

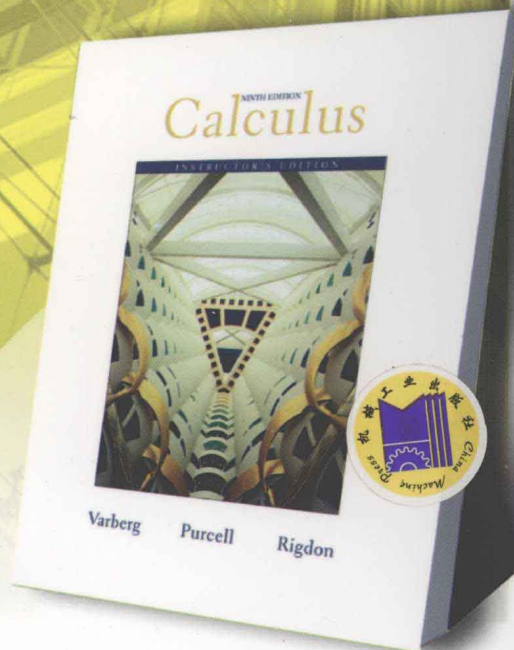
# 微积分

(翻译版·原书第9版)

**Calculus**

Dale Varberg  
(美) Edwin J. Purcell 著  
Steven E. Rigdon

刘深泉 张万芹 张同斌 杜保建 等译



机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS

PEARSON

时代教育·国外高校优秀教材精选

# 微 积 分

(翻译版·原书第9版)

Dale Varberg

(美) Edwin J. Purcell 著

Steven E. Rigdon

刘深泉 张万芹

张同斌 杜保建

王锦辉 慕运动

焦万堂

译

机械工业出版社

本书的英文原版是一本在美国大学中广泛使用的微积分课程教材。

本书内容包括：函数、极限、导数及其应用、积分及其应用、超越函数、积分技巧、不定型的极限和反常积分、无穷级数、圆锥曲线与极坐标、空间解析几何与向量代数、多元函数的微分、多重积分、向量微积分。

本书强调应用，习题数量多、类型广，重视不同学科之间的交叉，强调其实际背景，反映当代科技发展。每章之后有附加内容，包括利用图形计算器或数学软件计算的习题或带研究性的小题目等。

本书可作为高等院校理工类专业本科生的教材或学习参考书，亦可供教师参考。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

微积分：第9版：翻译版/（美）沃伯格（Varberg, D.），（美）柏塞尔（Purcell, E. J.），（美）里格登（Rigdon, S. E.）著；刘深泉等译．—北京：机械工业出版社，2011.4

时代教育·国外高校优秀教材精选

ISBN 978-7-111-33375-3

I. ①微… II. ①沃…②柏…③里…④刘… III. ①微积分—高等学校—教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 021202 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：郑 玫 责任编辑：郑 玫 任正一

版式设计：霍永明 责任校对：李秋荣

封面设计：鞠 杨 责任印制：乔 宇

北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）

2011 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·50.25 印张·1 插页·1516 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-33375-3

定价：88.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心：(010) 88361066

门户网：<http://www.cmpbook.com>

销售一部：(010) 68326294

销售二部：(010) 88379649

教材网：<http://www.cmpedu.com>

读者购书热线：(010) 88379203

封面无防伪标均为盗版

## 国外高校优秀教材审定委员会

• 主任委员：

杨叔子

委 员（按姓氏笔画为序）：

丁丽娟	王大康	王先逵	白峰杉	石德珂
史荣昌	孙洪祥	朱孝禄	陆启韶	张 策
张三慧	张延华	张润琦	张福润	吴 麒
吴宗泽	宋心琦	李俊峰	余远斌	陈文楷
陈立周	单辉祖	周双喜	范 瑜	俞正光
赵汝嘉	郭可谦	翁贻方	翁海珊	龚光鲁
章栋恩	黄永畅	谭泽光	郭鸿志	

# 出版说明

我国加入世界贸易组织（WTO）后，参与到越来越激烈的国际竞争中，而国际间的竞争实际上也就是人才的竞争、教育的竞争。为了加快培养具有国际竞争力的高水平技术人才，加快我国教育改革的步伐，国家教育部近来出台了一系列倡导高校开展双语教学、引进原版教材的政策。以此为契机，机械工业出版社陆续推出了一系列国外影印版教材，其内容涉及高等学校公共基础课，以及机、电、信息领域的专业基础课和专业课。

