

饱和—非饱和 水流数值模拟

Numerical Modeling Saturated and Unsaturated Groundwater Flow

陈喜 程勤波 张志才 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

饱和—非饱和 水流数值模拟

陈喜 程勤波 张志才 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

国际金融管理/于研编著. —2版. —上海:上海财经大学出版社,2010.11
(高等院校经济学管理学研究生系列教材)

ISBN 978-7-5642-0895-0/F·0895

I. ①国… II. ①于… III. 国际金融管理-高等学校-教材 IV. ①F831.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 207262 号

责任编辑 王芳 吴晓群

封面设计 张克瑶

GUOJI JINRONG GUANLI

国际金融管理

(第二版)

于研 编著

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路321号乙 邮编200434)

网 址: <http://www.sufep.com>

电子邮箱: webmaster@sufep.com

全国新华书店经销

同济大学印刷厂印刷

上海远大印务发展有限公司装订

2010年11月第2版 2010年11月第1次印刷

787mm×1092mm 1/16 24印张 614千字

印数:7 001—11 000 定价:38.00元



前言

随着气候变化及人类活动影响日益加剧，流域水文情势发生变化，需要建立更为精确的水文过程模拟及水资源定量评估方法。饱和—非饱和带水流运动是水文物理过程的重要环节，是复杂水文过程模拟、地下水资源评价及水分转化关系研究的重要基础。

水在饱和—非饱和带运动的物理基础是质量守恒定律及达西定律，水流运动基本微分方程是非线性方程。受土壤介质体空间非均质性影响，在流域尺度上求其解析解十分困难。目前，流域水文模型中多采用分区（分单元）水量平衡的水箱模型加以简化，这类模型对水动力过程描述不足，水文物理机制的数学表征缺乏完备性。随着数值计算方法及计算机的发展，从水流运动基本微分方程出发，利用有限差分及有限单元等数值计算方法进行饱和—非饱和带水流运动数值模拟取得了长足发展，国内外建立了一系列饱和—非饱和带水流及溶质运移数值计算模型和模拟软件。近年来随着对水文循环各环节相互作用认识的加深，水文学及水文地质学界认识到仅侧重于水文过程中的某一方面，如地表水过程或地下水过程，忽略或过于简化其他环节，都可能导致水文系统的不完整，水文过程模拟结果产生系统偏差。为此，近年来地表水与地下水耦合模型得以迅速发展，耦合方法主要有：①在地表水文模型基础上，扩展地下水动力模拟功能；②在地下水数值模型基础上，扩展地表水及土壤水模拟及其相互作用功能；③建立地表水与地下水物理过程全耦合模型。实现地表水与地下水模型的耦合将成为变化环境下水文过程演变规律及水资源评估的重要手段。

基于水文物理过程的数值模型应用于实际的一个重要难点，是水文地质参数的确定。目前，主要采用野外采样、室内测定方法，野外试验直接测量方法以及数值反演方法。室内外测定方法可以较为准确地得到取样介质体的水文地质参数，但受取样体尺度小及取样点在流域上代表性限制，测定的参数难以直接应用于流域尺度上的水动力模拟。根据实测地下水位或流量等观测资料，采用数值反演方法进行模型参数率定，是目前流域尺度上水文水动力模拟常用方法。率定的参数值反映观测点汇水区域或地下水位影响区域的均化值。但数值模型参数众多，且受观测资料精度及站点分布代表性的影响，模型率定的参数值还存在不确定性。区域水动力模拟的参数化分析是目前水文水资源研究面临的挑战性问题。

本书内容包括以下几方面：①在描述水流运动基本方程基础上，主要介绍美国地质调查局（USGS）发布的有关饱和—非饱和流计算方法和模型结构，包括饱和水流运动数值计算模型（MODFLOW）、变饱和水流数值计算模型（VSF）、饱和—非饱和流耦合数值计算模型（MODFLOW—UZP）、变密度饱和—非饱和地下水数值计算（SUTRA）；②在总结国内外有关水文地质参数测定及数值反演的优化方法基础上，作者设计了单环入渗试验、土槽入渗试验装置，分别用于现场测定水动力参数，饱和—非饱和流数值计算方法的验证。提出了根据实测土壤含水量资料、傍河地下水位观测资料进行渗透系数反演的计算方法；③探讨了地表水与地下水相互作用及数值模拟方法，揭示了河流雨洪过程对地下水入渗补给影响程度及范围，提出了地下水动态变化对区域水循环影响的定量分析方法；④建立了地表水—土壤水—地下水数值模拟耦合系统，用以计算区域降雨入渗量、蒸散发量、径流量等水文过程以及大气降水、土壤水、地表水及地下水的相互转化关系；⑤针对坡面水循环动力过程数值模拟，综合评估复杂模型模拟结果的不确定性。

