概率论与数理统计习题精选精解

GAILÜLUNYUSHULITONGJIXITIJINGXUANJINGJIE

主编 张天德 叶 宏

主审 刘建亚 吴 臻

山东科学技术出版社

www.lkj.com.cn

概率论与数理统计习题精选精解

GAILÜLUNYUSHULITONGJIXITIJINGXUANJINGJIE

主编　张天德　叶　宏
主审　刘建亚　吴　臻

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题精选精解/张天德,叶宏主编.
—济南:山东科学技术出版社,2011
ISBN 978-7-5331-5695-4

Ⅰ.①概… Ⅱ.①张…②叶… Ⅲ.①概率论—高等学校—解题 ②数理统计—高等学校—解题 Ⅳ.①O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 205387 号

概率论与数理统计习题精选精解

主编 张天德 叶 宏

出版者:山东科学技术出版社

地址:济南市玉函路 16 号

邮编:250002 电话:(0531)82098088

网址:www.lkj.com.cn

电子邮件:sdkj@sdpress.com.cn

发行者:山东科学技术出版社

地址:济南市玉函路 16 号

邮编:250002 电话:(0531)82098071

印刷者:山东人民印刷厂泰安厂

地址:泰安市灵山大街东首

邮编:271000 电话:(0538)6119320

开本:720mm×1020mm 1/16

印张:18.75

版次:2011 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5695-4

定价:26.00 元

前言
QIANYAN

2007年，我们编写了高等数学辅导及考研复习用书——吉米多维奇《高等数学习题精选精解》。此书出版后，受到高校学生、教师的高度关注，多次再版仍然供不应求，很多同行告诉我们，他们那里的学生几乎人手一册，受益匪浅，并且希望我们也能编写一本概率论与数理统计的辅导书。

概率论与数理统计是理工类专业的一门重要基础课，也是硕士研究生入学考试的重点科目。由于其理论及应用的重要性，目前在我国的大学本科和研究生的数学教育中，概率论与数理统计已与高等数学和线性代数渐成鼎足之势。为帮助读者更好的学习这一科目，我们编写了《概率论与数理统计习题精选精解》作为吉米多维奇《高等数学习题精选精解》的姊妹篇。本书涵盖了概率论与数理统计的知识要点、典型习题、考研真题以及难度稍大的综合习题，汇集了概率论与数理统计的基本解题思路、方法和技巧，融入了编者多年讲授概率论与数理统计课程、辅导考研数学的经验和体会。相信本书会成为读者学习概率论与数理统计的良师益友。

本书共分八章，每章又分若干节。在章节设置上与最新版硕士研究生入学考试大纲完全一致。在本书中，每章除最后一节外，每节包括两大部分内容：

知识要点：简要对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行了系统的梳理。

基本题型：对每节常见的基本题型进行归纳总结，便于读者理解和掌握基本知识，有利于提高读者的解题能力和数学思维水平。

每章最后一节是**综合提高题型**，这一节的题目综合性较强，有一定的难度及灵活性，其中相当一部分是考研真题。通过本节的学习，可以提高读者的应变能力、思维能力和分析问题、解决问题的能力，把握重点、了解考研动向、开拓视野。

前 言

QIANYAN

本书由张天德、叶宏主编。山东大学刘建亚教授、吴臻教授对全书作了仔细的校审，并对部分习题提出了更为精妙的解题思路。本书可作为大学理工科学生学习概率论与数理统计课程的辅导教材，也可以作为广大教师的教学参考书，还可以为毕业生考研复习和众多成人学员自学提供富有成效的帮助。读者使用本书时，宜先独立求解，然后再和本书作比较，这样一定会获益匪浅。

书中不当之处，恳请指正。

编　者

2010 年 9 月

目 录

MULU

目 录

MULU

第一章　随机事件及其概率

§1. 随机事件及其运算

知识要点

1. 随机事件的相关概念

(1)随机试验　在概率论中将具备下列三个条件的试验称为随机试验,简称试验:

1°在相同条件下可重复进行;

2°每次试验的结果具有多种可能性;

3°在每次试验之前不能准确预言该次试验将出现何种结果,但是所有结果明确可知.

