

科學圖書大庫

作業研究問題集

(第一冊)

編著者 謝逸羣

徐氏基金會出版

科學圖書大庫
作業研究問題集

(第一冊)

編著者 謝逸羣

徐氏基金會出版

我們的工作目標

文明的進度，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認為若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員林碧鏗氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大眾閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尙在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會 敬啓

中華民國六十四年九月

自序

「作業研究」爲今日應用數學體系的重要一環，用途極廣，甚爲政府機關、工商企業及各級行政機關所重視。其一般意義，爲應用科學的方法及技術，解決各類決策問題，求得最適宜的行動方案，並進而付諸實施。一般決策問題均具備下述二個特徵：(一)在組織內部各單位之間，彼此利害衝突；(二)以整體的利益爲決策的目標，重視「犧牲小我，完成大我」的團隊精神，來求取問題的解決。「作業研究」所肩負的重任，爲提供可行的科學方法，協助決策者衡量各有關因素的輕重，得以迅速及理智地制訂合理的行動方案。

本書側重於推廣「作業研究」的應用，並不從高深的數學理論着眼，企能以深入淺出的筆調，有系統地介紹「作業研究」的全貌。在「作業研究」衆多專題中，共選取了較重要的二十多項，分三冊出版。每章之末均設有練習題數則，使讀者在學習理論之餘，有實習的機會；部份習題並附有答案，以便參證。所選取的練習題，大多數均與實際生活有關，分別選自下述各方面：生產控制，市場研究，財政，人事管理，物料採購及其他。本書例題甚多，各作業程序均分別詳細說明，以便讀者觀摩。

編者曾在佐治威廉大學 (Sir George Williams Univ.) 攻讀，有關作業研究的學識，皆爲吾師 Prof. Popp 所講授此書之成與該次進修有關，其諄諄善誘啓迪之功實不可沒，飲水思源，應致最深切的謝意。本書根據吾師所發的講義及筆記，詳加研讀，並與以往實習經驗，相互印證，略具心得，爰將整理所得，摘要付梓，藉供參考。對那些曾給與編者勉勵及幫忙的好友們，在此亦致以最誠懇的謝意。編者學識有限，雖經小心核校，錯誤之處，定所難免，諸祈賢達先進，不吝指正，以匡不逮是幸。

謝逸羣

民國六十三年六月

Guelph, Canada

編者例言

一、本書由廿餘個專題所組成，每章分別討論一個專題。

二、每章分爲四欄，亦即：

(1) 理論概要

(2) 模範例題

(3) 練習題

(4) 練習題解答

三、本書各冊之末，均附有一個中英名詞索引，其檢視法與一般索引略有不同，索引中各數字可爲下述四類型式之任何一類。現特說明如下：

(1) d d：二位數字用來表示「章」數。例如，3表示「第三章」，12表示「第十二章」。

(2) d d d d：四位數字用來表示「某章某節」，後二數字表示「節」數，其餘二數字則表示「章」數。例如，4 11表示「第四章第一一節」，12 13表示「第十二章第十三節」。

(3) d d — d：前二數字表示「章」數，後一數字表示「欄」數。例如，4 — 2表示第四章第二欄（該章的「模範例題」）。

(4) × ×：表示「此名詞出現全書各章中」或「此名詞爲常見術語」。

四、書中所有專門術語均未贅附原文於後；如讀者對其英文原詞有興趣，可查閱索引即得。

目 錄

自 序

編者例言

第一章 效用理論

一、理論摘要.....	1
1-1 專門術語 1-2 效用理論 1-3 期望值 1-4 定序 1-5 標準賭博法 1-6 現款等值函數 1-7 效用函數	
二、模範例題.....	8
三、練習題.....	12
四、練習題答案.....	14

第二章 決策原理

一、理論摘要.....	15
2-1 賠付矩陣 2-2 在穩定情形下的決策 2-3 在冒險情形下的決策 2-4 額外資料的價值 2-5 在不穩定情形下的決策 2-6 決策理論與博戲理論之分水嶺	
二、模範例題.....	24
三、練習題.....	29
四、練習題解答.....	31

