性与图像	9
§ 2.3 函数的单调性与最值	12
§ 2.4 指数函数	14
§ 2.5 对数函数	17
§ 2.6 幂函数与二次函数	19
§ 2.7 函数与方程	22
§ 2.8 函数模型及其应用	24
第 3 章 导数及其应用	28
§ 3.1 导数的概念及其几何意义	28
§ 3.2 导数的运算	30
§ 3.3 导数在研究函数中的应用	31
§ 3.4 定积分与微分基本定理	34
§ 3.5 生活中的优化问题	36
第 4 章 基本初等函数 (II) —— 三角函数与解三角形	39
§ 4.1 三角函数的定义与诱导公式	39
§ 4.2 三角函数的性质	41
§ 4.3 三角函数的图像	43
§ 4.4 同角三角函数关系与简单的恒等变换	46
§ 4.5 正弦定理与余弦定理	49
§ 4.6 综合应用 (三角函数及正余弦定理的应用)	51
第 5 章 数列	55
§ 5.1 数列的概念	55
§ 5.2 等差数列及其前 n 项和	57
§ 5.3 等比数列及其前 n 项和	59
§ 5.4 等差等比数列的综合应用	61

第 6 章 不等式	65
§ 6.1 一元二次不等式	65
§ 6.2 二元一次不等式与简单的线性规划问题	67
§ 6.3 基本不等式	70
§ 6.4 绝对值不等式	72

第二部分 几何

第 7 章 平面向量	75
§ 7.1 平面向量的概念及线性运算	75
§ 7.2 平面向量的基本定理与坐标表示	77
§ 7.3 平面向量的数量积	80
§ 7.4 平面向量的应用	82
第 8 章 立体几何初步	84
§ 8.1 空间几何体——三视图与体表面积	84
§ 8.2 点线面的位置关系——平行	87
§ 8.3 点线面的位置关系——垂直	90
§ 8.4 空间向量及其运算	93
§ 8.5 空间向量的应用	96
第 9 章 平面解析几何初步	101
§ 9.1 直线的方程	101
§ 9.2 两直线的位置关系	103
§ 9.3 圆的方程	105
§ 9.4 直线与圆的位置关系	107
§ 9.5 综合应用	110
第 10 章 圆锥曲线与方程	113
§ 10.1 椭圆	113
§ 10.2 抛物线、双曲线	115
§ 10.3 圆锥曲线的简单应用	117
§ 10.4 直线与二次曲线的位置关系	120
§ 10.5 曲线与方程	122

第三部分 概率与统计

第 11 章 计数原理	126
§ 11.1 计算原理	126
§ 11.2 排列与组合	128
§ 11.3 二项式定理	130
第 12 章 概率与分布列	133
§ 12.1 概率	133
§ 12.2 随机数与几何概型	136
§ 12.3 离散型随机变量及其分布列	138
§ 12.4 超几何分布与二项分布	140
§ 12.5 离散型随机变量的均值与方差	143

第 13 章 统计与统计案例	147
§ 13.1 随机抽样、样本估计总体	147
§ 13.2 变量间的相关性	151
§ 13.3 独立性检验	154
§ 13.4 概率与统计的综合运用	157

第四部分 算法与复数 推理与证明

第 14 章 算法初步、数系的扩充与复数的引入	160
§ 14.1 算法与程序框图	160
§ 14.2 复数	165
第 15 章 推理与证明	168
§ 15.1 合情推理和演绎推理	168
§ 15.2 直接证明与间接证明	171
§ 15.3 数学归纳法	173

第五部分 选考

第 16 章 坐标系与参数方程	176
§ 16.1 坐标系	176
§ 16.2 参数方程	177
第 17 章 几何证明 (选讲)	180
参考答案	183

附件

综合测试

综合测试参考答案

第一部分 代数

第1章 集合与常用逻辑用语

§1.1 集合的含义与运算



概念回顾

1. 并集的性质

(1) ① $A \subseteq (A \cup B)$, $B \subseteq (A \cup B)$; ② $A = A \cup A$, $A = A \cup \emptyset$; ③ $A \cup B = B \cup A$.

(2) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$; 反之, 若 $A \cup B = B$, 则 $A \subseteq B$. 值得注意的是, 由于 $A = A \cup \emptyset$, 因此, $A \cup B = B$ 中的 A 可以为空集 $\emptyset$.

2. 交集的性质

(1) ① $(A \cap B) \subseteq A$, $(A \cap B) \subseteq B$; ② $A = A \cap A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$; ③ $A \cap B = B \cap A$.

(2) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$; 反之, 若 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq B$. 值得注意的是, 由于 $A \cap \emptyset = \emptyset$, 因此, $A \cap B = A$ 中的 A 可以为空集 $\emptyset$.

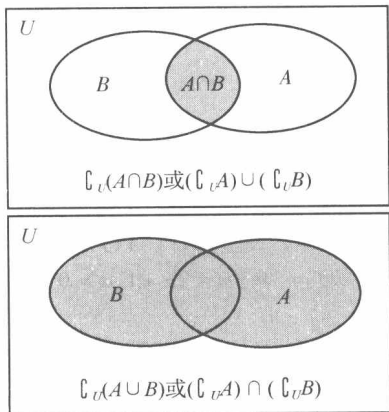
3. 全集与补集的性质

(1) $\complement_U U = \emptyset$, $\complement_U \emptyset = U$, $\complement_U (\complement_U A) = A$, $A \cup (\complement_U A) = U$, $A \cap (\complement_U A) = \emptyset$.

(2) 若 $A \subseteq B$, 则 $\complement_U A \supseteq \complement_U B$; 反之, 若 $\complement_U A \supseteq \complement_U B$, 则 $A \subseteq B$. 这可利用 $\complement_U (\complement_U A) = A$ 得到.

(3) 若 $A = B$, 则 $\complement_U A = \complement_U B$; 反之, 若 $\complement_U A = \complement_U B$, 则 $A = B$.