(2)样本空间　随机试验的所有可能结果构成的集合,常用 Ω 表示.

(3)随机事件　随机试验的每一种可能的结果称为随机事件,常用 A,B,C,D 表示.

(4)基本事件　不能分解为其他事件组合的最简单的随机事件.

(5)必然事件　每次试验中一定发生的事件,常用 Ω 表示.

(6)不可能事件　每次试验中一定不发生的事件,常用 $\varnothing$ 表示.

2. 事件的关系及运算

(1)包含　A 发生必然导致 B 发生,则称 B 包含 A(或 A 包含于 B),记为 $B\supset A$(或 $A\subset B$).

(2)相等　若 $A\supset B$ 且 $B\supset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

(3)事件的和　A 与 B 至少有一个发生,称为 A 与 B 的和事件,记为 $A\cup B$.

(4)事件的积　A 与 B 同时发生,称为 A 与 B 的积事件,记为 $A\cap B$(或 AB).

(5)事件的差　A 发生而 B 不发生,称为 A 与 B 的差事件,记为 $A-B$.

(6)互斥事件　在试验中,若事件 A 与 B 不能同时发生,即 $A\cap B=\varnothing$,则称 A、B 为互斥事件.

(7)对立事件　在每次试验中,“事件 A 不发生”的事件称为事件 A 的对立事件. A 的对立事件常记为 $\overline{A}$.

3. 事件的运算律

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$.

(2)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3)分配律　$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$, $A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$.

(4)摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

基本题型

题型 1:事件的表示

方法与技巧 任意一个随机事件均可以表示为一个或几个与其等价的形式.在概率的计算中,可以根据条件的不同而选用不同的等价形式,大家在做关于随机事件的关系及运算的题目时,应该注意下面几个结论的应用:

(1)$A=AB+A\overline{B}$,AB 与 $A\overline{B}$ 互不相容;

(2)当 A,B 互不相容时,$A-B=A$;$AB=\varnothing$;$(A+B)-B=A$;

(3)当 $B\subset A$ 时,$A+B=A$;$AB=B$;$(A-B)+B=A$;

(4)$A-B=A-AB=A\overline{B}$.

【1.1】 设 A,B,C 为三事件,用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件.

(1) A 发生,B 与 C 不发生; (2) A 与 B 都发生,而 C 不发生;

(3) A,B,C 中至少有一个发生; (4) A,B,C 都发生;

(5) A,B,C 都不发生; (6) A,B,C 中不多于一个发生;

(7) A,B,C 中不多于两个发生; (8) A,B,C 中至少有两个发生.

解 (1)$A\overline{B}\,\overline{C}$ (2)$AB\overline{C}$ (3)$A\cup B\cup C$

(4)ABC (5)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(6)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$ 或 $\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}$

(7)$\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ (8)$AB\cup BC\cup AC$.

【1.2】 在电炉上安装了 4 个温控器,其显示温度的误差是随机的.在使用过程中,只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0,电炉就断电.以 E 表示事件"电炉断电",而 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值,则事件 E 等于( ).

(A)$\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$ (B)$\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$ (C)$\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$ (D)$\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$

解 $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$表示四个温控器显示温度均不低于 t_0

$\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$表示至少三个温控器显示温度均不低于 t_0

$\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$表示至少二个温控器显示温度均不低于 t_0

$\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$表示至少一个温控器显示温度均不低于 t_0

故应选(C).

题型 2:判断事件的关系及运算

【1.3】 指出下面式子中事件之间的关系:

(1)$AB=A$; (2)$A\cup B=A$; (3)$ABC=A$; (4)$A\cup B\cup C=A$.