第三章 存量理論

一、理論摘要.....	33
3-1 概論 3-2 存量成本 3-3 存量模式 3-4 成本為未知數之存量問題 3-5 最佳存量政策 3-6 折讓處理 3-7 再訂購點及安全存量 3-8 生產運轉之經濟批次	
二、模範例題.....	44
三、練習題.....	49
四、練習題解答.....	51

第四章 博戲理論

一、理論摘要.....	52
4-1 兩人零和博戲 4-2 單純策略 4-3 統制規則 4-4 混合策略	
二、模範例題.....	58
三、練習題.....	63
四、練習題解答.....	65

第五章 工作指派問題

一、理論摘要.....	67
5-1 專門術語 5-2 概論 5-3 工作指派方法 5-4 其他特殊情形之處理	
二、模範例題.....	72

三練習題.....	80
-----------	----

四練習題解答.....	82
-------------	----

第六章 運輸問題

一理論摘要.....	84
------------	----

6-1 專門術語 6-2 概論

6-3 視察法 6-4 計算成本

矩陣之求取法 6-5 機會成本

矩陣之求取法 6-6 最佳

方案的鑑定法 6-7 運搬方

案的增訂法 6-8 西北角法

6-9 單元處罰法 6-10 變

態情形 6-11 最大值問題

6-12 運輸方法摘要

二模範例題.....	97
------------	----

三練習題.....	121
-----------	-----

四練習題解答.....	124
-------------	-----

第七章 排序問題

一理論概要.....	128
------------	-----

7-1 概論 7-2 n 項工作兩

種設施的排序問題 7-3 n

項工作三種設施的排序問題

7-4 最小停工時間的排序問

題 7-5 推銷員問題

二模範例題.....	143
------------	-----

三練習題.....	151
-----------	-----

四練習題解答.....	154
-------------	-----

第八章 線性規畫

一理論摘要.....	155
------------	-----

8-1 概論 8-2 不等式變換

成等式之途徑 8-3 向量與

矩陣 8-4 簡化法之起始答

案 8-5 簡化法作業程序

8-6 最小值問題 8-7 問題

的對偶 8-8 對偶問題之經

濟釋義 8-9 變態問題

8-10 運輸問題 8-11 工

作指派問題 8-12 博戲理

二模範例題.....	185
------------	-----

三練習題.....	195
-----------	-----

四練習題解答.....	196
-------------	-----

附錄：對照表.....	197
-------------	-----

索引.....	201
---------	-----

第一章 效用理論

一、理論摘要

1-1 專門術語

目標：採取各項行動之依據。

策略：達到某項目標之可行方法。

自然現象狀態：在該決策問題中可能發生之各自然現象。

效用：某一物品對某一個人或組織之價值，此價值乃由該人或組織之主觀來斷定。

賠付：在不同自然現象狀態下，採取不同的策略可以達到多項目標之不同程度。「賠付」乃為一個測量效用之方法，用來客觀地比較各策略之優劣。

期望值：設一變數各不同變量之出現為互斥事象，且各變量發生或然率之總和為一，則該變數之期望值為該變數各變量與其發生或然率乘積之和。期望值與算術平均數之意義甚為相似，僅期望值含有或然率之概念，成為平均可望出現之數。

1-2 效用理論

1 效用乃根據主觀境界而給與定義。同一物品對不同個人之效用未必相同。時至今天，仍沒有發展出一個可以衡量各人之效用的方法。

2 雖然，目標似乎是一個自然量度（例如，利潤），但是，一個決策者所採取之行動，根據達成目標之程度來量度，其效用量度可能和自然量度所指示的完全相反。例如，有人邀請你參加擲骰子賭博。倘若出現奇數，你贏得二百元；反之，你則須付出一百元。對你來說，這無疑是一個最佳的安排。然而，問題卻是：你是否無論何時均接受這樣的邀請？當然，有關款項對你絕對有利。使用效用理論觀念，該問題可重新整理如下：當我輸的時候，我所犧牲之效用是否與我贏的時候所賺取之效用相同呢？稍經思索，即可知