引进国外优秀原版教材，在有条件的学校推动开展英语授课或双语教学，自然也引进了先进的教学思想和教学方法，这对提高我国自编教材的水平，加强学生的英语实际应用能力，使我国的高等教育尽快与国际接轨，必将起到积极的推动作用。

为了做好教材的引进工作，机械工业出版社特别成立了由著名专家组成的国外高校优秀教材审定委员会。这些专家对实施双语教学做了深入细致的调查研究，对引进原版教材提出了许多建设性意见，并慎重地对每一本将要引进的原版教材一审再审，精选再精选，确认教材本身的质量水平，以及权威性和先进性，以期所引进的原版教材能适应我国学生的外语水平和学习特点。在引进工作中，审定委员会还结合我国高校教学课程体系的设置和要求，对原版教材的教学思想和方法的先进性、科学性严格把关，同时尽量考虑原版教材的系统性和经济性。

这套教材出版后，我们将根据各高校的双语教学计划，举办原版教材的教师培训，及时地将其推荐给各高校选用。希望高校师生在使用教材后及时反馈意见和建议，使我们更好地为教学改革服务。

**机械工业出版社**

# 译者序

英文大学数学教材《Calculus》的中文翻译版本《微积分》正式出版了，该教材是 Dale Varberg, Edwin Purcell 和 Steve Rigdon 共同完成，至今教材已经出版了第 9 版，在美国大学数学的教材中很有影响，美国多所重点大学一直使用该教材讲授非数学专业的大学数学课程，对应教材的辅导材料和教学平台也十分丰富。

华南理工大学计算机学院自 2004 年开始高等数学双语教学，使用的教材是该书的英文第 8 版，目前正在使用的是第 9 版。在多年使用该英文教材的过程中，我们坚持尊重美国作者的大学数学体系结构，一年级本科生的一年时间，用 160 个学时全部讲完整个教材内容。在多年教学过程中，内心非常喜欢此书，整体感觉这个教材非常好。首先，整个教材的体系来源于数学内在的联系。例如函数的概念，一般中文教材开始就总结几类初等函数，方便工科同学学习，但忽略常见函数概念的历史来源，特别是函数之间的内在联系。其次，本教材强调数学的应用，这里的应用包括对其他学科（包括数学）的适当渗透和对不同领域实际问题的解决。主要表现是教材重视计算机软件的模拟，一些实际应用内容完整给出计算结果，将数学的内涵具体化。另外，教材的例题和习题值得称赞，很多题目出自名门贵族。理论方面的问题如常数  $e$  无理性的证明，在半推半就之间，轻松完成，实际问题如 Logistic 模型的来源与变化，在不同领域的实际模型等。教材章节之间的讨论问题，更是伸缩自如，既紧密联系本章内容，又提高深化知识要点。供不同程度的同学选择，可以浏览了解问题，也可以亲自实践参与。我们曾经在华南理工大学计算机学院双语班，将章节之间的讨论题目分配布置给学生小组，让大家将问题和结果作成科研专题课件，效果很好。最后，需要强调的是整个教材的数学水平完全满足工科学子学习专业需要，如多元函数的微分积分中，使用向量概念，曲线积分和曲面积分的 Stokes 公式用旋度统一表达，这些略微超过中文教材大纲的要求。

与中文高等数学教材比较，本教材更数学和更实际，更数学的意思是教材的内容、体系和习题来源于数学的历史发展，不过分强调数学技巧；更实际的意思是适当向其他学科渗透，结合计算机解决实际问题，有很多内容是中文教材不具备的优点。有些教师会感觉它有些缺点。如把对数函数和指数函数放到定积分一章介绍，造成涉及这两类函数的极限、求导数、求积分都要放到后面去处理，这里作者更强调对数函数和指数函数定义为超越函数的特点；把数列极限和单调有界收敛准则放入级数一章介绍，造成常数  $e$  的重要极限无法及时证明，累及对数函数和指数函数的导数公式无法及时证明，这也许是作者的疏忽，也可能体现教材的弹性和重点。本教材回避无穷小概念，无穷小的概念，是数学中一个重要技巧，国内大学数学教材多突出无穷大和无穷小的概念，这是国内教材的一个特点。值得说明的是，现有的中文高等数学教材，经过不同高校老师的多年努力，教材本身已经形成完整的教学体系，有很多中文自己独立的优点，但英文教材有他们的体系。不同体系之间相互尊重，让读者体会和让学生评价，这是比较客观和理想的态度。多年的教学经验告诉我们，尊重别人的教学方法，保持自己的教学风格，让学生和读者检验我们的教材成果是多方共赢，大家接受的模式。