解 (1)表明 A 包含于 B,即 $A\subset B$; (2)表明 B 包含于 A,即 $B\subset A$;

(3)表明 A 包含于 BC,即 $A\subset BC$; (4)表明 $B\cup C$ 包含于 A,即 $B\cup C\subset A$.

【1.4】 设 A 和 B 是任意两个随机事件,则与 $A\cup B=B$ 不等价的是( ).

(A)$A\subset B$ (B)$\overline{B}\subset\overline{A}$ (C)$A\overline{B}=\varnothing$ (D)$\overline{A}B=\varnothing$

解 根据题干的信息,$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}\Leftrightarrow A\overline{B}=\varnothing$

所以选项(D)不正确.

【1.5】设任意两个随机事件 A 和 B 满足条件 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，则(　　).

(A)$A\cup B=\varnothing$　　(B)$A\cup B=\Omega$　　(C)$A\cup B=A$　　(D)$A\cup B=B$

解法一　排除法.

注意到 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，那么 A,B 的地位是"对等"的，从而(C)，(D)均不成立.(A)不正确是显然的.故(B)正确.

解法二　直接法.

运用摩根律，$AB=\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$，那么

$$A\cup B=(A\cup B)\cup AB=(A\cup B)\cup\overline{A\cup B}=\Omega.$$

故应选(B).

点评　对于较复杂的事件运算，除了熟练运用定义及运算规律判断，还可采用集合论中的文氏图帮助分析和理解.

§2. 随机事件的概率

知识要点

1. 概率的统计定义　在相同的条件下，重复进行 n 次试验，事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动. 且一般说来，n 越大，摆动幅度越小，则称常数 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

2. 概率的公理化定义　设 Ω 是一样本空间，称满足下列三条公理的集函数 $P(\cdot)$ 为定义在 Ω 上的概率：

(1)非负性　对任意事件 A，$P(A)\geqslant 0$；

(2)规范性　$P(\Omega)=1$；

(3)可列可加性　若两两互不相容的事件列 $\{A_n\}$ 是可列的，则 $P(\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

3. 古典概型　具有下列两个特点的试验称为古典概型.

(1)每次试验只有有限种可能的试验结果；

(2)每次试验中，各基本事件出现的可能性完全相同.

对于古典概型，事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件数}}=\frac{m}{n}.$$

4. 几何概型

如果随机试验的样本空间是一个区域(例如直线上的区间、平面或空间中的区域)，而且样本空间中每个试验结果的出现具有等可能性，那么规定事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测度(长度、面积、体积)}}{\text{样本空间的测度(长度、面积、体积)}}$$

基本题型

题型1：古典概型

方法与技巧 计算古典概率 $P(A)$ 的关键是找出 A 中的基本事件数，在计算过程中常常用到排列组合的知识，有时也需要用列举法逐一分析 A 中的基本事件.

【2.1】 设一个袋中装有 a 个黑球，b 个白球，现将球随机地一个个摸出，问第 k 次摸出黑球的概率是多少？（$1\leqslant k\leqslant a+b$）

解法一 令 A 表示事件"第 k 次摸到黑球".

将这 $a+b$ 个球编号，并将球依摸出的先后次序排队，易知基本事件总数为 $(a+b)!$. 事件 A 等价于在第 k 个位置上放一个黑球，在其余 $a+b-1$ 个位置上放余下的 $(a+b-1)$ 个球，则 A 包含的基本事件数为 $a(a+b-1)!$. 那么所求概率为

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

解法二 本题也可以只考虑前 k 个位置，则 $P(A)=\dfrac{C_a^1\cdot P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^k}=\dfrac{a}{a+b}$

【2.2】 一袋中装有10个号码球，分别标有1～10号，现从袋中任取3个球，记录其号码，求：

(1)最小号码为5的概率；

(2)最大号码为5的概率；

(3)中间号码为5的概率.