(4) 德摩·根定律: ① $\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$; ② $\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$. 可用图示表示如下:

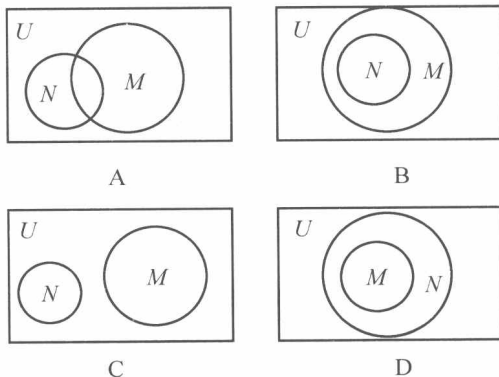


双基演练

1. (2011. 北京海淀) 设集合 $P = \left\{x \mid y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right\}$, $Q = \{x \mid x^2 - x > 0\}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $P = Q$ B. $P \cup Q = R$
C. $P \subsetneq Q$ D. $Q \subsetneq P$

2. (2009. 广东) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 则正确表示集合 $M = \{-1, 0, 1\}$ 和 $N = \{x \mid x^2 + x = 0\}$ 关系的韦恩 (Venn) 图是 ()



3. 定义集合运算: $A \times B = \{z \mid z = xy, x \in A, y \in B\}$. 设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 2\}$, 则集合 $A \times B$ 的所有元素之和为 ()

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 6

4. (2007. 福建) 已知集合 $A = \{x \mid x < a\}$, $B = \{x \mid 1 < x < 2\}$, 且 $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a \leq 2$ B. $a < 1$ C. $a \geq 2$ D. $a > 2$

5. (2009. 江苏) 已知集合 $A = \{x \mid \log_2 x \leq 2\}$, $B = (-\infty, a)$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是 $(c, +\infty)$, 其中 $c =$ _____.



典例精讲

典例1 (2010. 佛山二模理1) 设 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{y \mid y = \sqrt{x-1}, x \geq 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $A \cap B = \{-2, -1\}$
B. $(\complement_U A) \cup B = (-\infty, 0)$
C. $A \cup B = [0, +\infty)$

D. $(\complement_U A) \cap B = \{-2, -1\}$

拓展变式

1. (2010. 重庆改编) 设 $U = \{-1, 1, 2, 3\}$, $A = \{x \in U \mid x^2 + mx + n = 0\}$, 若 $\complement_U A = \{1, 2\}$, 则实数 $m + n =$ _____.

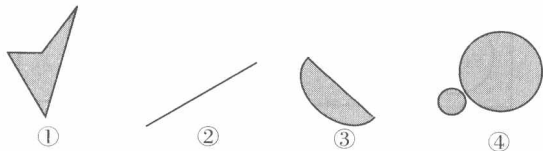
典例 2 (2009. 湖北) 已知 $P = \{a \mid a = (1, 0) + m(0, 1), m \in \mathbf{R}\}$, $Q = \{b \mid b = (1, 1) + n(-1, 1), n \in \mathbf{R}\}$ 是两个向量集合, 则 $P \cap Q =$ ()

- A. $\{(1, 1)\}$ B. $\{(-1, 1)\}$
C. $\{(1, 0)\}$ D. $\{(0, 1)\}$

拓展变式

2. 设 P 和 Q 是两个集合, 定义集合 $P - Q = \{x \mid x \in P, \text{ 且 } x \notin Q\}$, 如果 $P = \{x \mid \log_2 x < 1\}$, $Q = \{x \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$, 那么 $P - Q =$ _____.

典例 3 (2010. 福建文 15) 对于平面上的点集 Ω , 如果连接 Ω 中任意两点的线段必定包含于 Ω , 则称 Ω 为平面上的凸集, 给出平面上 4 个点集的图形如下 (阴影区域及其边界):



其中为凸集的是 _____ (写出所有凸集相应图形的序号).

【解析】②③. 首先明确新定义的凸集的含义: 如果连接平面上点集 Ω 中任意两点的线段必定包含于 Ω , 则称 Ω 为平面上的凸集. 换句话说, 无论怎么连点集中的任意两点, 只要这两点的线段都在点集区域中, 则这样的点集就是凸集. 因此, 要确定不是凸集, 只需连接那些使得线段不在区域中的两点即可. 对于①, 只要连接最上方两顶点, 即可知它不是凸集; 对于④, 在两圆各取一点, 即可知不满足凸集的定义. ②③满足凸集的概念.

拓展变式

3. (2011. 上海) 若 X 是一个集合, τ 是一个以 X 的某些子集为元素的集合, 且满足: ① X 属于 τ , $\emptyset$ 属于 τ ; ② τ 中任意多个元素的并集属于 τ ; ③ τ 中任意多个元素的交集属于 τ , 则称 τ 是集合 X 上的一个拓扑. 已知集合 $X = \{a, b, c\}$, 对于下面给出的四个集合 τ :

- ① $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b, c\}\};$
② $\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\};$
③ $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\};$
④ $\tau = \{\emptyset, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}.$

其中是集合 X 上的拓扑的集合 τ 的序号是 ()

- A. ①② B. ②④ C. ②③ D. ③④



方法简提

对于集合的含义应紧紧抓住集合中元素的特征属性. 研究集合从本质上说就是研究集合中的元素及其特征. 而在高考考查的集合含义中, 元素与集合的关系, 集合与集合之间的关系是重点.



考题演练

一、选择题

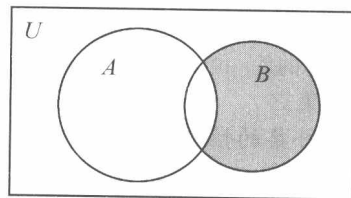
1. (2008. 深圳) 设全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 集合 $B = \{2, 3\}$, 则 $(\complement_U A) \cup B =$ ()

- A. $\emptyset$ B. $\{1, 2, 3, 4\}$
C. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ D. $\{2, 3, 4\}$

2. (2011. 佛山) 已知集合 $A = \{-1, 0, a\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 1\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, 1)$
C. $\{1\}$ D. $(1, +\infty)$

3. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 集合 $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 则图中的阴影部分表示的集合为 ()



- A. $\{2\}$ B. $\{4, 6\}$
C. $\{1, 3, 5\}$ D. $\{4, 6, 7, 8\}$

4. 若集合 $A = \{x \mid \log_{\frac{1}{2}} x \geq \frac{1}{2}\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}} A =$ ()

- A. $(-\infty, 0] \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
C. $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
D. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

二、填空题

5. (2009. 天津) 设全集 $U = A \cup B = \{x \in \mathbf{N}^* \mid \lg x < 1\}$, 若 $A \cap (\complement_U B) = \{m \mid m = 2n + 1, n = 0, 1, 2, 3, 4\}$, 则集合 $B =$ _____.