中文翻译版《微积分》，其教学内容满足我国大学数学的教学大纲要求，完全适合大学

理工科学生大学数学的需要，教材内容上的细微差距，我们老师完全可以把握，根据自学生的实际情况做适当调整。在今天这个改革开放的社会中，我国的高等数学的双语教学蓬勃发展，中文翻译版《微积分》也会促进和帮助高等数学双语教学的进行，推动高等数学教学纵深发展。

最后，在该书出版的时候，我们非常感谢华南理工大学理学院和教务处的支持，特别感谢华南理工大学计算机学院双语班的学生，是这些聪明有灵气的年轻学生的多年创新实践和老师的教学总结，才有机会完成本书的全部翻译工作。厦门大学黄雪莹副教授审读了全书，她也用英文版进行双语教学。在翻译、出版过程中难免出现错误，欢迎不吝赐教，或讨论。

**刘深泉教授**  
华南理工大学理学院数学系

# 前 言

第9版的《微积分》再次作适当调整，在增加一些新课题的同时，另外一些课题也被重新安排，但教材的特点仍然保持。以前版本的使用者的反馈很好，我们并不打算大规模修改这本已得到认可的教材。

对大多数读者来说，本教材仍被认为是传统教材。书中的大多数定理给予了证明，但当证明过分复杂时，证明作为练习或者忽略。对复杂证明的定理，我们试图给出直观解释，使得后面章节使用时比较合理。在某些情形下，我们给出证明的轮廓。此时，我们会解释为什么这是一个轮廓，而不是精确的证明。焦点问题仍然是理解微积分的概念，虽然有人强调清晰和准确的描述是理解微积分的简捷方法，但我们将两者作为互补的因素。如果概念定义清晰，定理陈述清楚、证明完整，学生会更容易掌握微积分。

**教材概要** 第9版继承所有成功微积分教材的主导思想，我们避免教材在新课题和新方法增加方面过度膨胀。在较少的篇幅内，本书覆盖了微积分的主要专题，包括预备章节，极限和向量微积分。在最近十几年，学生染上一些坏习惯。他们不喜欢读课本，而是喜欢寻找已经解出的例题，使得可以对照家庭作业中的问题。本教材的目标是继续保持微积分是关于以几个基本概念为中心的理论、公式和图形的课程。教材中的习题，对于开发解题思路和掌握解决问题的技巧是极其重要的，与理解微积分课程的目标并不矛盾。

**概念复习问题** 为鼓励学生理解阅读教材，在每个习题集之前设置四个填空题，检验基本概念的内涵、定理的理解和应用概念解决简单问题的能力。学生应该在解决后面习题之前完成这些问题。我们采用快速反馈方法鼓励大家这样做，正确答案在习题集的后面给出。这些条目也给出测试问题，用于验证学生是否完成需要的阅读和课堂准备。

**复习和预习问题** 在结束一章内容后到下一章开始之间，同样给出一系列的复习和预习问题。这里的许多问题强迫学生在下一章开始之前，复习过去的课题，例如：

第3章，导数的应用：在求解不等式时，要求学生说明函数在哪里增减或者在哪里凹凸。

第7章，积分技巧：要求学生用变量代换法来求解积分，这是他们在此前学过的求积分的唯一技巧，缺乏这个技巧本章会导致“灾难”后果。

第13章，多重积分：要求学生在直角坐标、柱面坐标和球面坐标系下画出方程的图像，二维和三维空间的直观区域对多重积分的理解尤其重要。

其他复习和预习问题要求学生应用已经学过的知识，开始新的一章。例如：

第5章，积分的应用：要求学生找出两个函数之间的线段长度，这正是本章进行切片、近似和积分步骤的技巧。同样，要求学生求出小圆盘、垫圈和薄壳的体积。在本章开始之前完成这些任务可以让学生更好理解切片、近似和积分的思想，并直接用于求出一个旋转体的体积。

第8章，不定式的极限和广义积分：要求学生解出积分  $\int_0^a e^{-x} dx$  ( $a = 1, 2, 4, 8, 16$ ) 的值。我们期望学生通过这样的问题意识到随着  $a$  值增加，积分值趋向于1，从而开始理解广义积分的思想。同样的策略包含在无穷级数概念之前的求和问题中。