悉此乃根據你的經濟狀態而定。倘若你有充足的財源，一百元損失並不影響你的經濟狀況，你或會發覺：你贏時所得來之效用會比較你輸時所失去之效用大一些。在這樣情況下，只要你的對手同意的話，你會歡歡喜喜地參加每一場這般的賭博。但是，倘若你只有一百元的財產，而這些款項卻須用來支付你的親人之醫藥費。在此情況下，你可能會察覺所能損失之效用比較所能贏得之效用大得多。這是一般真實決策問題之縮影。參加或不參加賭博為二個可行之策略，贏或輸則為二個可能發生之自然現象狀態，而目標呢？對前述二種情況而言，目標為增加效用至最高額。此一例子說明金錢之數量並不必要與其效用相同。

3. 巴紐利假定個人之財富效用與其數量成反比。簡言之，一個人擁有越多金錢，每一額外一圓紙幣之效用越低。一圓紙幣之效用，在一個身無長物之窮人和一個家財百萬之富人而言，自然相去甚遠。量度金錢之效用，巴紐利提議以其數量之對數表示之。此一方法並不是現實之特佳代表；因其易於應用，並且反映出在所擁有財富中，每一額外一圓貨幣之效用逐漸遞減之事實，故可用來說明效用理論。例如，\$15,000 之效用為 4.17609 (15,000 之對數)。在此處，有一點觀念雖加以強調：即使一個目標之達成程度可以使用金錢來衡量，同一決策問題給與二個人可產生不同的解答，而這二個解答均是合情合理的。為什麼？因為此二個人之金錢效用均不相同。

1-3 期望值 設 $W_1, W_2, \dots, W_i$ 為各項可能產生之成果，而 $P_1, P_2, \dots, P_i$ 則為其出現之或然率，而各或然率之和為一，則使用該策略之期望值為：

$$E(W) = \sum_{n=1}^i P_n W_n$$

式中 $E(W)$ 代表該策略 W 的期望值， Σ 為總加符號。各個 W_n 之數值可以是正數或負數，此乃根據該決策問題而定。一般而言， W_n 為正數乃表示其為收益，反之，則表示損失。同一問題之期望值可由多個不同角度來求取，試觀下例：

1. 一個入口商正在等候海關通知其進口貨物所應該繳交的關稅，貨值之 15% 或 25%，試求其期望值。

解答 1： $W_1 = 0.15$ (關稅)

$W_2 = 0.25$ (關稅)

假定各成果之或然率相等，各 50 %

其期望值 = $0.5 \times 0.15 + 0.5 \times 0.25 = 0.20$

此方程式計算關稅之期望值，入口商可期望關稅為 20 %

解答 2： $W_1 = -0.15$ （可得利益之減少額）

$W_2 = -0.25$ （可得利益之減少額）

其期望值 = $0.5 \times (-0.15) + 0.5 \times (-0.25) = -0.20$

此方程式計算入口商之可得利益減少額的期望值

2 現有二個投資計劃，各須款 \$1,000，供你選擇。計劃 A 之報酬率為 4.5 %，計劃 B 的為 6 %。若在穩定情況下，你毫無疑問必投資計劃 B。之所以如此，乃因該計劃之每年報酬為六十元，而計劃 A 的只有四十五元。若有人知道你投資此二計劃均有不同的冒險程度，投資計劃 A 可得報酬之或然率為 90 %，而計劃 B 可得報酬之或然率為 60 %。簡言之，投資計劃 A 有 10 % 機會完全不獲得任何報酬，而計劃 B 卻有 40 % 機會。你應該怎樣抉擇？