6. 已知集合 $M = \{x \mid x - a = 0\}$, $N = \{x \mid ax - 1 = 0\}$, 若 $N \subseteq M$, 则实数 $a =$ _____.

7. 设 P 是一个数集, 且至少含有两个数. 若对任意 $a, b \in P$, 都有 $a + b, a - b, ab, \frac{a}{b} \in P$ (除数 $b \neq 0$), 则称

P 是一个数域. 例如有理数集 $\mathbf{Q}$ 是数域. 有下列命题:

- ① 数域必含有 0, 1 两个数;
- ② 整数集是数域;
- ③ 若有理数集 $\mathbf{Q} \subseteq M$, 则 M 必为数域;
- ④ 数域必为无限集.

其中正确的命题的序号是_____. (把你认为正确的命题的序号都填上)

三、解答题

8. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$, $B = \{x | ax - 2 = 0\}$, 且 $B \subseteq A$, 求由实数 a 组成的集合 C .

§ 1.2 命题及其关系



概念回顾

1. 命题

(1) 一般地, 对于两个命题, 如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件, 那么我们把这样的两个命题叫做互逆命题. 其中一个命题叫做原命题 (original proposition), 另一个叫做原命题的逆命题 (inverse proposition).

(2) 对于两个命题, 其中一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的条件的否定和结论的否定, 我们把这样的两个命题叫做互否命题. 其中一个命题叫做原命题, 另一个叫做原命题的否命题 (negative proposition).

(3) 对于两个命题, 其中一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的结论的否定和条件的否定, 我们把这样的两个命题叫做互为逆否命题. 如果把其中一个命题叫做原命题, 那么另一个叫做原命题的逆否命题 (inverse and negative proposition).

2. 充要条件

若 $p \Rightarrow q$, 则 p 是 q 成立的充分条件 (同时 q 是 p 成立的必要条件); 若 $\neg p \Rightarrow \neg q$, 则 p 是 q 成立的必要条件 (同时, q 是 p 成立的充分条件); 若 $p \Rightarrow q$, 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 成立的充分必要条件 (同时, q 是 p 成立的充分必要条件), 简称充要条件.



双基演练

1. 命题 “若函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内是减函数, 则 $\log_a 2 < 0$ ” 的逆否命题是 ()

A. 若 $\log_a 2 < 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在

其定义域内不是减函数

B. 若 $\log_a 2 \geq 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内不是减函数

C. 若 $\log_a 2 < 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内是减函数

D. 若 $\log_a 2 \geq 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内是减函数

2. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 “ $x = 1$ ” 是 “ $x^3 = x$ ” 的 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. (2010. 天津) 命题 “若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(-x)$ 是奇函数” 的否命题是 ()

A. 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(-x)$ 是偶函数

B. 若 $f(x)$ 不是奇函数, 则 $f(-x)$ 不是奇函数

C. 若 $f(-x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是奇函数

D. 若 $f(-x)$ 不是奇函数, 则 $f(x)$ 不是奇函数

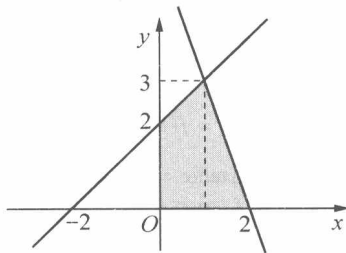
4. 给出命题: 若函数 $y = f(x)$ 是幂函数, 则函数 $y = f(x)$ 的图像不过第四象限. 在它的逆命题、否命题、逆否命题三个命题中, 真命题的个数是 ()

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

5. (2009. 江苏) 已知 Ω 为 xOy 平面内的一个区域.

$$p: \text{点}(a, b) \in \left\{ (x, y) \left| \begin{cases} x - y + 2 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ 3x + y - 6 \leq 0 \end{cases} \right. \right\};$$

$$q: \text{点}(a, b) \in \Omega.$$



如果 p 是 q 的充分条件, 那么区域 Ω 的面积的最小值是_____.



典例精讲

典例 1 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题.

(1) 若 $a = 0$, 则 $ab = 0$.

(2) 若 $k < 0$, 则方程 $x^2 + (2k + 1)x + k = 0$ 必有两相异实根.

(3) 四条边长度相等的四边形是正方形.

拓展变式

1. 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题, 并判断它们的真假.

- (1) 若 $a^2 = b^2$, 则 $a = b$;
 (2) 全等三角形的对应边长度相等.

典例 2 下列选项中, p 是 q 的必要不充分条件的是 ()

- A. $p: a + c > b + d; q: a > b$ 且 $c > d$
 B. $p: a > 1, b > 1; q: f(x) = a^x - b (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 的图像不过第二象限
 C. $p: x = 1; q: x^2 = x$
 D. $p: a > 1; q: f(x) = \log_a x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数

拓展变式

2. 下列各小题中, p 是 q 的充要条件的是 ()

- (1) $p: m < -2$ 或 $m > 6; q: y = x^2 + mx + m + 3$ 有两个不同的零点.
 (2) $p: \frac{f(-x)}{f(x)} = 1; q: y = f(x)$ 是偶函数.
 (3) $p: \cos \alpha = \cos \beta; q: \tan \alpha = \tan \beta$.
 (4) $p: A \cap B = A; q: \bigcup_v B \subseteq \bigcup_v A$.
 A. (1), (2) B. (2), (3)
 C. (3), (4) D. (1), (4)

典例 3 (2010. 浙江) 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 “ $x \sin^2 x < 1$ ” 是 “ $x \sin x < 1$ ” 的 ()

- A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充分必要条件
 D. 既不充分也不必要条件

【解析】B. 因为 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 < \sin x < 1, 0 < \sin^2 x < \sin x < 1$, 所以由 $x \sin x < 1$ 成立一定能推出 $x \sin^2 x < 1$ 成立, 但由 $x \sin^2 x < 1$ 成立就不一定能推出 $x \sin x < 1$ 成立. 在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 前提下 $x \sin^2 x < 1$, 可得 $x \sin x < \frac{1}{\sin x}$, 此时不一定能保证 $\frac{1}{\sin x} < 1$, 也就不能保证 $x \sin x < 1$ 成立. 因此 “ $x \sin^2 x < 1$ ” 是 “ $x \sin x < 1$ ” 的必要不充分条件.