**数的感觉** 数的感觉一直在本书中起着关键作用，学生在包含数值运算的问题中出错时，数的感觉会让他们意识到答案错误并重新求解。为鼓励和发展这个潜在能力，我们强调估计过程。我们给出如何进行心算的估计，如何得到大致正确的答案。本教材中，我们有意识地增加使用数的感觉的机会，并用符号  $\approx$  表示得到一个大致正确的答案，我们希望学生也这样做，特别是在求解标有符号  $\approx$  的问题时。

**技术的使用** 第9版的很多问题用下列符号标示：

$\boxed{C}$  表示常用的计算器可以帮助解决的问题。

$\boxed{GC}$  表示需要一个有图形功能的计算器帮助解决的问题。

$\boxed{CAS}$  表示需要计算机代数系统（计算软件）的帮助解决的问题。

第8版中每章最后的技术项目现在可以在互联网得到PDF格式的文档。

**第9版的变化** 教材的基本结构和特点仍然没有改变，本版的主要变化有：

1) 前一章结束和新一章开始之间，有一系列复习和预习的问题。  
2) 第0章被压缩，微积分的预备课题（第8版中第2章开始）放在第0章。在第9版的第1章，开始部分是极限。第0章需要多少预备内容，取决于每个同学的情况和每个学校的要求。

3) 原函数的内容和微分方程的介绍被转移到第3章，这样可以更清楚地区分概念“变化率”和概念“累积”。由于第4章开始是面积，下面直接是定积分和微积分基本定理。根据作者过去的经验，很多一年级学习微积分的学生，不能明确区分不定积分是原函数与定积分是和的极限这两个概念。这个经验从1965年的第1版到今天的版本仍然正确。我们希望分开不同的课题会加强这些概念的区分。

4) 第5章积分的应用，增加了概率和流体压力。我们强调概率问题类似直线上的质点问题。物体的质心是密度与  $x$  相乘的积分，而概率的期望也是概率密度与  $x$  相乘的积分。

5) 将5节的锥体部分内容浓缩成3节。学生在微积分之前的课程中已经了解到这些内容（不是全部）。

6) 向量内容被合并成单独的一章。在第8版，在第13章讨论平面向量，在第14章讨论空间向量。通过合并，许多课题（如曲率、面积）不必被重复。第9版大部分内容介绍空间向量，但也介绍了平面向量如何使用。问题的上下文应该指出到底需要平面向量还是需要空间向量。

7) 有几个关于行星运动开普勒定律的例题和练习。向量内容的最后是牛顿万有引力定律衍生出开普勒定律。我们在例题中推出开普勒第二定律和第三定律，将第一定律作为练习。在这个练习中，从步骤(a)到步骤(1)逐步推导得出结论。

8) 第13章多重积分，现在用包含多重积分的雅可比变换作为结束。

9) 数值计算方法这一节，放在整个课本的近似计算的位置。例如，方程近似求解变成3.7节；数值积分变成4.6节；微分方程的近似解变成6.7节；函数的泰勒近似变成9.9节。

10) 微分方程这一章已经被删去，学生可以在互联网找到。本版教材包含的是微分方程数值解这一内容，包括梯度场和欧拉法。

11) 概念问题的数量大大增加。许多问题要求学生绘制图表。对不能得到解析解的问题，

我们也增加了数值方法的使用，例如牛顿法和数值积分。

**致谢** 非常感谢普伦蒂斯霍尔出版社的全体职员（省略名单）和仔细检查第9版的全体教师（省略名单），最后非常感谢我的妻子波特，孩子克里斯、玛丽和爱米丽容忍我很多深夜和周末在办公室工作。

斯蒂芬·E·里格登 (S. E. R.)