本书研究成果得到教育部科学技术研究重大项目“流域生态水文多维机理及耦合模型研究（308012）”、国家自然科学基金重点项目“西南喀斯特流域水文变异性及生态水文过程耦合模拟研究

(40930635)”、国家自然科学基金项目“地下水消落对产流机制及河川径流影响研究(51079038)”，以及水文水资源与水利工程科学国家重点实验室(河海大学)创新基金“流域水文模拟及不确定性理论研究”、河海大学中央高校基本科研业务费项目的资助。在本书的编写过程中，作者参阅和引用了大量国内外文献资料，在此，对书中引用文献的作者表示谢意。本书部分内容为作者指导的研究生论文成果，研究生薛俊英参加了全书的文字整理和复核工作，在此一并表示感谢。

饱和—非饱和数值模拟涉及计算数学、优化方法、水文学、水文地质学、土壤学及地理学等多个学科，研究难度大，研究成果还有很多不成熟或需要进一步探讨之处，恳请读者提出宝贵意见和建议。

作 者

2010 月 9 日于南京

目 录

前 言

第 1 章 水流运动基本方程	1
1.1 简介	1
1.2 非饱和水流运动基本方程	6
1.3 饱和带地下水运动基本微分方程	12
1.4 变饱和流控制方程	19
1.5 Navier - Stokes 方程组	21
1.6 河道洪水波运动基本方程	22
1.7 坡面流运动基本微分方程	27
1.8 水文过程耦合	30
第 2 章 饱和地下水流数值计算——MODFLOW	36
2.1 简介	36
2.2 基本原理及数值求解方法	36
2.3 用法及子程序包	44
2.4 Visual Modflow	61
第 3 章 变饱和水流数值计算——VSF	64
3.1 简介	64
3.2 REF1 子程序包	64
3.3 SPF1 子程序包	67
3.4 PND1 子程序包	68
3.5 SEV1 子程序包	68
3.6 RZE1 子程序包	69
3.7 ATS1 子程序包	70

第 4 章 饱和—非饱和耦合数值计算 (MODFLOW - UZF)	73
4.1 简介	73
4.2 地下水流数值模型	74
4.3 土壤水运动计算方法 (UZP)	75
4.4 饱和—非饱和带土壤水流耦合数值计算	78
4.5 地下水溢出形成地表水	79
4.6 土壤水运动分层计算模型	79
第 5 章 变密度饱和—非饱和地下水数值计算——SUTRA	83
5.1 简介	83
5.2 基本原理	83
5.3 二维饱和地下水流数值计算	93
5.4 SUTRA 数值计算方法	100
5.5 SUTRA 水量平衡方程数值模拟	106
5.6 SUTRA 模型特点和功能	110
第 6 章 优化方法	115
6.1 简介	115
6.2 SCE-UA 算法	115
6.3 Levmar 优化方法	119
6.4 蒙特卡洛方法	122
6.5 卡尔曼滤波方法	125
第 7 章 单环入渗试验及土壤水力参数推求	130
7.1 简介	130
7.2 土壤水力参数测定方法	130
7.3 单环定水头入渗试验推求土壤水力参数	133
7.4 单环变水头入渗试验推求土壤水力参数	135
第 8 章 土壤水力参数推求的反演法	144
8.1 简介	144
8.2 单环入渗试验与数值反演法结合推求土壤水力参数	144
8.3 土柱变密度溶质运移试验及弥散度推求	150
8.4 卡尔曼滤波推求饱和渗透系数的反问题模型	158
8.5 利用傍河抽水试验反演水文地质参数方法	167