拓展变式

3. (2010. 辽宁理 11 改编) 已知 $a > 0$, 函数

$$f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - bx,$$

则 x_0 满足关于 x 的方程 $ax = b$ 的充要条件是 ()

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$
 B. $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x_0)$
 C. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$
 D. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x_0)$



方法简提

判断充要条件的方法如下表所示:

p 是 q 成立的 _____ 条件	若 p 则 q (若 $\neg q$ 则 $\neg p$)	若 q 则 p (若 $\neg p$ 则 $\neg q$)
充分不必要	真	假
必要不充分	假	真
充要	真	真
既不充分 也不必要	假	假

上表告诉我们, 命题 “若 p 则 q ” 真、 $p \Rightarrow q$ 、 p 是 q 的充分条件、 q 是 p 的必要条件这四种形式的表达, 讲的是同一个逻辑关系, 只是说法不同而已.



考题演练

一、选择题

1. 命题 “若 $x = 1$, 则 $x^2 = 1$ ” 的逆否命题是 ()
 A. 若 $x \neq 1$, 则 $x^2 \neq 1$
 B. 若 $x^2 = 1$, 则 $x = 1$
 C. 若 $x^2 \neq 1$, 则 $x \neq 1$
 D. 若 $x^2 \neq 1$, 则 $x \neq 1$ 或 $x \neq -1$
 2. 已知命题: “若 $k_1 a + k_2 b = 0$, 则 $k_1 = k_2 = 0$ ” 是真命题, 则下面对 a, b 的判断正确的是 ()
 A. a 与 b 一定共线
 B. a 与 b 一定不共线
 C. a 与 b 一定垂直
 D. a 与 b 中至少有一个为 0
 3. 已知 i 为虚数单位, a 为实数, 复数 $z = (1 - 2i)(a + i)$ 在复平面内对应的点为 M , 则 “ $a > \frac{1}{2}$ ” 是 “点 M 在第四象限” 的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件

4. (2010·湖北) 记实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中的最大数为 $\max \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 最小数为 $\min \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长为 a, b, c , 定义它的倾斜度为

$$l = \max \left\{ \frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} \right\} \cdot \min \left\{ \frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} \right\},$$

则 “ $l = 1$ ” 是 “ $\triangle ABC$ 为等边三角形” 的 ()

- A. 必要不充分条件
B. 充分不必要条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

5. 命题 “若 $a > b$, 则 $a - 1 > b - 1$ ” 的否命题是_____

6. (人教 B 版) 用 “充分”、“必要”、“充要” 填空.

- (1) 集合 $A = \emptyset$ 是 $A \cap B = \emptyset$ 的_____条件;
(2) 集合 $A \cap B = A$ 是 $A \subseteq B$ 的_____条件;
(3) $x \in A \cap B$ 是 $x \in A$ 且 $x \in B$ 的_____条件;
(4) $x \in A \cup B$ 是 $x \in A$ 或 $x \in B$ 的_____条件.

7. 从 “充分不必要条件”、“必要不充分条件”、“充要条件”、“既不充分也不必要条件” 中选出适当的一种填空.

(1) “ $\lg x > \lg y$ ” 是 “ $\sqrt{x} > \sqrt{y}$ ” 的_____

_____;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, “ $A > 30^\circ$ ” 是 “ $\sin A > \frac{1}{2}$ ” 的_____

_____;

(3) “ $a - c = b - c$ ” 是 “ $a = b$ ” 的_____

_____;

(4) “四边形的两条对角线互相垂直” 是 “四边形是矩形” 的_____.

§1.3 简单的逻辑联结词与量词



概念回顾

1. 含有量词的命题的判定

(1) 且.

①定义: 一般地, 用联结词 “且” 把命题 p 和命题 q 联结起来, 就得到一个新命题, 记作 $p \wedge q$, 读作 “ p 且 q ”.

②命题 $p \wedge q$ 的真假. 一般地, 我们规定: 当 p, q 都是真命题时, $p \wedge q$ 是真命题; 当 p, q 两个命题中有一个命题是假命题时, $p \wedge q$ 是假命题.

(2) 或.

①定义: 一般地, 用联结词 “或” 把命题 p 和命题 q 联结起来, 就得到一个新命题, 记作 $p \vee q$, 读作 “ p 或 q ”.

②命题 $p \vee q$ 的真假. 一般地, 我们规定: 当 p, q 两个命题有一个是真命题 (即 “ p 真 q 假”、“ p 假 q 真”、“ p

真 q 真”) 时, $p \vee q$ 是真命题; 当 p, q 两个命题都是假命题时, $p \vee q$ 是假命题.

(3) 非.

①定义: 一般地, 对一个命题 p 全盘否定, 就得到一个新命题, 记作 $\neg p$, 读作 “非 p ” 或 “ p 的否定”.

②命题 $\neg p$ 的真假. 若 p 是真命题, 则 $\neg p$ 必是假命题; 若 p 是假命题, 则 $\neg p$ 必是真命题.

2. 含有量词的命题的判定

要判断一个存在性命题为真, 只要在给定的集合中, 找到一个元素 x , 使得命题 $p(x)$ 为真; 否则命题为假. 要判断一个全称命题为真, 必须对给定的集合的每一个元素 $x, p(x)$ 为真; 但要判断一个全称命题为假, 只要在给定的集合中找出一个 x_0 , 使得 $p(x_0)$ 为假.