srigdon@siue.edu

南伊利诺斯大学 爱德华兹维尔校区

## 单 位 表

量的名称	单位名称	单位符号	换算关系
长度	米	m	
	厘米	cm	
	千米	km	
	海里	n mile	1 n mile = 1852m
	英尺	ft	1 ft = 0.3048 m
	英寸	in	1 in = 0.0254 m
	英里	mile	1 mile = 1609.344 m
	码	yd	1 yd = 0.9144 m
体积	升	L	1 L = 0.001 m <sup>3</sup>
	加仑 (美)	gal	1 gal = 3.78541 L
质量	千克	kg	
	磅	lb	1 lb = 0.45359237 kg
	短吨	sh ton	1 sh ton = 907.185 kg
	夸特	qr	1 qr = 12.7006 kg
时间	秒	s	
	分钟	min	
	小时	h	
速度	米每秒	m/s	
	千米每小时	km/h	
	英尺每秒	ft/s	1 ft/s = 0.3048 m/s
	英里每小时	mile/h	1 mile/h = 0.44704 m/s
质量	克	g	
	千克	kg	
力	牛	N	
	达因	dyn	1 dyn = 10 <sup>-5</sup> N
力矩	牛顿米	N · m	
压强	帕斯卡	Pa	
	巴	bar	1 bar = 10 <sup>5</sup> Pa
电流	安培	A	
电压	伏	V	
电阻	欧姆	Ω	
能量	焦	J	
功率	瓦特	W	
电荷	库仑	C	
音强	分贝	dB	
角	弧度	rad	
	转	r	

常用的构成十进倍数和分数单位的词头有毫 (m) 表示 10<sup>-3</sup>, 厘 (c) 表示 10<sup>-2</sup>, 兆 (M) 表示 10<sup>6</sup>。

# 目 录

出版说明	
译者序	
前言	
单位表	
<b>第 0 章 预备知识</b> .....	1
0.1 实数、估算、逻辑 .....	1
0.2 不等式与绝对值 .....	9
0.3 直角坐标系 .....	18
0.4 方程的图形 .....	27
0.5 函数及其图像 .....	31
0.6 函数的运算 .....	37
0.7 三角函数 .....	44
0.8 本章回顾 .....	54
0.9 回顾与预习 .....	58
<b>第 1 章 极限</b> .....	60
1.1 极限的介绍 .....	60
1.2 极限的精确定义 .....	66
1.3 有关极限的定理 .....	73
1.4 含有三角函数的极限 .....	79
1.5 在无穷远处的极限, 无穷极限 .....	82
1.6 函数的连续性 .....	88
1.7 本章回顾 .....	96
1.8 回顾与预习 .....	98
<b>第 2 章 导数</b> .....	99
2.1 一个主题下的两个问题 .....	99
2.2 导数 .....	106
2.3 导数的运算法则 .....	113
2.4 三角函数的导数 .....	120
2.5 复合函数求导法则 .....	123
2.6 高阶导数 .....	129
2.7 隐函数求导 .....	134
2.8 相关变化率 .....	139
2.9 微分与近似计算 .....	146
2.10 本章回顾 .....	151
2.11 回顾与预习 .....	154
<b>第 3 章 导数的应用</b> .....	156
3.1 最大值和最小值 .....	156
3.2 函数的单调性和凹凸性 .....	160
3.3 函数的极大值和极小值 .....	169
3.4 实际应用 .....	174
3.5 用微积分知识画函数图形 .....	187
3.6 微分中值定理 .....	195
3.7 数值求解方程 .....	199
3.8 不定积分 .....	207
3.9 微分方程简介 .....	213
3.10 本章回顾 .....	219
3.11 回顾与预习 .....	222
<b>第 4 章 定积分</b> .....	224
4.1 面积 .....	224
4.2 定积分 .....	233
4.3 微积分第一基本定理 .....	241
4.4 微积分第二基本定理及换元法 .....	250
4.5 积分中值定理和对称性的应用 .....	259
4.6 数值积分 .....	266
4.7 本章回顾 .....	275
4.8 回顾与预习 .....	279
<b>第 5 章 积分的应用</b> .....	280
5.1 平面区域的面积 .....	280
5.2 立体的体积: 薄片模型、圆盘模型、 圆环模型 .....	287
5.3 旋转体的体积: 薄壳法 .....	294
5.4 求平面曲线的弧长 .....	299
5.5 功和流体力 .....	308
5.6 力矩、质心 .....	314
5.7 概率和随机变量 .....	322
5.8 本章回顾 .....	328
5.9 回顾与预习 .....	330
<b>第 6 章 超越函数</b> .....	332
6.1 自然对数函数 .....	332
6.2 反函数及其导数 .....	339
6.3 自然指数函数 .....	345
6.4 一般指数函数和对数函数 .....	350
6.5 指数函数的增减 .....	356
6.6 一阶线性微分方程 .....	363

