高等学校教学参考书

高等数学

（基础部分）

下　册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

高　等　数　学

（基础部分）

下　册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社

出 版 前 言

本书是按1964年12月第一版重印的，重印前由清华大学数学教研组作了一次勘误。

本书分上、下两册出版，下册内容是矢量代数、空间解析几何、多元函数微积分学、常微分方程与级数。

本书可作为高等工业院校的教学参考书，也可供有关的工程技术人员参考。

高 等 数 学

（基础部分）

下　册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

北京新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·0185　开本 850×1168 1/32　印张 12 8/16

字数 335,000　印数 39,001—189,000　定价（5）¥1.20

1964年12月第1版　1978年9月第6次印刷

下册目录

第九章　空間解析几何·矢量代数

§1. 二阶行列式·两个三元一次齐次方程

I. 二阶行列式

現在我們介紹一种常用的数学工具——行列式. 以后我們碰到某些定理的叙述、某些公式的記忆以及某些問題的計算, 行列式将給我們带来很多方便.

对于二元一次方程組

$$(1)\qquad \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$$

如果 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, 容易用消元法求得它的解:

$$(2)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\[2ex] y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{cases}$$

这两个分式的分子与分母都是由四个数按一定規則組成的, 都是两个数的积减去另外两个数的积.

一般地說, 設有四个数 A, B, C, D, 排成两行两列如下:

$$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$$

我們定义差值 $AD-BC$ 为二阶行列式. 用記号

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

表示这个行列式, 也就是

$$\boxed{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC.}$$

A, B, C, D 称为行列式的元素. A, B 二元素构成行列式的第一行; C, D 二元素构成行列式的第二行; A, C 二元素构成行列式的第一列; B, D 二元素构成行列式的第二列. (横排成行, 纵排成列). A, D 二元素构成行列式的主对角綫; B, C 二元素构成行列式的副对角綫.

二阶行列式本身是一个数量, 它等于主对角綫上二元素的积减去副对角綫上二元素的积所得的差.

例如:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - (-4)\cdot 3 = 2 + 12 = 14.$$

改变行列式中諸元素的位置时, 一般說来, 行列式的值也会改变. 例如:

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-4)\cdot 2 - 1\cdot 3 = -8 - 3 = -11.$$

所得結果与上面这个行列式的結果不同.

从二阶行列式的定义, 容易驗证二阶行列式具有下列性质:

一、将行与列互换, 行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix}.$$

二、如果将两列(或两行)互换, 行列式的值改变正負号. 即

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} B & A \\ D & C \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} C & D \\ A & B \end{vmatrix}.$$

三、某一列(或某一行)的两个元素的公因数可以提到行列式的記号之外. 例如:

$$\begin{vmatrix}\lambda A & B\\ \lambda C & D\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}.$$

利用行列式的記号，二元一次方程組

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

当 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$ 时的解可以写为：

(3)
$$\boxed{x=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}.}$$

公式(3)极便于記忆：两个分母都是方程組(1)中 x, y 的系数按照原来次序排列而成的二阶行列式，这个行列式称为方程組(1)的**系数行列式**. 将系数行列式中 x 的系数 a_1, a_2 换为常数項 c_1, c_2 就得到未知量 x 的表达式的分子，将系数行列式中 y 的系数 b_1, b_2 换为常数項 c_1, c_2 就得到未知量 y 的表达式的分子.

我們也常采用下列記号：

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix},\qquad \Delta_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix},\qquad \Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}.$$

这时，公式(3)就簡記为

(4)
$$\begin{cases}x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta},\\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}.\end{cases}\qquad(\Delta\neq 0)$$

例一. 解方程組

$$\begin{cases}x-8y+1=0\\ 3x+2y-10=0.\end{cases}$$

解： 为了要运用公式(3)，首先应将已給的方程組改写为标准形式

(1):

$$\begin{cases}x-8y=-1\\3x+2y=10.\end{cases}$$

幷且应注意,系数行列式:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-8\\3&2\end{vmatrix}=2-(-24)=26\neq0.$$

运用公式(3)或(4),就得到:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1&-8\\10&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&-8\\3&2\end{vmatrix}}=\frac{78}{26}=3,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&-1\\3&10\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&-8\\3&2\end{vmatrix}}=\frac{13}{26}=\frac{1}{2}.$$

故得所求解为:

$$x=3,\quad y=\frac{1}{2}.$$

解毕.

对于二元一次方程組(1), 如果系数行列式 $\Delta=0$, 公式(3)失效. 在这种情况下, 方程組(1)可能有无穷多組解, 也可能沒有解. 第一章 §6 中,我們已討論过这个問題了.