3. 对于含有一个量词的命题的否定

一般来说, 有如下表示方法:

“ $\forall x \in M, p(x)$ ” 的否定为 “ $\exists x \in M, \neg p(x)$ ”;
“ $\exists x \in M, p(x)$ ” 的否定为 “ $\forall x \in M, \neg p(x)$ ”.



双基演练

1. 已知命题 p : 所有有理数都是实数; 命题 q : 正数的对数都是负数, 则下列命题中为真命题的是 ()

- A. $(\neg p) \vee q$ B. $p \wedge q$
C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ D. $(\neg p) \vee (\neg q)$

2. (2011·佛山) 已知命题 p : 圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 的面积被直线 $x + y = 3$ 平分; q : 直线 $x - 2y - 1 = 0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$, 则 ()

- A. $p \vee q$ 为假命题 B. $(\neg p) \vee q$ 为真命题
C. $p \wedge (\neg q)$ 为真命题 D. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ 为真命题

3. 命题 “存在 $x_0 \in \mathbf{R}, 2^{x_0} \leq 0$ ” 的否定是 ()

- A. 不存在 $x_0 \in \mathbf{R}, 2^{x_0} > 0$
B. 存在 $x_0 \in \mathbf{R}, 2^{x_0} \geq 0$
C. 对任意的 $x \in \mathbf{R}, 2^x \leq 0$
D. 对任意的 $x \in \mathbf{R}, 2^x > 0$

4. (2009·浙江) 若函数 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ ($a \in \mathbf{R}$),

则下列结论正确的是 ()

- A. $\forall a \in \mathbf{R}, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数
B. $\forall a \in \mathbf{R}, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数
C. $\exists a \in \mathbf{R}, f(x)$ 是偶函数
D. $\exists a \in \mathbf{R}, f(x)$ 是奇函数

5. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2ax + a \leq 0$. 若命题 p 是假命题, 则实数 a 的取值范围是_____.



典例精讲

典例 1 (课标实验教材选编) 判断下列含有量词的命题的真假.

- (1) $\forall x \in \{x | x \text{ 是无理数}\}, x^2$ 是无理数;
(2) 每条直线在 y 轴上都有截距;

- (3) $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 = 0$;
 (4) 存在两个相交平面垂直于同一直线;
 (5) 矩形的对角线相等.

拓展变式

1. 判断下列命题的真假.

- (1) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 \geq 1$;
 (2) 每个指数函数都是单调函数;
 (3) 有的数比它的倒数小;
 (4) $\exists x \in \mathbf{Q}, x^2 - 8 = 0$.

典例 2 (2009. 浙江调研) 已知 a, b 是两个非零向量, 则下列命题不正确的是 ()

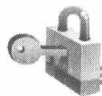
- A. 若 $|a \cdot b| = |a| |b|$, 则 $\exists t_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $a = t_0 b$
 B. 若 $\exists t_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $a = t_0 b$, 则 $|a \cdot b| = |a| |b|$
 C. 若 $|a + b| = |a| + |b|$, 则 $\exists t_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $a = t_0 b$
 D. 若 $\exists t_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $a = t_0 b$, 则 $|a + b| = |a| + |b|$

【解析】D. 从题设结论来看, 研究的是命题的关系, 实则是向量共线的充要性. $|a \cdot b| = |a| |b|$ 的几何含义是两个向量共线, 因此 A 选项命题正确, 其逆命题 B 选项也正确. $|a + b| = |a| + |b|$ 的几何意义是两个向量同向共线, 显然只需存在实数 t_0 , 使得 $a = t_0 b$, 因此 C 选项命题正确, 其逆命题 D 选项则不正确, 因为两个向量异向共线时, $|a + b| = |a| - |b|$ (或 $|a + b| = |b| - |a|$).

拓展变式

2. 若函数 $f(x) = x + \frac{m}{x^2} (x \in \mathbf{R})$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $\forall m \in \mathbf{R}, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数
 B. $\forall m \in \mathbf{R}, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数
 C. $\exists m \in \mathbf{R}, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数
 D. $\exists m \in \mathbf{R}, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数



方法简提

对于含有逻辑联结词命题真假的判定, 应先判定 p, q 的真假, 再利用下表加以判定:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
真	真	真	真
真	假	真	假
假	真	真	假
假	假	假	假

p	$\neg p$
真	假
假	真

从表中可以看出, 对于 $p \vee q$ 命题, 只有 p, q 都为假时, 才会为假; 对于 $p \wedge q$ 命题, 只有 p, q 同为真时, 才会为真; 对于 $\neg p$ 命题, 真假与 p 相反.



考题演练

一、选择题

1. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, \sin x \leq 1$, 则 ()
 A. $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, \sin x \geq 1$
 B. $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, \sin x \geq 1$
 C. $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, \sin x > 1$
 D. $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, \sin x > 1$
 2. 已知命题 $p: a^2 \geq 0 (a \in \mathbf{R})$, 命题 q : 函数 $f(x) = x^2 - x$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则下列命题中为真命题的是 ()

- A. $p \vee q$ B. $p \wedge q$
 C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ D. $(\neg p) \vee q$

3. (2010. 湖南理 2 改编) 下列命题中的假命题是 ()

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, e^{x-1} > 0$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, (x-1)^2 > 0$
 C. $\exists x \in \mathbf{R}, \ln x < 1$ D. $\exists x \in \mathbf{R}, \sin x = \frac{\pi}{4}$

4. (2010. 全国新课程卷理 5) 已知命题

p_1 : 函数 $y = 2^x - 2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 为增函数;

p_2 : 函数 $y = 2^x + 2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 为减函数.

则在命题 $q_1: p_1 \vee p_2$; $q_2: p_1 \wedge p_2$; $q_3: (\neg p_1) \vee p_2$ 和 $q_4: p_1 \wedge (\neg p_2)$ 中, 真命题是 ()

- A. q_1, q_3 B. q_2, q_3
 C. q_1, q_4 D. q_2, q_4

二、填空题

5. (2010. 安徽) 命题“存在 $x \in \mathbf{R}$, 使得 $x^2 + 2x + 5 = 0$ ”的否定是_____.