6.7	微分方程的近似解	368	10.8	本章回顾	556
6.8	反三角函数及其导数	373	10.9	回顾与预习	559
6.9	双曲函数及其反函数	382	<b>第 11 章 空间解析几何与向量代数</b> 561		
6.10	本章回顾	388	11.1	笛卡儿三维坐标系	561
6.11	回顾与预习	390	11.2	向量	567
<b>第 7 章 积分技巧</b> 391			11.3	向量的数量积	574
7.1	基本积分规则	391	11.4	向量的向量积	582
7.2	分部积分法	395	11.5	向量函数与曲线运动	586
7.3	三角函数的积分	401	11.6	三维空间的直线和曲线的切线	596
7.4	第二类换元积分法	407	11.7	曲率与加速度分量	601
7.5	用部分分式法求有理函数的积分	411	11.8	三维空间曲面	611
7.6	积分策略	418	11.9	柱面坐标系和球面坐标系	616
7.7	本章回顾	425	11.10	本章回顾	621
7.8	回顾与预习	428	11.11	回顾与预习	624
<b>第 8 章 不定型的极限和反常积分</b> 429			<b>第 12 章 多元函数的微分</b> 626		
8.1	0/0 型不定型的极限	429	12.1	多元函数	626
8.2	其他不定型的极限	434	12.2	偏导数	634
8.3	反常积分: 无穷区间上的反常积分	438	12.3	极限与连续	639
8.4	反常积分: 被积函数无界时的反常积分	446	12.4	多元函数的微分	645
8.5	本章回顾	451	12.5	方向导数和梯度	651
8.6	回顾与预习	453	12.6	链式法则	657
<b>第 9 章 无穷级数</b> 454			12.7	切平面及其近似	661
9.1	无穷数列	454	12.8	最大值与最小值	666
9.2	无穷级数	460	12.9	拉格朗日乘法法	674
9.3	正项级数收敛的积分判别法	468	12.10	本章回顾	680
9.4	正项级数收敛的其他判别法	473	12.11	回顾与预习	681
9.5	交错级数: 绝对收敛和条件收敛	479	<b>第 13 章 多重积分</b> 683		
9.6	幂级数	483	13.1	投影为矩形区域的二重积分	683
9.7	幂级数的运算	487	13.2	二重积分化为二次积分	688
9.8	泰勒级数和麦克劳林级数	493	13.3	投影为非矩形区域的二重积分	692
9.9	函数的泰勒近似	500	13.4	极坐标上的二重积分	698
9.10	本章回顾	507	13.5	二重积分的应用	703
9.11	回顾与预习	510	13.6	曲面面积	708
<b>第 10 章 圆锥曲线与极坐标</b> 512			13.7	笛卡儿坐标系上的三重积分	713
10.1	抛物线	512	13.8	柱面坐标系和球面坐标系上的三重积分	720
10.2	椭圆和双曲线	517	13.9	多重积分下的变量替换	725
10.3	坐标轴的平移与旋转	526	13.10	本章回顾	733
10.4	平面曲线的参数方程	532	13.11	回顾与预习	735
10.5	极坐标系	540	<b>第 14 章 向量微积分</b> 736		
10.6	极坐标系下方程的图形	546	14.1	向量场	736
10.7	极坐标系下的微积分	551	14.2	曲线积分	741

---

14.3 与路径无关的曲线积分 .....	747	14.8 本章回顾 .....	777
14.4 平面内的格林公式 .....	754	<b>附录</b> .....	779
14.5 曲面积分 .....	760	A.1 数学归纳法 .....	779
14.6 高斯散度定理 .....	768	A.2 几个定理的证明 .....	781
14.7 斯托克斯定理 .....	773	<b>公式卡</b> .....	784

# 第0章 预备知识

- 0.1 实数、估算、逻辑
- 0.2 不等式与绝对值
- 0.3 直角坐标系
- 0.4 方程的图形
- 0.5 函数及其图形
- 0.6 函数的运算
- 0.7 三角函数
- 0.8 本章回顾
- 0.9 回顾与预习

## 0.1 实数、估算、逻辑

微积分是建立在实数体系及其性质基础上的。但是实数到底是什么？它又有什么性质？要回答这两个问题，我们需要先从整数和有理数开始。

**整数和有理数** 在所有数中，自然数是最简单的数

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

通过它们，我们可以对实物进行计数，如：书籍、朋友和金钱等。如果把负数和零也包含进去，我们就得到**整数**

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

当我们测量长度、重量或者电压物理量时，整数就不合适了，整数间的间距太大，不能提供足够的精确度来描述这些物理量。需要考虑引入整数的比值形式(图1)，例如：

$$\frac{3}{4}, \frac{-7}{8}, \frac{21}{5}, \frac{19}{-2}, \frac{16}{2} \text{ 和 } \frac{-17}{1}$$