第 9 章 饱和—非饱和带水量交换模拟	174
9.1 简介	174
9.2 基于饱和—非饱和过程耦合的降雨入渗过程数值模拟	174
9.3 地下水对土壤含水量和陆面蒸发影响的数值模拟	179
9.4 区域非饱和带水平衡计算及地下水数值模拟	194
第 10 章 河流与地下水补排关系数值模拟	203
10.1 简介	203
10.2 自由渗流面及渗流量推求的数值计算方法	204
10.3 河水对地下水补给过程分析	209
10.4 橡胶坝蓄水对地下水补给及潜水蒸发影响的数值模拟	217
第 11 章 坡地饱和—非饱和水流数值模拟	225
11.1 简介	225
11.2 坡地水文试验	226
11.3 坡地水流数值模拟	232
11.4 壤中流模拟结果	237
11.5 模型参数及不确定性分析方法	239
11.6 结论	250
第 12 章 “四水”转化数值模拟	252
12.1 简介	252
12.2 基本原理及模型基本结构	253
12.3 平原区流域水文模型	254
12.4 模型应用	266
12.5 结论	278
参考文献	279

第 1 章 水流运动基本方程

1.1 简介

1.1.1 流域降雨径流过程

水分不断运动的往复循环过程称为水文循环。地球表面上地表水以河流、湖泊和湿地的方式存在，也包括海湾和海洋中水体。地表水还包括固体形态的水分——雪和冰。在地表以下的水主要是非饱和带土壤水及饱和带地下水，见图 1.1。

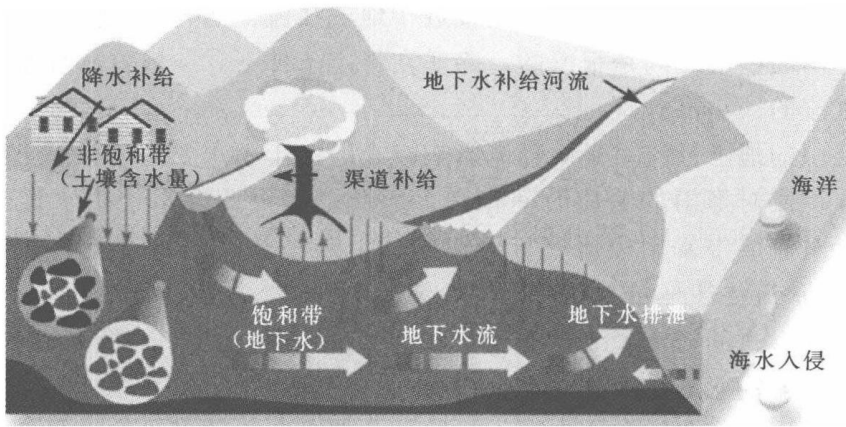


图 1.1 饱和、非饱和带水流运动及交换

雨水落到地表后，一部分形成地表径流；另一部分入渗到非饱和带中，转化为土壤水，土壤水向下运动到潜水面时便形成了对地下水的补给。降雨入渗是土壤水动态变化及地下水补给过程中的重要环节。

落在流域上的降雨量在扣除蒸散发后，形成径流，包括地表径流、饱和以及非饱和壤中流。地表径流形成于下列情形：①在降雨强度超过土壤水力传导系数情况下，由于入渗率比雨强要小，就产生坡面流，即 Horton 超渗流。此时，表层土壤含水量随时间增加，表层土壤逐渐达到饱和，但整个土层并未饱和，饱和



层水向土壤深层运动。超渗流产生在土壤入渗能力小的地表，如在没有植被覆盖的地表、干旱区和城市地区。②在降雨进入土壤和壤中流沿坡面向下流动使得整个或局部土层饱和，形成饱和超渗流。这种饱和超渗流（Dunne）机制常见于河道附近潮湿地段。饱和超渗流面积在暴雨期间增大，降雨停止后减小。Dunne地表径流机制产生在湿润地区，植被覆盖较好，具有浅层地下水面，这种区域表层土壤渗透能力比一般降雨强度要大得多。③也有人提出了第三种地表产流机制——回归流（return flow）。这种产流过程是在降雨停止后，由于土壤结构或坡度形状使得壤中流流出地表。回归流通常出现在凹形坡面上，水流向此处汇集。