6. 已知命题 $p: “\forall x \in [1, 2], x^2 - a \geq 0”$; 命题 $q: “\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2ax + 2 - a = 0”$. 若命题“ $p \wedge q$ ”是真命题, 则实数 a 的取值范围为_____.

第2章 函数的概念与基本初等函数 (I)

——指数函数、对数函数、幂函数

§2.1 函数的概念与表示法



概念回顾

一般地, 设 A, B 是两个非空数集, 如果按照某种确定的对应关系 f , 使对于集合 A 中的任意一个数 x , 在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 与之对应, 那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数 (function), 记作 $y = f(x)$, $x \in A$. 其中 x 叫做自变量, x 的取值范围叫做函数的定义域 (domain); 与 x 值相对应的 y 值叫做函数值, 函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 叫做函数的值域 (range), 显然值域 $\{f(x) | x \in A\} \subseteq B$.

从函数定义来看, 一个函数涉及定义域、对应法则和值域三个要素.

定义域是自变量 x 的取值范围, 它是构成函数不可或缺的; 对应法则是函数的关系的本质特征, 是沟通定义域与值域的桥梁, 在定义域确定的情况下, 对应法则控制着值域的状态. 符号 $y = f(x)$ 指的是 y 为 x 在对应法则 f 下的对应值, 而 f 则是“对应”得以实现的方法和途径, 是联系 x 与 y 的纽带.



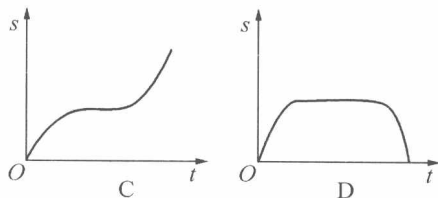
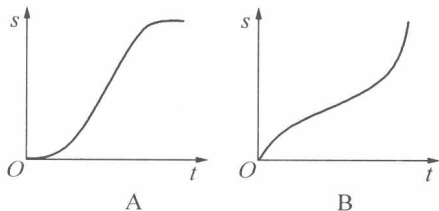
双基演练

- 函数 $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x}$ 的定义域为 ()
 A. $\{x | x \leq 1\}$ B. $\{x | x \geq 0\}$
 C. $\{x | x \geq 1 \text{ 或 } x \leq 0\}$ D. $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$

- (2010·陕西) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x < 1 \\ x^2 + ax, & x \geq 1 \end{cases}$, 若 $f(f(0)) = 4a$, 则实数 a 等于 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{4}{5}$ C. 2 D. 9

- 汽车经过启动、加速行驶、匀速行驶、减速行驶之后停车, 若把这一过程中汽车的行驶路程 s 看做时间 t 的函数, 其图像可能是 ()



- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [-1, 1] \\ x, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$, 若 $f[f(x)] = 2$, 则 x 的取值范围是_____.

- 已知函数 $f(x) = \frac{4}{|x|+2} - 1$ 的定义域是 $[a, b]$ (a, b 为整数), 值域是 $[0, 1]$, 则满足条件的整数数对 (a, b) 共有_____个.



典例精讲

- 典例1 下列函数中, 与函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 有相同定义域的是 ()

- A. $f(x) = \ln x$ B. $f(x) = \frac{1}{x}$
 C. $f(x) = |x|$ D. $f(x) = e^x$

拓展变式

- 下列四组函数中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等的是 ()
 A. $f(x) = x, g(x) = \frac{x^2}{x}$
 B. $f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = |x|$
 C. $f(x) = x^2, g(x) = (\sqrt{x})^4$
 D. $f(x) = 2\lg x, g(x) = \lg x^2$

- 典例2 (2010·陕西) 某学校要召开学生代表大会, 规定各班每 10 人推选一名代表, 当各班人数除以 10 的余数大于 6 时再增选一名代表, 那么, 各班可推选代表人数 y 与该班人数 x 之间的函数关系用取整函数 $y = [x]$ ($[x]$ 表示不大于 x 的最大整数) 可以表示为 ()

- A. $y = \left[\frac{x}{10} \right]$ B. $y = \left[\frac{x+3}{10} \right]$
 C. $y = \left[\frac{x+4}{10} \right]$ D. $y = \left[\frac{x+5}{10} \right]$

【解析】B. 当 $x = 6$ 时, $y = 0$, 淘汰 C 和 D; 当 $x = 7$ 时, $y = 1$, 淘汰 A, 故应选 B.

拓展变式

2. (2010·北京海淀) 如图 1, 是某种称为“凹槽”的机械部件的示意图, 图 2 是凹槽的横截面 (阴影部分) 示意图, 其中四边形 $ABCD$ 是矩形, 弧 CmD 是半圆, 凹槽的横截面的周长为 4. 已知凹槽的强度与横截面的面积成正比, 比例系数为 $\sqrt{3}$, 设 $AB = 2x$, $BC = y$.

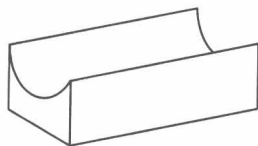


图 1

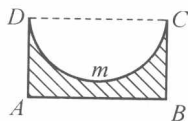
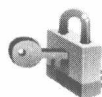


图 2

- (1) 写出 y 关于 x 的函数表达式, 并指出 x 的取值范围;
- (2) 求当 x 取何值时, 凹槽的强度最大.



方法简提

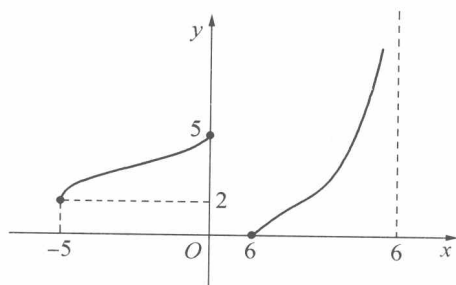
函数的概念关键是把握定义域与对应法则. 对于分段函数而言, 常见的处理方法是分段处理.