$$E(A) = \$45 \times 0.90 + 0 \times 0.10 = \$40.50$$

$$E(B) = \$60 \times 0.60 + 0 \times 0.40 = \$36$$

投資計劃 A，每一千元其報酬期望值為 \$40.50

投資計劃 B，每一千元其報酬期望值為 \$36

A 之報酬期望值較 B 的大得多，故此，我們可以決議投資計劃 A。

讀者應該注意到，我們使用「可以決議」的字句而不使用「必須決議」的字句。我們所根據的推理方法是絕對符合邏輯原則的，並且提供充足的理由證明投資計劃 A 為一正當主張。然而，投資計劃 B 也並不是錯的。正如一般賭博情形一樣，某人卻用正確策略，可能依然輸得焦頭爛額，而另外一人則完全隨意下注，卻贏得滿載而歸。當然，有些人可能具備第六靈感。但是，我們當中那些沒有這份天賦本錢卻多數自以為是，那些忽視這些相關或然率終歸會自食其果。

3 一批貴重貨物價值一萬元出口運往外地，在運輸途中毀壞或遺失之或然率為 10 %。這批運貨之期望值為多少？

$$E = \$10000 \times 0.90 + 0 \times 0.10 = \$9,000$$

此一期望值可反映出一百批運貨只有九十批平安抵達之事實；換言之，付運者可期望每批運貨平均損失一千元。依據此一推理原則，付運者願意付出最多一千元作為每批運貨之保險費。用這個方法，他可免除自己負擔其貨運損失之風險，而將他所期望損失之款項付給保險公司。如果每批運貨須付保險費一千元，十批運貨則須付一萬元，運貨若有毀壞或遺失，他可得到足

額賠償。故此，他可不賺不貼。若每批運貨之保險費低於一千元，對付運者更爲有利。但是，由保險公司的觀念看來，每批運貨保險費一千元只能使其不賺不貼自不合算，因此之故，必須要求較高之保險費，例如，一千五百元，才爲上策。倘若付運者須付出保險費 \$1,500，其期望值爲一負數。換言之，每批運貨他均損失一些金錢。然而，在此一情況下，多數人們仍然購買保險來保障他們的利益。爲甚麼？他們的行動是否不合理？其答案是否定的。這些行動只能應用效用理論來解釋之。假設付運者共有資產一萬五千元（包括運貨之貨值一萬元，在該批運貨平安到達買主手中時即可收回）。

倘若不購買保險，付運者之效用期望值爲：

$$\begin{aligned} Eu &= U(15000) \times 0.90 + U(5000) \times 0.10 \\ &= 4.17609 \times 0.90 + 3.69897 \times 0.10 \\ &= 4.12838 \quad (\$13,439 \text{ 之效用}) \end{aligned}$$

若購買保險，其效用期望值爲：

$$\begin{aligned} Eu &= U(15000 - 1500) = U(13500) \\ &= 4.13033 \quad (\$13,500 \text{ 之效用}) \end{aligned}$$

付運者購買保險可得到較高之效用期望值，此爲其所採取行動的依據。從保險公司之立場看來，其接受保險之業務的行動乃是合情合理的。其所以如此，乃因該公司擁有如此多資產，而其總效用將會因承受保險業務而得以增加。假設該保險公司之資產爲十萬元，其效用爲 5（\$100000 之對數）。倘若承受保險，其效用期望值爲：

$$\begin{aligned} Eu &= U(100000 + 1500) \times 0.90 + U(100000 + 1500 - 10000) \\ &\quad \times 0.10 \\ &= U(101500) \times 0.90 + U(91500) \times 0.10 \\ &= 5.00647 \times 0.90 + 4.96142 \times 0.10 \\ &= 5.00196 \quad (\$100,454 \text{ 之效用}) \end{aligned}$$