壤中流产生在流域中土壤水力传导系数较大、但浅层土壤中具有不透水层或弱透水层以便能形成上层滞水的地方。这样的条件常常出现在湿润且植被覆盖较好的流域，植物枯枝落叶层增加了土壤表层渗透性能。由于植物根系作用、蚯蚓洞穴和其他结构裂隙，土壤层上部常常出现大孔隙。在此介质中，当渗漏水向下运动到达不透水层或弱透水层，就产生侧向壤中流。在这种条件下，水在两个区域运动：小孔隙中（如饱和土壤介质）和相互连接的大孔隙中（非饱和条件下）。总水流中很大部分是发生在大孔隙中，由于大孔隙增加了整个土壤水力传导系数，这部分壤中流对降雨的响应时间接近于地表径流。而在小孔隙土壤介质中的水流，对降雨的响应时间是很慢的，除非在特定条件下，一般这部分水流仅仅占流域整个水流的一小部分。

含水层中的地下径流对暴雨径流影响较小。由于雨水要通过很厚土壤层进入此含水层，径流对降雨的响应时间很长，因此，假设此含水层中水流近似为常量，也不会对流域中暴雨径流有显著影响。但是在长时间尺度上（如月、旬或年），含水层水流往往是枯季径流的主要组成部分。

上述几种形式的径流最终进入河道，再经过河网汇流流出流域出口断面。

在质量守恒定律基础上建立连续方程，在势能作用下水在多孔介质中运动的达西定律，是饱和、非饱和带水动力过程数学模型建立的基础，也是流域降雨径流形成机制研究的基础。

1.1.2 水在土壤介质中的能态

水在土壤水势梯度（即土壤水分运动驱动力）作用下运动。土壤中的总土水势（也称总水势或总水头）是由下列各分势组成的。即：

$$\Psi = \Psi_m + \Psi_g + \Psi_p + \Psi_s + \Psi_r \quad (1.1)$$

式中： Ψ 为总水势； Ψ_m 为基质势； Ψ_g 为重力势； Ψ_p 为压力势； Ψ_s 为溶质势；



Ψ_t 为温度势。

各分势的单位与总水势 Ψ 的单位相同，均用 Pa、bar 表示（以往也用 atm、cm 水柱、mm 汞柱等表示）。

(1) 重力势。重力势是由于重力场的存在引起的，其大小取决于所讨论的土壤水在重力场中的位置。将单位数量的土壤水分从某一位置移动到标准参考状态平面处，其他各项保持不变时，土壤水所做的功即为该位置土壤水的重力势。在实际研究工作中，一般将参考平面选在地表（或地下水水面）处，垂直坐标 Z 的零点设在参考平面上，并根据需要取向上为正或向下为正。参考平面选定后，土壤水重力势可写为：

$$\Psi_g = \pm \rho g Z \quad (1.2)$$

式中： ρ 为水的密度； g 为重力加速度。

当 Z 坐标向上为正时，式 (1.2) 取正号；当 Z 坐标向下为正时，式 (1.2) 取负号。位于参考平面以上的重力势为正值，即 $\Psi_g > 0$ ，位于参考平面以下的重力势为负值，即 $\Psi_g < 0$ 。

(2) 基质势。土壤水基质势表征土壤基质对土壤水分的吸持能力，它是由土壤的毛管作用和吸附作用引起的。由于自由水退离土壤基质的作用，因而基质势以自由水为标准参考状态。单位数量的土壤水分从非饱和土壤中某一点移动到标准参考状态，除土壤基质作用外，其他各项保持不变，则土壤水所做的功为该点土壤水分的基质势。由于在实现上述土壤水的移动时，为了反抗土壤基质的吸持作用，必须对土壤水做功，所以土壤水所做的功实际上是负值。显然，非饱和土壤水的基质势永远是负值，即 $\Psi_m < 0$ 。而在饱水情况下土壤水基质势 $\Psi_m = 0$ 。可见土壤水基质势的大小与土壤含水量的关系很密切，它是土壤含水量 θ 的函数。土壤水基质势是土水势的一个非常重要的分势，它对非饱和土壤水分运动的研究起着重要的作用。