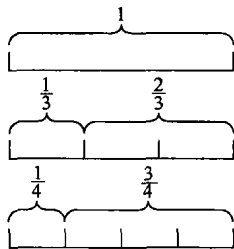


图 1

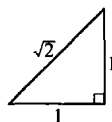


图 2

注意：这里包含  $\frac{16}{2}$  和  $\frac{-17}{1}$ ，尽管按照除法的意义，平时我们习惯写作 8 和 -17，但这里的写法不包括  $\frac{5}{0}$  或者  $\frac{-9}{0}$ ，因为它们不可能给出实际的意义(见习题 30)。切记，除数是不允许为 0 的。我们把可以写成  $m/n$  形式的数称为**有理数**，其中  $m$  和  $n$  为整数， $n \neq 0$ 。

有理数可以用来测量所有的长度吗？答案是否定的。这个令人吃惊的事实是由公元前 15 世纪的古希腊人发现的。他们发现如果直角三角形两直角边均为 1 时，则斜边长度为  $\sqrt{2}$ (图 2)，而  $\sqrt{2}$  是无法写成两个整数

的比的形式(见习题 77). 所以说,  $\sqrt{2}$  是一个无理数(非有理数). 类似的数还有  $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt[3]{7}$ 、 $\pi$  以及其他一系列数.

**实数** 考虑所有可以测量长度的数(有理数和无理数), 还有它们对应的负数和零, 我们把它们统称为实数.

实数可以被看做是一条水平直线上点的标记, 标记的位置表示从固定点(称为原点并且标记为 0)向右或者向左的距离(有向距离)(图 3). 虽然我们不可能画出所有的标记点, 但是每个点的确对应唯一一个实数, 这个数被称为该点的坐标, 这条标记坐标的直线被称为实数直线. 图 4 给出上面所讨论的这些数集的关系.

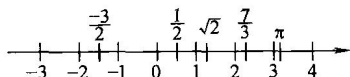


图 3

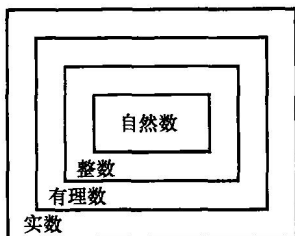


图 4

实数系统还可以进一步扩展到复数. 复数表示方式是  $a + bi$ , 其中  $a$  和  $b$  是实数, 而  $i = \sqrt{-1}$ . 复数在本书中很少出现. 事实上, 如果我们没有特别指明的话, 本书中的数默认为是实数. 实数是微积分中的主要角色.

**循环小数与不循环小数** 每个有理数都可以写成一个小数形式. 根据定义, 它可以表达成两个整数的商. 如果用分子除以分母, 可以得到一个小数. 例如:

$$\frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{3}{8} = 0.375, \quad \frac{3}{7} = 0.428571428571428571\dots$$

无理数, 也可以表达成一个小数. 例如

$$\sqrt{2} = 1.4142135623\dots, \quad \pi = 3.1415926535\dots$$

用小数表示一个有理数, 要么是有限(例如  $3/8 = 0.375$ ), 要么是无限循环的(例如  $13/11 = 1.18181818\dots$ ), 如图 5 所示. 动手试验一下, 只需多做几步除法计算, 就知道为什么了(注意, 只有可能出现有限个不相同的数字). 一个有限小数可以被认为是一个循环是 0 的循环小数, 例如:

$$\frac{3}{8} = 0.375 = 0.3750000\dots$$

因此, 每个有理数都可以被写成一个循环小数. 换句话说, 如果  $x$  是一个有理数, 那么它可以被写成一个循环小数. 而其逆命题也同样成立: 如果  $x$  是一个循环小数, 那么  $x$  是一个有理数. 对于一个有限小数来说, 这是很明显的(例如:  $3.137 = 3137/1000$ ), 而且, 对于无限循环小数, 要证明也十分简单.