考题演练

一、选择题

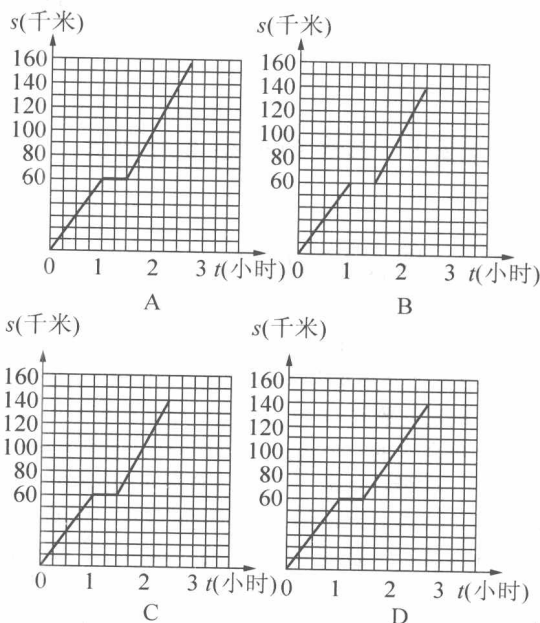
1. (人教 A 版教材) 函数 $y = f(x)$ 的图像如图所示. 观察图像可知函数 $y = f(x)$ 的定义域、值域分别是 ()



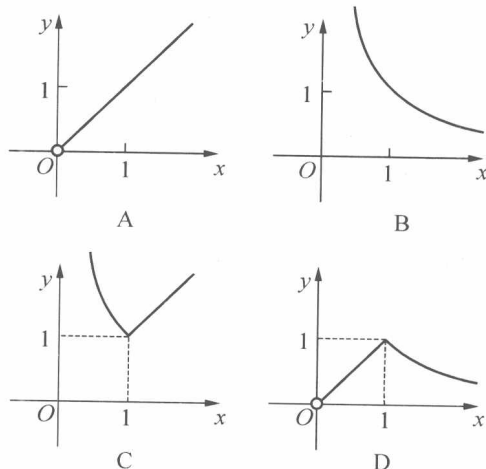
- A. $[-5, 0] \cup [2, 6]; [0, 5]$
- B. $[-5, 6]; [0, +\infty)$
- C. $[-5, 0] \cup [2, 6]; [0, +\infty)$
- D. $[-5, +\infty); [2, 5]$

2. 客车从甲地以 60 千米/小时的速度匀速行驶 1 小时

到达乙地, 在乙地停留了半小时, 然后以 80 千米/小时的速度匀速行驶 1 小时到达丙地, 下列描述客车从甲地出发, 经过乙地, 最后到达丙地所经过的路程 s 与时间 t 之间关系的图像中, 正确的是 ()



3. 函数 $f(x) = e^{| \ln x |} - \left| x - \frac{1}{x} \right|$ 的图像为 ()



4. 定义: 设 A 是非空实数集, 若 $\exists a \in A$, 使得对于 $\forall x \in A$, 都有 $x \leq a (x \geq a)$, 则称 a 是 A 的最大 (小) 值. 若 B 是一个不含零的非空实数集, 且 a_0 是 B 的最大值, 则 ()

- A. 当 $a_0 > 0$ 时, a_0^{-1} 是集合 $\{x^{-1} | x \in B\}$ 的最小值
- B. 当 $a_0 > 0$ 时, a_0^{-1} 是集合 $\{x^{-1} | x \in B\}$ 的最大值
- C. 当 $a_0 < 0$ 时, $-a_0^{-1}$ 是集合 $\{-x^{-1} | x \in B\}$ 的最小值
- D. 当 $a_0 < 0$ 时, $-a_0^{-1}$ 是集合 $\{-x^{-1} | x \in B\}$ 的最大值

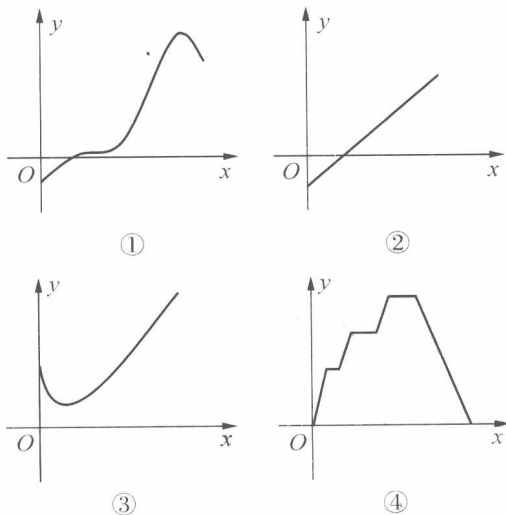
二、填空题

5. 函数 $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x - 2}$ 的定义域为 _____.

6. 如果 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, 那么 $f[f(2)] =$ ____; 不

等式 $f(2x-1) \geq \frac{1}{2}$ 的解集是 ____.

7. 下图是一组函数图像, 它们分别与其后所列的一个现实情境相匹配:



情境 A: 一份 30 分钟前从冰箱里取出来, 然后被放到微波炉里加热, 最后放到餐桌上的食物的温度 (将 0 时刻确定为食物从冰箱里被取出来的那一刻);

情境 B: 一个 1970 年生产的留声机从它刚开始的售价到现在的价值 (它被一个爱好者收藏, 并且被保存得很好);

情境 C: 从你刚开始放水洗澡, 到你洗完后把水排掉这段时间浴缸里水的高度;

情境 D: 根据乘客人数, 每辆公交车营运一趟的利润. 其中情境 A, B, C, D 分别对应的图像是 ____.

三、解答题

8. 对定义域分别为 D_f, D_g 的函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$,

$$\text{规定 } h(x) = \begin{cases} f(x) \cdot g(x), & x \in D_f, x \in D_g; \\ f(x), & x \in D_f, x \notin D_g; \\ g(x), & x \notin D_f, x \in D_g. \end{cases}$$

(1) 若函数 $f(x) = -2x + 3 (x \geq 1)$; $g(x) = x - 2 (x \in \mathbf{R})$, 写出 $h(x)$ 的解析式;

(2) 求 (1) 中 $h(x)$ 的值域.