(3) 压力势。压力势是由压力场中压力差的存在引起的。标准参考状态下的压力定义为标准大气压或当地大气压，若土壤中任一点的土壤水所受压力与标准参考状态下的压力存在一个压力差 Δp ，那么单位数量的土壤水由该点移至标准参考状态下，其他各项不变时，该压力差对土壤水分所做的功称为该点的压力势。

对于非饱和土壤水，在一般情况下，考虑到通气孔隙的连通性，各点承受的压力均为大气压，各点之间压力差为零，即各点的压力势 $\Psi_p = 0$ 。但是在非饱和带土壤含水量比较高的位置，可能存在未充水的闭塞孔隙，其中与土壤水相平衡



的气压与大气压不同，存在不等于零的压力势（或称气压势）。目前，在非饱和带土壤水分运动的研究中，一般忽略此项。

(4) 溶质势。溶质势是土壤水溶液中所有溶质离子和水分子之间存在吸引力引起的，以不含溶质的纯水作为标准参考状态，即溶质势为零。如果土壤中某一点的土壤水含有溶质时，该点的土壤水分就具有一定的溶质势。单位数量的土壤水分从土壤中某一点移至标准状态时，其他各项保持不变，仅仅由于土壤水溶液中溶质离子的作用，土壤水所做的功称为该点土壤水的溶质势。由于实施上述移动时，必须克服水溶液溶质离子和水分子之间的引力对土壤水做功，所以溶质势 $\Psi_s < 0$ 。

溶质势的表达式为：

$$\Psi_s = -\frac{c}{\mu}RT \quad (1.3)$$

式中： c 为土壤溶液浓度， $[ML^{-3}]$ ； R 为气体常数； T 为热力学温度； μ 为溶质的摩尔质量。

由式 (1.3) 可知，溶质势与溶液浓度和热力学温度成正比，而与溶液的种类无关。一般情况下，土壤中不存在半透膜，所以土壤水溶质势对土壤水分运动无显著影响。

(5) 温度势。温度势是由温度场的温度差引起的，土壤中某一点土壤水的温度势是由该点与标准参考状态的温度差决定的。温度势可以表示为：

$$\Psi_t = -Se\Delta T \quad (1.4)$$

式中： Se 为单位质量土壤水分的熵值； ΔT 为温度差。

一般情况下，尤其在土壤较深部，由于温度差对土壤水分通量的影响较小，因此在研究土壤水分运动时，通常对土壤水温度势忽略不计。

在土壤水分运动中，土水势的 5 个分势并不是同等重要的，往往忽略掉溶质势和温度势。对于非饱和土壤水分运动的研究，一般也不考虑压力势，总水势 Ψ 由基质势 Ψ_m 和重力势 Ψ_g 组成，即：

$$\Psi = \Psi_m \pm \Psi_g \quad (1.5)$$

或

$$\Psi = \Psi_m \pm \rho g Z \quad (1.6)$$

1.1.3 介质特性及水流基本形态

根据介质中水的饱和—非饱和状态，可以划分为：

(1) 饱和流：饱和多孔介质中的水流，即介质中的孔隙全部充满水。



(2) 非饱和流：非饱和多孔介质中的水流，即介质中的孔隙一部分为水，另一部分为空气，且忽略空气阻力，空气压力接近大气压。非饱和流的经典控制方程为 Richards 方程。

(3) 变饱和流和部分饱和流：水流可以以饱和流形式存在，也可以以非饱和流形式存在，或两者都有。一些饱和区—非饱和区可以共存，并且它们所处的空间状态也随着时间变化，如通过非饱和带向地下水自由表面的入渗中存在部分饱和区。在一个连续体内采用单一方程模拟部分饱和流运动，Richards 方程必须采用含水量和压力水头两种状态变量表示的混合形式。