**例 1(循环小数都是有理数)** 说明  $x = 0.136136136\dots$  是一个有理数.

**解** 我们用  $1000x$  减去  $x$  来求解  $x$

$$\begin{aligned} 1000x &= 136.136136 \\ x &= 0.136136 \\ \hline 999x &= 136 \\ x &= \frac{136}{999} \end{aligned}$$

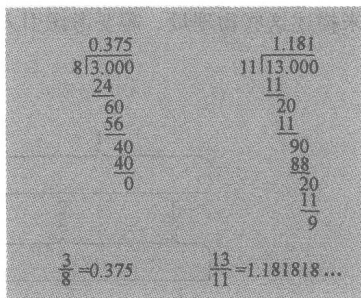


图 5



无理数的小数形式是不循环的. 反过来, 一个不循环的无限小数一定是一个无理数. 例如:

$$0.101001000100001\dots$$

肯定是一个无理数(注意到数的形式中在每两个1之间有越来越多的0). 图6中的表格总结了之前说过的结论.

**稠密性** 在任意两个不同的实数  $a, b$  之间, 无论它们如何接近, 总存在另外一个实数. 特别地,  $x_1 = (a+b)/2$  是  $a, b$  的中间值. 在  $a$  与  $x_1$  之间(图7)又有另外一个实数  $x_2$ , 同时, 又有实数  $x_3$  在  $x_1$  和  $x_2$  之间, 而且这个结论可以被无限次地重复运用, 我们可以得到无限多个在  $a$  和  $b$  之间的实数. 因此, 并没有类似于“只有一个实数大于3”的说法.

事实上, 我们可以进一步拓展这一结论. 在任意两个不同的实数之间, 总存在一个有理数和一个无理数.(在习题57里面, 要求证明总有一个无理数存在于任意两个实数之间). 因此, 根据上面的结论, 在每一对实数之间都有无穷多个数.

数学家把这种情况描述为: 有理数和无理数在实数直线上都是稠密的. 每个数都同时拥有充分接近的有理数和无理数与之相邻.

这种稠密性的一个结论是: 任何无理数都可以用一个满足我们期望的有理数去充分接近——事实上, 这个接近过程可以用一个有限不循环小数去表示. 用  $\sqrt{2}$  作为例子. 一连串的数, 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, ... 不断接近于  $\sqrt{2}$ (图8). 通过这一连串足够长的小数, 可以足够接近  $\sqrt{2}$ .

实数	
有理数	无理数
循环小数	不循环小数

图 6

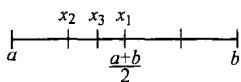


图 7

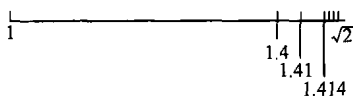


图 8

**计算器与计算机** 今天很多计算器都能进行运算、绘图及符号操作. 几十年前, 计算器已经可以完成数值运算, 例如给出  $\sqrt{12.2}$ 、 $1.25\sin 22^\circ$  的近似数值. 到了20世纪90年代, 计算器可以绘制出几乎是任何一个代数、三角、指数和对数函数的图形. 现在先进的技术允许计算器去完成很多字母运算, 例如展开  $(x-3y)^{12}$  或者解  $x^3 - 2x^2 + x = 0$ . 计算机软件 Mathematic 或者 Maple 以及其他的软件都能够完成诸如此类的符号运算.

通常我们建议这样来使用计算器:

- 1) 知道所使用的计算器什么时候能给出一个确切的答案, 什么时候给出一个近似值. 例如, 如果想知道  $\sin 60^\circ$  的值, 计算器可能给出一个精确的答案  $\sqrt{3}/2$ , 或者一个近似数值 0.8660254.
- 2) 在大多情况下, 我们更偏向于得到一个精确的答案, 特别是当你必须使用它来完成下一步的运算时. 例如: 假如当需要得到  $\sin 60^\circ$  的完全平方时, 很简单, 计算  $(\sqrt{3}/2)^2 = 3/4$  比计算  $0.8660254^2$  更精确.
- 3) 在实际应用中, 尽可能提供一个精确的答案和一个近似值. 可以通过看近似值来检查答案是否合理, 因为它与问题的描述是相关联的.

**估算** 面对一个复杂的计算问题, 一个粗心的学生可能会马上按动计算器按键, 直接得出结果, 但没有意识到自己没看到一个括号或者是遗失了一个数字已经导致了错误. 一个认真的学生对数有特殊的感受, 他也是按同样的键, 当结果太大或者太小时马上就能意识到错误, 然后将它改正. 这就是估算的重要性.