在酌量各可行策略下之金錢效用的差，雙方均以理智來選擇所應採取的行動。那麼，這是否爲所有保險問題之解答呢？不，該類問題之解答乃根據付運者之資產而定。倘若其總資產爲一萬六千元，應用前述方程式可計算得，無論其購買保險與否，其效用期望值均相同。如果他的資產超過一萬六千元，不購買保險而自己負擔起所冒的風險反爲划算得多。如果少過一萬六千元，購買保險似乎是一較佳的策略；或者，付運者可以決定由一萬六千元資產起，他應自己負擔一切風險。若果如此，他必須了解對數並不是金錢遞減效用之良好代表。倘若能夠找出他的金錢效用之正確代表，可使用同一門徑

來斷定其決策的真正分水嶺，亦即保險與否問題之轉捩點。

我們使用對數作為金錢之效用衡量，其目的在說明一個重要觀念：我們應該重視效用，而不是金錢的數量。所討論之要點均在強調：即使目標可以一自然衡量方法來量度其成就程度，我們必須注意到自然衡量未必與決策者從該目標之成就程度所獲得之效用一致。所應採取行動乃由效用來決定，而自然衡量不能用來左右此一決策。對少量金錢而言，我們可以採用自然衡量來決策，而不必顧慮到這些金錢的效用。其所以如此，乃因決策問題牽連到金錢之變動少過總資產之3%，其效用之相當準確近似值可由金錢之數量表示之。而對牽連到大量金錢之決策問題，則必須嘗試斷定有關金錢之效用。

1-4 定序 給成果定序就是把這些成果順其效用次序排列，效用大者居先，效用小者居次。例如，一個主管可以把簽訂合約，繼續談判及罷工分別定序如下：1，2及3。這一次序並非是絕對的，此乃根據決策者之各個別成果的效用而定。例如，決策者可以把「繼續談判」定序第一，因他預測經濟情形之轉變將會加強其談判力量。在任何情況下，決策者應該依據他自己的目標來給與各成果定序，順著它們的效用大小來排列。倘若能夠給各成果定序，其數字次序可用作該成果之效用衡量——賠付。定序問題只能應用於一元空間。例如，我們不能給飛行中的飛機們定序。這般定序方法缺少應用算術來處理這些次序之能力，正如使用其他三個數字1, 9, 28來取代1, 2, 3，用來表示其優先權，亦無不可。

1-5 標準賭博法 此一方法用來制訂個人效用比例。其門徑為提供決策者一組選擇，他必須挑選其中一個。這些選擇均是一些特殊類型之選擇，現有三個成果， Q_1 （損失一百元）， Q_2 （獲得利潤六百元）及 Q_3 （獲得利潤一千元）。我們詢問該決策者，請他表示在下列二者之間他所挑選的選擇：選擇1，確實獲得 Q_2 ；選擇2，獲得 Q_3 之或然率為 P 及獲得 Q_1 之或然率為 $1 - P$ 。在「確實獲得利潤六百元」及「進行賭博來決定損失一百元或獲利一千元」二者之間，我們要求該主管通知我們他的抉擇。如果 P 之數值為1，他毫無疑問必選擇 Q_3 （選擇2）。反之，若 P 之數值為0，他亦必毫無疑問選取 Q_2 （選擇1）。逐漸遞減 P 之數值由1至0的過程中，主管對選擇2之喜愛必在某一點轉換過來。在 P 之某一數值時，主管對此二選擇將猶疑不決；該二選擇對他而言，均具備同一份量，故他對二者「漠不關心」，換言之，在此二者之間，選擇任何一個他皆贊成。

一般而言，我們隨意指定 100 給與最大效用之成果，和 0 給與最小效用之成果。此二數字並非硬性規定的，隨意指定任何二個數字亦無不可。其他成果之效用可使用標準賭博法來斷定。在分別指派效用 100 及 0 給與二成果後，使用標準賭博法來斷定其他成果之效用，其優點在那裏？此一方法可引導決策者之想像力循着同一軌道去指派相關效用給與其他成果。