解 (1),(2),(3)有同一样本空间且所含元素个数为 C_{10}^3

(1)记 A="最小号码为5"，A 的有利事件数为 C_5^2，故 $P(A)=\dfrac{C_5^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{12}$.

(2)记 B="最大号码为5"，则 B 的有利事件数为 C_4^2，故 $P(B)=\dfrac{C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{20}$.

(3)记 C="中间号码为5"，则利用乘法原理，C 的有利事件数为为 $C_4^1\cdot C_5^1$，故

$$P(C)=\frac{C_4^1\cdot C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}.$$

【2.3】 有 n 个人，每人都有同等的机会被分配到 $N(n\leqslant N)$ 间房中的任一间去，试求下列各事件的概率.

(1)A="某指定的 n 间房中各有一人"；

(2)B="恰有 n 间房各有一人"；

(3)C="某指定的一间房中恰有 $m(m\leqslant n)$ 人".

解 (1)基本事件总数为 N^n. 将 n 个人分到某指定的 n 间房中，相当于 n 个元素的全排列，所以事件 A 包含的基本事件数为 $n!$，故

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

(2)n 间房中各有1人是指任意的 n 间房中各有1人，这共有 C_N^n 种情况，所以事件 B 包含的基本事件数为 $C_N^n n!$，故

$$P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}$$

(3)从 n 个人中选 m 个分配到指定的一间房中，有 C_n^m 种选法；而其余的 $n-m$ 个人分到其余 $N-1$ 间房，有 $(N-1)^{n-m}$ 种方法，所以事件 C 包含的基本事件数为 $C_n^m(N-1)^{n-m}$，故

$$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-m}$$

这实际上是第二章将要介绍的二项分布的特殊情形.

【2.4】 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B,C 分别是将一枚骰子接连掷两次先后出现的点数.求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.

解 一枚骰子掷两次，其基本事件总数为 36.令 $A_i(i=1,2)$ 分别表示“方程有实根”和“方程有重根”，则

$$A_1=\{B^2-4C\geqslant 0\}=\left\{C\leqslant\frac{B^2}{4}\right\},\qquad A_2=\{B^2-4C=0\}=\left\{C=\frac{B^2}{4}\right\}$$

注意到表 1－1.

表 1－1

B	1	2	3	4	5	6
A_1 的基本事件个数	0	1	2	4	6	6
A_2 的基本事件个数	0	1	0	1	0	0

由此易知 A_1 的基本事件个数为

$$0+1+2+4+6+6=19$$

则由古典型概率计算公式得

$$p=P(A_1)=\frac{19}{36}$$

A_2 的基本事件个数为

$$0+1+0+1+0+0=2$$

由古典型概率计算公式得

$$q=P(A_2)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

【2.5】 一部五卷的文集，按任意次序排放到书架上，试求下列概率：

(1) 第一卷出现在两边；

(2) 第一卷及第五卷出现在两边；

(3) 第一卷或第五卷出现在两边；

(4) 第一卷或第五卷不出现在两边.

解 (1)记 A 为“第一卷出现在两边”，则 A 中样本点数为 2，

故 $P(A)=\frac{2}{5}$.

(2)记 B 为“第一卷及第五卷出现在两边”，则 B 中样本点数为 2，而(2)，(3)，(4)中样本空间中所含样本点数都为 $5\cdot 4=20$，

故 $P(B)=\frac{1}{10}$.

(3)记 C 为"第一卷或第五卷出现在两边",则 C 中样本点数为 $2\cdot 4+2\cdot 4-2=14$,

故 $P(C)=\frac{7}{10}$.

(4)记 D 为"第一卷或第五卷不出现在两边",则 D 中样本点数为 $3\cdot 4+3\cdot 4-3\cdot 2=18$,

故 $P(D)=\frac{9}{10}$.

另外,也可以利用 B 与 D 的互逆性,$P(D)=1-P(B)=\frac{9}{10}$.