§ 2.2 函数的奇偶性与图像



概念回顾

1. 函数奇偶性

(1) 奇函数、偶函数的代数特征告诉我们可以灵活变通, 即由 $f(-x) = -f(x)$, 可得 $f(-x) + f(x) = 0$, 或 $\frac{f(-x)}{f(x)} = -1 (f(x) \neq 0)$, 这是一个等价的等式, 有时 $f(-x) + f(x) = 0$ 在判定函数为奇函数方面更为方便; 同样地, 由 $f(-x) = f(x)$, 可得 $f(-x) - f(x) = 0$ 或 $\frac{f(-x)}{f(x)} = 1 (f(x) \neq 0)$.

(2) 根据奇函数的定义, 如果一个奇函数在原点处有定义, 即 $f(0)$ 有意义, 那么一定有 $f(0) = 0$, 有时可以用这个结论来否定一个函数为奇函数.

(3) 如果函数是偶函数, 那么 $f(x) = f(|x|)$, 这个结论有着广泛的应用.

(4) 由于既是奇函数又是偶函数满足 $\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$, 两式相加得 $f(x) = 0$, 当 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 时, 它的图像为 x 轴, 当 $f(x)$ 的定义域为 $[-n, n] (n \in \mathbf{N})$ 时, 它的图像表示一条线段. 由此说明既奇又偶函数有无穷个. (这是因为定义域不同函数也不同)

(5) 函数 $F(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$ 为偶函数; 函数 $G(x) = \begin{cases} g(x), & x > 0 \\ -g(-x), & x < 0 \end{cases}$ 为奇函数. (注: 若在原点处有定义, 则补充 $f(0) = 0$).

(6) 在定义域关于原点对称且定义域相同的前提下:

① 若 $f(x)$ 为奇函数, 且 $g(x)$ 亦为奇函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 为奇函数;

② 若 $f(x)$ 为偶函数, 且 $g(x)$ 亦为偶函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 为偶函数;

③ 若 $f(x)$ 为奇函数, 且 $g(x)$ 亦为奇函数, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 为偶函数;

④ 若 $f(x)$ 为偶函数, 且 $g(x)$ 亦为偶函数, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 为偶函数;

⑤ 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 一个为奇函数一个为偶函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 为非奇非偶函数; $f(x) \cdot g(x)$ 为奇函数;

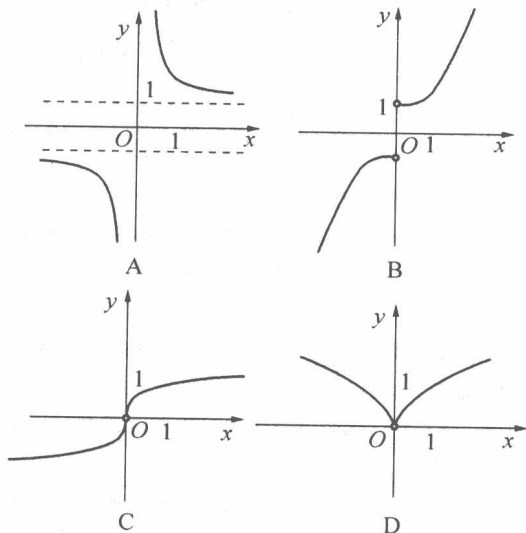
⑥ 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 则 $g(x) = f(x) + f(-x)$ 是偶函数, $h(x) = f(x) - f(-x)$ 是奇函数.

2. 常用函数图像

$y = x + \frac{a^2}{x}$ ($a > 0$)	$y = x - \frac{a^2}{x}$ ($a > 0$)	$y = \log_a x $ ($a > 0, a \neq 1$)

双基演练

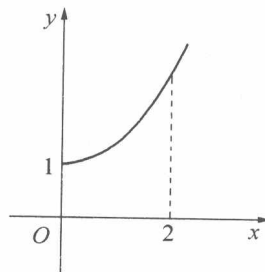
- 若函数 $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ 与 $g(x) = 3^x - 3^{-x}$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 则 ()
 A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为偶函数
 B. $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数
 C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为奇函数
 D. $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数
- 若函数 $y = (x+1)(x-a)$ 为偶函数, 则 $a =$ ()
 A. 1 B. -1 C. 0 D. ± 1
- 函数 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ 的图像大致为 ()



- (2010. 佛山) 已知函数 $f(x) = \log_a |x|$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 ()
 A. $f(3) < f(-2) < f(1)$
 B. $f(1) < f(-2) < f(3)$
 C. $f(-2) < f(1) < f(3)$
 D. $f(3) < f(1) < f(-2)$
- (2009. 福建) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 的部分图

像如下图所示, 则在 $(-2, 0)$ 上, 下列函数中与 $f(x)$ 的单调性不同的是 ()

- A. $y = x^2 + 1$ B. $y = |x| + 1$
 C. $y = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 0 \\ x^3+1, & x < 0 \end{cases}$ D. $y = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$



典例精讲

典例 1-1 若 $f(x) = \frac{1}{2^x + 1} + m$ 是奇函数, 则 $m =$ _____.

典例 1-2 设 $f(x) = \lg\left(\frac{2}{1-x} + a\right)$ 是奇函数, 则 $a =$ _____.

拓展变式

- (2010. 重庆理 5 改编) 函数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ 的图像 ()
 A. 关于原点对称 B. 关于直线 $y = x$ 对称
 C. 关于 x 轴对称 D. 关于 y 轴对称

典例 2-1 (苏教版 94 页) 已知函数 $y = a^x + b$ 的图像如图 1 所示, 求 a 和 b 的值.

典例 2-2 (苏教版 72 页) 已知函数 $y = \log_a(x+b)$ 的图像如图 2 所示, 求 a 和 b 的值.

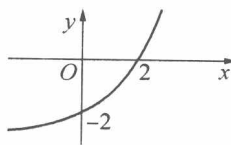


图 1

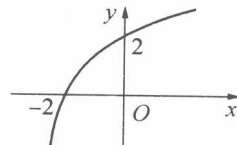


图 2

典例 2-3 (2008. 深圳) 已知函数 $f(x) = (x-a)(x-b)$ ($a > b$), 若 $f(x)$ 的图像如图 3 所示, 则函数 $g(x) = a^x + b$ 的图像是 ()

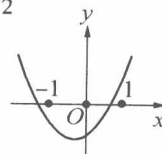


图 3