應用例題：某公司指派效用 0 及 100 給與廿五萬元損失及十五萬元利潤，對於下列各項則漠不關心：

確實十萬元利潤或 80 %機會得到十五萬元利潤及 20 %機會損失廿五萬元。

確實五萬元利潤或 80 %機會得到十萬元利潤及 20 %機會損失廿五萬元。

解答：此一問題分別求取十萬元利潤及五萬元利潤之效用。此二成果之效用均是根據同一金錢效用比例求得來。

$$\begin{aligned} Eu(\$100,000) &= u(150000) \times 0.80 + u(-250000) \times 0.20 \\ &= 100 \times 0.80 + 0 \times 0.20 \\ &= 80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Eu(\$50,000) &= u(100000) \times 0.80 + u(-250000) \times 0.20 \\ &= 80 \times 0.80 + 0 \times 0.20 \\ &= 64 \end{aligned}$$

十萬元利潤及五萬元利潤之效用分別為 80 及 64。

1-6 現款等值函數 個人的現款等值函數顯示出，為某一含有賭博性質的契約，在各個不同或然率 p 中，所願意交換的最大現款確數。現有一契約如下：獲得 \$100 利潤之或然率為 p ，而損失 \$100 之或然率為 $1 - p$ 。假定有三個投資者，王先生、張太太及白小姐，分別被要求決定此一契約的現款等值，其結果有如下表所顯示：

願意交換此一契約之現款等值（下表數字為第一選擇）

賺得 \$100 之或然率， p	王先生	張太太	白小姐
1.0	\$ 100	\$ 100	\$ 100
.8	80	60	30
.6	50	20	0
.4	0	- 20	- 40
.2	- 50	- 60	- 70
0	- 100	- 100	- 100

王先生是一個「冒險前進者」，寧可由賭博來決定能否多得 \$ 100，而不願意接受該契約之期望值。白小姐則為一「冒險逃避者」，她寧可付出 \$ 40，而不願意接受該契約，40 %機會獲得一百元利潤及60 %機會損失一百元（此契約之期望值為一 \$ 20）。張太太寧可損失 \$ 20，而不接受該契約（ $p = .4$ ，其期望值亦為一 \$ 20）。她擁有一線型現款等值函數，因而顯示出在契約及其期望值二者之間，她的不關心態度。她是一個「冒險中立者」。所有冒險中立者均擁有同一線型現款等值函數，而各冒險前進者或冒險逃避者之現款等值函數則因人而異。

1-7 效用函數 在決策問題中，牽連到 n 個不同衡量單元的成果時，各成果在決策者眼中有著不同的分量（重要性比重） W_i 。要衡量多個可行方案，並選取其最佳者，我們必須首先制訂一個效用函數，然後應用此一函數，分別計算各可行方案的效用，效用最大者即為最佳方案。假定在第 j 個可行方案中，各成果的衡量分別為 O_{ij} ，則其效用可從下述效用函數求得：

$$U(S_j) = \prod_{i=1}^n O_{ij}^{w_i} = (O_{1j})^{w_1} (O_{2j})^{w_2} \dots (O_{nj})^{w_n}$$

S_j 代表第 j 個可行方案， π 表示乘積。現在，讓我們以一個例子來說明之：某食品公司現有二種設計不同的容器供其選擇採用，以便包裝其生產的冷藏食品供應市場。該公司認許製造成本、重量及外表為其決策取舍的標準。有關資料列表如下：

成 果	重 要性 W_i	容器 C 1	容器 C 2
製造成本	5	\$ 4	\$ 5
重 量	4	10 磅	11 磅
外 表	3	8	7

$$U(C1) = (4^5) (10^4) (8^3) = 5,242,880,000$$

$$U(C2) = (5^5) (11^4) (7^3) = 16,732,611,875$$

容器 C 2 的效用為 $U(C2)$ ，容器 C 1 的效用為 $U(C1)$ ，前者較後者大一些。根據此一效用函數，似乎應該採用容器 C 2，才不失為明智之舉。但是，事實並非如此簡單；前述效用函數並未能兼顧到決策者對不同成果的不同要求。在此一例子中，該公司主管當局要求製造成本及重量最小，但在此同時，期望外表越美觀越佳。此二容器由審美專家根據 1-10 比例分別給與