【2.6】 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部位上,其中有 3 个铆钉强度太弱,每个部位用 3 个铆钉,若将 3 个强度太弱的铆钉都装在一个部件上,则这个部件强度就太弱,问发生一个部件强度太弱的概率是多少?

解法一 记 A 表示"发生一个部件强度太弱",则 A 所含的样本点数为 $C_{10}^{1}C_{47}^{27}\frac{27!}{(3!)^{9}}$.

将 50 个铆钉装在 10 个部件上的所有方法全体看作样本空间,则所含的样本点数为 $C_{50}^{30}\frac{30!}{(3!)^{10}}$.

则
$$P(A)=\frac{C_{10}^{1}\cdot C_{47}^{27}\cdot\frac{27!}{(3!)^{9}}}{C_{50}^{30}\cdot\frac{30!}{(3!)^{10}}}=\frac{1}{1960}$$

解法二 从 50 个铆钉中任取 3 个,有 C_{50}^{3} 种取法,而发生"一个部件强度太弱"这一事件必须将三个强度太弱的铆钉同时取来,并放到一个部件上,共有 $C_{3}^{3}C_{10}^{1}$ 种情况,故

$$P(A)=\frac{C_{3}^{3}C_{10}^{1}}{C_{50}^{3}}=\frac{1}{1960}$$

题型 2:几何概率

方法与技巧 根据题意建立正确的几何概型往往是解题的关键,另外,几何概率的计算中往往需要利用定积分及重积分求面积或体积,因此要求考生对微积分知识要熟悉.

【2.7】 从区间(0,1)中任取两个数,则这两个数的积小于$\frac{1}{4}$的概率为______.

解 设两个数分别为 x 和 y,有 $0<x<1$,$0<y<1$,需要求事件$\left\{xy<\frac{1}{4}\right\}$的概率,如图 1-2.7 所示,把$(x,y)$看作平面上的一个点,则$(x,y)$在边长为 1 的正方形内等可能取值,正方形面积为 1.满足 $xy<\frac{1}{4}$的全体点(x,y)构成平面区域 D,D 的面积为

$$S=1-\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(1-\frac{1}{4x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

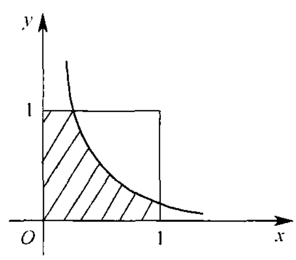

图 1-2.7

则 $$P\left\{xy<\frac{1}{4}\right\}=\frac{S}{1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

【2.8】有一根长 l 的木棒，任意折成三段，恰好能构成一个三角形的概率为______.

解 设折得的三段长度为 x,y 和 $l-x-y$，那么，样本空间 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant l,0\leqslant y\leqslant l,0\leqslant x+y\leqslant l\}$，而随机事件 A："三段构成三角形"相应的子区域 G 应满足"两边之和大于第三边"的原则，从而

$$\begin{cases} l-x-y<x+y \\ x<(l-x-y)+y \\ y<(l-x-y)+x \end{cases}$$

即 $$G=\left\{(x,y)\mid 0<x<\frac{l}{2},0<y<\frac{l}{2},\frac{l}{2}<x+y<l\right\}.$$

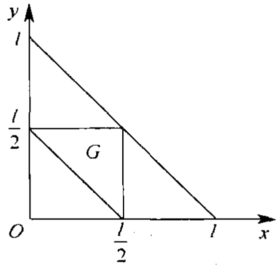

图 1-2.8

从图 1-2.8 中可以得到相应的几何概率：$P(A)=\dfrac{1}{4}$.

§3. 概率基本运算法则

知识要点

1. 概率的性质

(1)对任何事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$

(2)$P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$

(3)设 A 为任一随机事件，则 $P(\overline{A})=1-P(A)$

(4)设 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

(5)设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

(6)设 A,B 为任意两个随机事件，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

上式还能推广到多个事件的情况. 例如，设 A_1,A_2,A_3 为任意三个事件，则有

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\end{aligned}$$

一般，对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned}$$

2. 条件概率

在事件 A 已经发生的条件下，事件 B 发生的概率，称为事件 B 在给定条件 A 下的条件概率，记作 $P(B|A)$.