饱和—非饱和状态可以用含水率和饱和度表示。非饱和带水流中，土壤部分空隙被水占据，部分充满空气，水、气两相的变化情况可以在多孔介质区域中任意一点某一时期内的相对含水量表示：

$$q_w = \frac{\text{典型单元体中水的体积}}{\text{典型单元体的体积}}$$

$$s_w = \frac{\text{典型单元体中水的体积}}{\text{典型单元体中空隙的体积}}$$

式中： q_w 为体积含水率； s_w 为饱和度。

两者之间有如下关系， $q_w = ns_w$ ， n 为孔隙率。在饱和状态下： $q_w = q_s$ ，其中， q_s 为饱和含水率； $s_w = 1$ 。

根据水体在不同介质中运动形式，可以分为：

(1) 明渠流 (Saint - Venant 方程)：二维 Saint - Venant 方程是 Navier - Stokes 方程 (质量和动量守恒) 对已知测深的渠道、河床、漫滩或深海区的自由表面水力学进行测深平均逼近得到的。测深平均变量有二维流速 $V(\text{m/s})$ 和水位 $H(\text{m})$ 或水深 $h(\text{m})$ 。可进一步简化为沿河流或渠道断面平均水流的一维圣维南方程。二维动力—扩散波方程是 Saint - Venant 方程 (和 Navier - Stokes) 的进一步简化，仅仅在流速变化慢、忽略惯性项时有效。

(2) 孔隙介质达西流：达西流描述了单宽流量 q 与水力梯度之间的比例关系。水流实际流速为 $V = q/\theta$ ，其中 θ 是孔隙率 (或含水量)。水在多孔介质中运动受介质特性及水的黏滞性影响，采用渗透率及渗透系数 (或水力传导度) 特征参数表示。

(3) 大孔隙介质流：土壤中植物根系、具有砾石的河岸带等形成的大孔隙介质，使得进入土壤中的水及溶质绕过大部分土壤基质，经过大孔隙快速到达土壤深处的地下水中。在水动力模拟中，需要考虑这类大孔隙或大渗透率的介质 (在部分区域中可将其视为无穷大的渗透率或 100% 孔隙率的极限情形)。其所造成



的两种不同影响为：

1) 动态效应：由于雷诺数很大，水头损失定律不再是线性的，惯性影响变得很重要，达西定律必须用 Ward - Forchheimer 的均方速度定律代替。

2) 动力学效应：水分特征曲线是一个拟阶梯函数，这说明当存在一个变动的自由表面时，孔隙在任意点 (x, y) 处会瞬间湿润或排干。

(4) 潜水水流（裘布依—布西奈斯克平面流）：假设垂直的准平面水流，对基于达西定律的方程进行垂直平均就可以得到 (x, y) 平面上的裘布依—布西奈斯克平面流。垂向平均的变量有水头 $H(m)$ 和二维单宽流量 $Q(m^2/s)$ 。后者是通过达西流速的垂直积分求得。应该注意的是，该方法忽略了非饱和区流量（假设地下水位的湿润/干燥过程是一个瞬时效应）。

1.2 非饱和水流运动基本方程

1.2.1 非饱和水流运动达西定律

对于非饱和水流，达西定律可表示为：

$$v = -K(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.7)$$

式中： v 为非饱和土壤的渗流速度； Ψ 为非饱和土壤的总土水势； $K(\theta)$ 为非饱和和渗透系数，其中 θ 为土壤容积含水率。

如将式 (1.7) 推广到三维情况，且只考虑 x 、 y 、 z 三个主方向上的各向异性，则有：

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -K_x(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ v_y &= -K_y(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v_z &= -K_z(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

式中： v_x 、 v_y 、 v_z 分别为 x 、 y 、 z 方向上的非饱和土壤水渗流速度； $K_x(\theta)$ 、 $K_y(\theta)$ 、 $K_z(\theta)$ 分别为 x 、 y 、 z 方向上的非饱和土壤渗透系数。

当 $K_x(\theta) = K_y(\theta) = K_z(\theta)$ ，即为各向同性土壤时，式 (1.8) 可简化为：



$$\left. \begin{aligned} v_x &= -K(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ v_y &= -K(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v_z &= -K(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

式 (1.9) 的向量形式为:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = -K(\theta) \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \vec{k} \right] = -K(\theta) \nabla \Psi \quad (1.10)$$

式中: \vec{i} 、 \vec{j} 、 \vec{k} 分别为 x 、 y 、 z 方向上的单位向量; ∇ 为算子, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ 。