外表評分，分數越大越佳。要反應此數項要求，只須略為增訂前途效用函數即可應付此一新形勢。若要求某項成果的衡量最小時，只須把其重要性比重 W_i 變成負值即可；反之，要求某項成果的衡量最大時，則無須變動其原訂的重要性比重。仍以同一例子來說明之，要反應主管當局的要求，該二容器的效用修正如下：

$$U(C1) = (4^{-5}) (10^{-4}) (8^3) = 5 \times 10^{-5}$$

$$U(C2) = (5^{-5}) (11^{-4}) (7^3) = 7.031 \times 10^{-6}$$

$C1$ 的效用較 $C2$ 的大一些，決策者應該選用容器 $C1$ ，此一決策才為明智之舉。

二、模範例題

1 新生公司面對一個決策問題：即時更新設備或擱置此一行動。每一策略在明年中可得到一個不同的賠付。此一賠付乃根據該公司產品之銷路而定。賠付矩陣，以千元為單位，及各級銷路之或然率有如下表：

	銷 路		
	良 好	適 度	惡 劣
或然率	0.25	0.45	0.30
即時更新設備	100	80	- 10
擱置更新行動	80	60	10

假設該公司的運用資本有限，分別指派效用 0 給與一萬元損失，100 給與十萬元利益。而對下列各項則漠不關心：

確實八萬元利益或 90 % 機會得到十萬元利益和 10 % 機會損失一萬元。

確實六萬元利益或 75 % 機會得到十萬元利益和 25 % 機會損失一萬元。

確實一萬元利益或 25 % 機會得到十萬元利益和 75 % 機會損失一萬元。

(A) 制訂一個效用矩陣。

(B) 該公司應選擇那一策略方為上策？

解答：

效用期望值為 Eu ，效用為 u

$$Eu(80,000) = 0.9 \times u(100,000) + 0.1 \times u(-10,000)$$

$$= 0.9 \times 100 + 0.1 \times 0$$

$$= 90$$

$$Eu(60,000) = 0.75 \times u(100,000) + 0.25 \times u(-10,000)$$

$$= 0.75 \times 100 = 75$$

$$Eu(10,000) = 0.25 \times u(100,000) + 0.75 \times u(-10,000)$$

$$= 0.25 \times 100 = 25$$

效用矩陣爲：

	銷 路		
	良 好	適 度	惡 劣
或然率	.25	.45	.30
即時更新設備	100	90	0
擱置更新行動	90	75	25

策略 1（即時更新設備）之效用期望值爲：

$$.25 \times 100 + .45 \times 90 + .30 \times 0 = 65.5$$

策略 2（擱置更新行動）之效用期望值爲：

$$.25 \times 90 + .45 \times 75 + .30 \times 25 = 63.8$$

根據此二策略之效用期望值的高低，新生公司應該選擇策略 1：即時更新設備。

2 現代時裝公司設計出二套新女子夏裝，稱之爲甲和乙。該公司可以製造其中一套，二套或完全不自行製造。如果不自行製造時，可轉讓設計給另一公司。該公司期望可賺得利益有如下述，以千元爲單位：

策 略	只 有 甲 銷路良好	只 有 乙 銷路良好	甲和乙均 銷路良好	甲和乙均 銷路惡劣
只生產甲	100	- 100	100	- 100
只生產乙	- 100	100	100	- 100
生產甲和乙	- 50	- 50	150	- 250
完全不自製	30	30	30	30

該公司主管深信甲有 60 % 機會和乙有 40 % 機會達到良好銷路，而一套夏裝之銷路好壞並不影響其他的一套之銷路。

假定該公司指派效用 0, 45 及 100 給與廿五萬元損失，五萬元損失及十五萬元利益。對於下列各項則漠不關心：

確實十萬元利益或 80 % 機會得到十五萬元利益及 20 % 機會得到廿