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\qquad P(A)>0$$

3. 乘法公式

设 A,B 是任意两个随机事件，$P(A)>0$，$P(B)>0$，则

$$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A).$$

一般地，设 $A_1,\cdots,A_n$ 是 n 个随机事件，且 $P(A_1\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1\cdots A_n)=P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})\cdots P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1).$$

基本题型

题型 1：利用性质求概率

【3.1】设随机事件 A,B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4，0.3，0.6. 若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$______.

解 因为 $A\overline{B}=A(\Omega-B)=A-AB$，

所以 $P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B)$

$=0.6-0.3=0.3$

点评 充分运用减法公式的各种变形. 特别注意以下方法在解决此类问题中的应用.

设 A,B 是任意两个随机事件，$A-B=A-AB=A(\Omega-B)=A\overline{B}$. 事实上，这是一个很容易理解的变形，不妨按下列方式理解：$A-B$ 表示事件"A 发生 B 不发生"，$A-AB$ 表示事件"在 A 发生的事件中除掉 AB 一起发生的事件"，$A\overline{B}$ 表示事件"A 发生 B 不发生"，很明显这三个事件是一样的.

【3.2】设 A,B 为随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$______.

解 先求 $\overline{AB}$ 的对立事件 AB 发生的概率 $P(AB)$.

由题意

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.3$$

则

$$P(AB)=P(A)-0.3=0.7-0.3=0.4$$

那么

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$$

【3.3】已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{6}$，则事件 A,B,C 全不发生的概率为______.

分析 应用摩根律，加法法则，对立事件的概念.

解 因为 $P(AB)=0$，所以 $P(ABC)=0$.

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$$

$$=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]$$

$$=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+0\right)=\frac{7}{12}.$$

【3.4】设当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则（　　）.

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C) $P(C)=P(AB)$　　(D) $P(C)=P(A\cup B)$

解 由题意"当 A,B 发生时,C 必然发生"从而 $ABC \subset C$,所以 $P(AB) \leqslant P(C)$,那么

$$P(C) \geqslant P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$$

故应选(B)

点评 此题考查概率"单调性",即若 $A \subset B$ 是两个随机事件,则

$$0 \leqslant P(A) \leqslant P(B) \leqslant 1$$

事实上,因为 $A \subset B$,所以 $B-A$ 与 A 互不相容,并且满足 $B=(B-A)+A$,由概率的非负性和加法公式得

$$P(B) = P(B-A) + P(A)$$

从而 $0 \leqslant P(A) \leqslant P(B)$.

【3.5】设 A,B 是任意两个随机事件,则 $P\{(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})\}=$______.

解 注意到

$$(A+B)(\overline{A}+\overline{B}) = A(\overline{A}+\overline{B}) + B(\overline{A}+\overline{B}) = A\,\overline{B} + \overline{A}\,B$$

$$(\overline{A}+B)(A+\overline{B}) = \overline{A}(A+\overline{B}) + B(A+\overline{B}) = \overline{A}\,\overline{B} + AB$$

那么

$$(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B}) = (A\,\overline{B}+\overline{A}\,B)(\overline{A}\,\overline{B}+AB) = \varnothing$$

则

$$P\{(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})\} = P(\varnothing) = 0.$$

点评 在有关事件运算或者是化简的问题中,要学会熟练应用事件的运算法则.

题型 2:条件概率的计算

方法与技巧 计算条件概率 $P(B|A)$ 的方法有两种:①按条件概率的含义,直接求出 $P(B|A)$.注意到,在求 $P(B|A)$ 时已知 A 已发生,样本空间 S 中所有不属于 A 的样本点都被排除,原有的样本空间 S 缩减成为 S'.在 S' 中计算事件 B 的概率就得到 $P(B|A)$.②在 S 中计算 $P(AB)$ 及 $P(A)$,再按 $\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 式求得 $P(B|A)$.