II. 两个三元一次齐次方程

在空間解析几何中,我們将遇到这样的問題: 求两个三元一次齐次方程

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0\\a_2x+b_2y+c_2z=0\end{cases}\tag{5}$$

的一切解.

容易看出: 方程組(5)恒有解,因为

$$x=0,\qquad y=0,\qquad z=0$$

便是一組解.

我們首先研究三个二阶行列式

(6) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

不全为 0 的情形. 为了具体起見, 我們假定

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

将方程(5)写成

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1z \\ a_2x+b_2y=-c_2z \end{cases}$$

当 z 取得任何一值时, 我們可以按公式(3)求得 x, y 的值:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{-z\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\cdot z,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1z \\ a_2 & -c_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{-z\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\cdot z.$$

若令 $z=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, 則上两式可写为:

(7) $$x=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}k, \quad y=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}k, \quad z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}k,$$

其中 k 是任意常数.

(7)就是方程組(5)的一般解.

假定 $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0$, 从(5)解出 y, z, 会得到同样的結果. 假定 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0$, 从(5)解出 x, z, 也会得到同样的結果. 因此, 只要(6)中的三个二阶行列式不全为0, (7)就是方程組(5)的一般解,

一般解(7)也可以記成如下的比例形式;

(8)
$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{y}{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

(8)也是极便于記忆的：我們将方程組(5)的諸系数按原来次序排列出来

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

从这張表中去掉第一列，剩下的元素所构成的行列式就是(8)中第一个分式的分母；从这張表中去掉第二列并将剩下的元素所构成的行列式乘以 -1，就得到(8)中第二个分式的分母；从这張表中去掉第三列，剩下的元素所构成的行列式就是(8)中第三个分式的分母.

对于方程組(5)，如果(6)中三个二阶行列式都等于 0，即 a_1b_2- $-a_2b_1=0$, $b_1c_2-b_2c_1=0$, $c_1a_2-c_2a_1=0$，也就是

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2},$$

这时，方程組(5)中的两个方程只相差一常数因子，因此，只要解其中一个方程就可以了，例如，我們来解第一个方程

$$a_1x+b_1y+c_1z=0,$$

由于 a_1, b_1, c_1 不能全为 0，假定 $a_1\neq 0$，令 $y=k$, $z=l$，求得

$$x=-\frac{b_1k+c_1l}{a_1},$$

即得这个方程的解为：

$$\begin{cases} x=-\dfrac{b_1k+c_1l}{a_1} \\ y=k \\ z=l \end{cases},$$

其中 k, l 为两个任意常数. 这也就是方程組(5)的一般解.

例二. 求下列方程組的一般解：

$$\begin{cases}2x+y-z=0\\x-2y+3z=0.\end{cases}$$

解：由于这个方程組的系数所构成的三个二阶行列式都不等于0，由公式(7)就得到

$$x=\begin{vmatrix}1 & -1\\-2 & 3\end{vmatrix}k=k,\ y=-\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{vmatrix}k=-7k,$$

$$z=\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{vmatrix}k=-5k.$$

故得一般解：

$$\begin{cases}x=k\\y=-7k\quad(k\text{ 为任意常数}).\\z=-5k.\end{cases}$$

或由分式(8)直接得到一般解：

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-7}=\frac{z}{-5},$$

例三. 求下列方程組的一般解：

$$\begin{cases}2x+y-z=0\\4x+2y+z=0.\end{cases}$$

解：由于这个方程組的系数所构成的三个二阶行列式不全为0，由公式(8)就得到一般解

$$\frac{x}{\begin{vmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{y}{-\begin{vmatrix}2 & -1\\4 & 1\end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix}2 & 1\\4 & 2\end{vmatrix}},$$

也就是：

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{-6}=\frac{z}{0}$$

这里，第三个分式的分母为0，由于(8)无非是(7)的另一种記法，我們应該这样来理解这个一般解：

$$\begin{cases} x=3k \\ y=-6k \\ z=0. \end{cases} \quad (k\ \text{为任意常数}).$$

这个一般解也可以写为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-6} \\ z=0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2} \\ z=0. \end{cases}$$

例四. 求下列方程組的一般解:

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 4x+2y-2z=0. \end{cases}$$

解: 由于这个方程組的系数所构成的三个二阶行列式都等于 0. 方程組中第二个方程与第一个方程只差一常数因子. 由这个方程組直接就能看出, 这二方程的确只相差常数因子 2. 因此, 第一个方程与第二个方程同解, 求出第一个方程的一般解就是方程組的一般解了.