1.2.2 非饱和水流运动连续性方程

从非饱和土壤中取出一个以 dx 、 dy 和 dz 为边长的微分体 (图 1.2)。

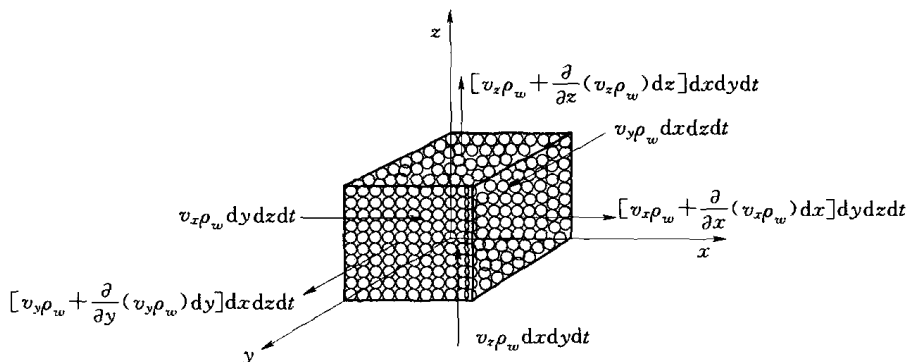


图 1.2 非饱和土壤中的微分体

在 dt 时段内从 x 方向进入该微分体的水质量为:

$$v_x \rho_w dz dy dt$$

而从该微分体中流出的水质量为:

$$\left[v_x \rho_w + \frac{\partial}{\partial x} (v_x \rho_w) dx \right] dy dz dt$$

因此, 在 x 方向上净流入该微分体的水质量为以上两项之差, 即:

$$-\frac{\partial}{\partial x} (v_x \rho_w) dx dy dz dt$$

同理, 可求得在 y 方向和 z 方向上净流入该微分体的水质量分别为:

$$-\frac{\partial}{\partial y} (v_y \rho_w) dx dy dz dt$$



$$-\frac{\partial}{\partial z}(v_z \rho_w) dx dy dz dt$$

因此, 在 dt 时段内, 净流入该微分体的水质量总计为:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(v_x \rho_w) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y \rho_w) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z \rho_w) \right] dx dy dz dt$$

根据自然界质量守恒定律, 在 dt 时段内净流入该微分体的水质量必然会导致该微分体内的水质量在 dt 时段内发生改变。这个改变量应为:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta \rho_w) dx dy dz dt$$

即可求得非饱和水流的连续性方程为:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\theta \rho_w) = \frac{\partial}{\partial x}(v_x \rho_w) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y \rho_w) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z \rho_w) \quad (1.11)$$

式中: ρ_w 为水的密度; 其余符号的意义同上。

引用前面向量 \vec{v} 和算子 ∇ 的表达式, 式 (1.11) 可以表达成更紧凑的形式:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\theta \rho_w) = \nabla \rho_w \vec{v} \quad (1.12)$$

在通常情况下, 水可视为不可压缩液体, 即 ρ_w 为常数, 故式 (1.12) 可进一步化简为:

$$-\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \vec{v} \quad (1.13)$$

式 (1.13) 即为适用于不可压缩液体非饱和水流的连续性方程式。

1.2.3 非饱和水流运动基本微分方程

非饱和水流达西定律式 (1.10) 和连续性方程式 (1.13) 联立, 就构成了控制各向同性土壤和不可压缩液体条件下非饱和水流运动的基本微分方程式。这个联立的微分方程组包含了 5 个未知函数, 即 v_x 、 v_y 、 v_z 、 θ 和 Ψ 。若从式 (1.10) 和式 (1.13) 中消去 v_x 、 v_y 和 v_z , 则可以得到一个包含两个未知函数 θ 和 Ψ 的微分方程式为:

$$-\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla [-K(\theta) \nabla \Psi] \quad (1.14)$$

或展开表示为:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] \quad (1.15)$$

式 (1.14) 或式 (1.15) 就是各向同性土壤、不可压缩液体、三维情形的非饱和水流运动的控制方程。因该方程首先由理查兹 (Richards) 于 1931 年推导