【3.6】设 A,B 是两个随机事件,且 $0<P(A)<1$, $P(B)>0$, $P(B|A)=P(B|\overline{A})$,则必有( ).

(A) $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$　　(B) $P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$

解 由 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$ 得

$$\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B\overline{A})}{1-P(A)} = \frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

即 $P(AB)=P(A)P(B)$

故应选(C).

【3.7】设某种动物由出生算起活 20 年以上的概率为 0.8,活 25 年以上的概率为 0.4.如果现在有一只 20 岁的这种动物,问它能活到 25 岁以上的概率是多少?

解 设事件 B="能活 20 年以上",A="能活 25 年以上".

按题意,$P(B)=0.8$,由于 $A \subset B$,所以 $BA=A$,因此 $P(AB)=P(A)=0.4$.

由条件概率的定义,得 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.4}{0.8}=0.5$.

【3.8】已知 $0<P(B)<1$，且 $P\{(A_1\cup A_2)|B\}=P(A_1|B)+P(A_2|B)$，则下列选项成立的是(　　).

(A) $P\{(A_1\cup A_2)|\overline{B}\}=P(A_1|\overline{B})+P(A_2|\overline{B})$

(B) $P(A_1B\cup A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

(C) $P(A_1\cup A_2)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$

(D) $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

解　因为 $0<P(B)<1$，所以应用条件概率公式化简已知条件

$$P\{(A_1\cup A_2)|B\}=P(A_1|B)+P(A_2|B)$$

$$\Leftrightarrow\frac{P\{(A_1\cup A_2)B\}}{P(B)}=\frac{P(A_1B)}{P(B)}+\frac{P(A_2B)}{P(B)}$$

$$\Leftrightarrow P(A_1B\cup A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B).$$

故应选(B).

题型3:利用乘法公式求概率

【3.9】100件产品中有10件次品，用不放回的方式从中每次取一件，连取三次，求第三次才取得次品的概率.

解　设 A_i 表示第 i 次取得正品，其中 $i=1,2,3$.

由题意，所求概率应为 $P(A_1A_2\overline{A}_3)$，根据乘法公式，

$$P(A_1A_2\overline{A}_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A}_3|A_1A_2)$$

$$=\frac{90}{100}\cdot\frac{89}{99}\cdot\frac{10}{98}=0.0826.$$

【3.10】甲袋中装有9个乒乓球，其中3个白球，6个黄球，乙袋中也装有9个乒乓球，5个白球，4个黄球. 首先从甲袋中任选一球放入乙袋，再从乙袋中任取一球放入甲袋，则甲袋中白球数目不会发生变化的概率为______.

解　令 A 表示事件“经过两次交换球后，甲袋中白球数目不变”，

B 表示事件“从甲袋中取出并放入乙袋的是白球”，

C 表示事件“从乙袋中取出并放入甲袋的是白球”，

那么 $A=BC+\overline{B}\,\overline{C}$

$$P(A)=P(BC+\overline{B}\,\overline{C})=P(BC)+P(\overline{B}\,\overline{C})=P(B)P(C|B)+P(\overline{B})P(\overline{C}|\overline{B})$$

$$=\frac{3}{9}\times\frac{6}{10}+\frac{6}{9}\times\frac{5}{10}=\frac{8}{15}$$

【3.11】袋中有 a 个白球 b 个黑球，随机取出一个球，然后放回，并同时再放进与取出的球同色的球 c 个，再取第二个，这样连续三次. 问取出的三个球中前两个是黑球，第三个是白球的概率是多少?

解　设 A_i 表示取出的第 i 个球为白球，则所求的概率为

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b+c}{a+b+c}\cdot\frac{a}{a+b+2c}.$$