由第一方程立即可写出一般解:

$$\begin{cases} x=-\dfrac{k-l}{2} \\ y=k \\ z=l, \end{cases} \quad (k, l\ \text{为任意常数}).$$

§2. 三阶行列式·高阶行列式

I. 三阶行列式

考慮三元一次方程組

$$(1) \qquad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases}$$

用消元法解这組方程时, 可以得到

$$(2) \qquad x=\frac{d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1-d_2b_1c_3-d_1b_3c_2}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2},$$

(当然要假定(2)的右端的分母不等于 0),未知量 y, z 也都可用类似的分式来表示,分式的分母和(2)的右端的分母完全相同.(在本节Ⅱ中,我們再确切地討論方程組(1)的解法)

現在,我們来观察(2)的右端这个分式. 它的分子分母都是由九个数組成,且都是六項三数連乘积的代数和. 采用了三阶行列式的定义幷研究其性质,就容易掌握它們的規律性.

一般地說,設有九个数排成三行三列如下:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \tag{3}$$

我們定义数值

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2 \tag{4}$$

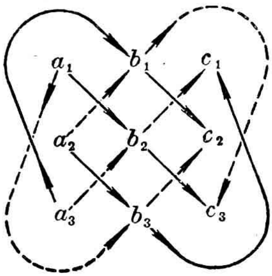
为三阶行列式. 用記号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{5}$$

表示这个行列式,也就是

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1 \\ &\quad -a_2b_1c_3-a_1b_3c_2.\end{aligned}} \tag{6}$$

組成行列式的九个数称为行列式的元素. a_1, b_1, c_1 构成第一行; a_2, b_2, c_2 构成第二行; a_3, b_3, c_3 构成第三行; a_1, a_2, a_3 构成第一列; b_1, b_2, b_3 构成第二列; c_1, c_2, c_3 构成第三列.(横排成行, 纵排成列). a_1, b_2, c_3 构成主对角綫; c_1, b_2, a_3 构成副对角綫. 有时又称(6)的右端为三阶行列式的展开式.



三阶行列式的展开式中共有六项，每一項都是三个元素的連乘积，有三項前带正号，有三項前带負号．左方的图提供了一种簡便的記忆方法，实綫上三个元素的連乘积都带有正号，虛綫上三个元素的連乘积都带有負号．

例一． 求行列式

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

的值．

解：利用上图容易写出这行列式的展开式：

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot5\cdot2+2\cdot(-4)\cdot1+(-1)\cdot3\cdot(-3)$$

$$-1\cdot5\cdot(-1)-3\cdot(-4)\cdot4-2\cdot2\cdot(-3)$$

$$=40-8+9+5+48+12=106.$$

例二． 三元一次方程組的解 x，即(2)式，可改写成

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Ⅱ．三阶行列式与二阶行列式的关系．三阶行列式的性质

把三阶行列式(6)右端中含有 a_1, a_2, a_3 的項分别提出公因数，整理即得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

圓括号內的数，其实就是一些二阶行列式，写成二阶行列式的記号，就是

$$(7)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

这說明三阶行列式与二阶行列式有密切的关系．用二阶行列式的綫性式可以表示三阶行列式．

同样，如果把(6)左端其他列或行的元素作为(6)右端一些項的公因数，可以得到其他的一些用二阶行列式表示三阶行列式的公式．这些表达式都可以用一个統一的規則表示，这統一的規則要利用元素的代数补式的概念，下面就先来說明元素的代数补式的概念．

从(7)来看，对于行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

我們称

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

分別为元素 a_1, a_2, a_3 的**代数补式**．(7)式表示：三阶行列式的值等于它的第一列各元素与其相应代数补式两两相乘的乘积之和．

一般說来，**对于三阶行列式**

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

設 x 为这行列式中位于第 i 行($i=1,2$ 或 3)、第 j 列($j=1,2$ 或 3)的元素，在这个行列式中，去掉第 i 行、第 j 列元素后，所剩下的元素所构成的二阶行列式乘以 $(-1)^{i+j}$ 称为元素 x 的代数补式，記作大写的 X.

例如，对于行列式(8)，a_1, b_3, c_2 的代数补式分别为

$$A_1=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, B_3=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$C_2=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

由行列式的展开式(6)，直接可驗证下述定理：

定理一．一个三阶行列式中，任意一列(或一行)的三个元素与它們的代数补式两两相乘积之和，等于这个行列式的值．即是

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3 \\ &= c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1 \\ &= a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2=a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3.\end{aligned}} \tag{9}$$

(9) **的右端称为三阶行列式按一列(或一行)元素展开的一般展开式．**

例三． 求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

的值．

解：根据(9)，我們試按第一行的元素展开已給的行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}+5\cdot\left(-\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right)$$