萬有文庫
第二集七百種
王雲五主編

科學方法論

(六)

魏斯特惠著
徐韋曼譯

商務印書館發行

科學方法論

(六)

魏斯特惠著
徐韋曼譯

漢譯世界名著

王雲五主編

萬有文庫

第二集七百種

科學方法論

六册

Scientific Method: Its Philosophical Basis and Its Modes of Application

中華民國二十四年九月初版

原著者　F. W. Westaway

譯述者　徐韋曼

發行人　王雲五　上海河南路

印刷所　商務印書館　上海河南路

發行所　商務印書館　上海及各埠

五八二上

嚴

第四十八章　教室中解決數學問題

「研究數學過於精深，似乎可以摧殘普通及有用之思想方法，——卽用歸納推想。數學之眞理，可謂顯而易見，而道德之情感，則難於明顯。」

「數學議論，爲最不切於人生實用之學。用符號以解決一問題，所得之結果，非眞卽假。而在其他方面，眞假頗難區分，僅有個人之良知，可以左右之，而是非亦隨人之意志爲轉移。」

「自認爲數學家者，常被認爲深沈之思想家，而思想家之中，當然尚有最無知識之一流，對於須要深思熟慮之事務，絕無能力，蓋無法立卽應用符號以成公式而解決之也；應用符號以解決問題，實爲例行程序之結果，而非推想之結果。」

以上數節爲漢默爾登爵士（Sir William Hamilton）之 Cloud of Witnesses 中三人之意見，彼等似欲證明數學爲完全無益之研究。漢氏本人，亦以爲數學爲知識階級所不必注意

者，此問題「過於容易，習之不足以淘融天性。」漢氏對於數學，幾無所知，今作此輕率之討論，未免可笑，無怪米勒氏不費吹灰之力，而將此著名蘇格蘭玄學家之議論推翻也。

卽至今日，藐視數學之研究及算學知識之用處者，仍不乏人。舊時之存見，謂數學不能實際估量各種互相矛盾之蓋然性，是以對於應付日常實用事件之機敏，不能有所幫助。現時輕視數學之理由或非由此；或以爲普通解決數學問題時其所應用之綜合論證，係逐步循例進行，似甚單簡，而每步均直接論理的隨從前一步而行，故其程序似乎完全無應用智力之需要也。

今此種綜合或演繹方法，乃數學家用以表示其工作之結果者。如此之論證，少有或絕不能宣露彼所用以發見其所得之結果之方法之祕密。實則此種問題，均用分析法而非綜合法；而其推論均爲歸納而非演繹。演繹推理，雖實似爲闡明各種數學之主要方法，然若以數學工作完全爲演繹性質，則爲錯誤。數學家之工作，大部分爲歸納，故其重要方面，與科學家之工作有密切之關係。

假定一教師令其學生解決一特別數學問題，而全班均不能解決，於是彼乃自作之。學生當然能明瞭其逐步之解決方法，而深信其結果之正確。但學生所得者幾許？彼等對於此項工作，實無些

少之貢獻，而對解決此問題之方法，仍未明瞭。在教室中用此法，非但為非必要，而且為教學之大錯。學生所需要者，為一種暗示，以企發與問題相關之方法，而令其各自自動解決之。教授數學之藝術，根本祇可應用企發之方法，所予之暗示，祇須足以提醒其作法之大概，使其自動設計以攻問題之中心困難，而不可告之過多也。如告之過多，心理上完全錯誤。

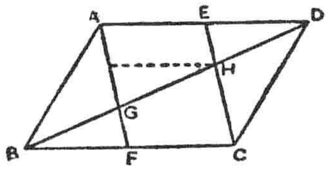
欲解決一問題，其正當步驟，當然以分析法為主；若以為欲使此種之分析奏效，須先將各問題及定理之解決，予學生以明瞭及最後之方向，以使其得順利進行，而後可得有效之結果，則實為錯誤。按照普通之教科書，吾人所為者，只須假定定理之眞確，及問題之解決，然後由此演繹其推論，以之與業經成立之結果相比較。若可由此推論演繹而與已成立之結果相符合；則由此推論，吾人或可得問題之解決，及定理之綜合論證。但此種規則，對於普通應用，絕對過於渺茫，因無法作成一通則，可以用之以使吾人之假定及已得之結果相符合也。

(1)假定將下述之著名幾何習題使幼童作之：——

平行四邊形ABCD之對邊AD，BC，在E及F兩處被平分；將AF及EC連接，在G及H

兩處切ＢＤ線。證明 BG, GH, HD 為相等。

今可先假定ＢＧ，ＧＨ及ＨＤ為相等。首先之問題，乃如何證明兩線或三線為相等？其答案當然為用全等三角形之方法。由圖之對稱，可以疑及ＢＧ及ＨＤ或可證其為相等，因ＢＧＦ及ＥＨＤ兩三角形，似為全等三角形。較敏捷之兒童，立覺由Ｇ或Ｈ畫一平行線，亦可將ＧＨ用同一方法解決之。較遲鈍之兒童，對於此點，或須略加暗示，蓋此點為全題困難之所在也。此三個三角形之全等情形，似可看淸。其餘之工作，教師應令學生自為之。多餘之幫助以完成此分析，應非必要；而助其進行以後之演繹論證，實為不智。教師之工作，應限於二三問題；彼之發問之方式及答復之方法，實足使人測驗其技能。凡學生可以自行發見之事，教師切不可告之。



第二十一圖

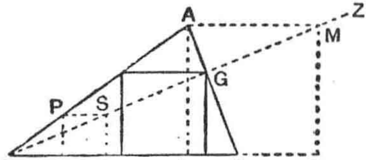
（2）假定問題為：將某一線分為中末比——若無任何暗示，普通之學生，或無法開始其工作；若將近代幾何教科書中之公式以示之，彼仍不能明瞭此法之所由來。但若告彼用代數法以算此

問題，如可能時，再用幾何以作參考，則彼立知此法完全須尋覓畫一$\sqrt{5}$單位長線之方法。若彼已知用圖解法以求方根，則無須任何幫助，即可自行計算此問題。再進一步，彼即可得教科書中公式之由來。故教師若先將此種公式為之解釋，則可表示其為無教學之技能。

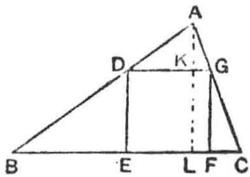
（3）第三例為：在一三角形內繪一內接四方形。

考試幾何時，學生當然喜用附於命題之附則，因彼知或須應用關於此命題之普通原則，有此附則，乃有關鍵可尋。

此問題或為附屬於同等多角形命題之中，尤其在一多角形內內接他一多角形；較為敏捷之兒童，立見此為直接之應用，彼可立用綜合法以進行之。由此命題，彼能任意畫一四方形，使其底與三角形之底相符合，而使一角與三角之任一邊相接，例如四方形PQRS或ALNM（AL邊適與三角形之高度相當。）連接BS而沿長至Z，或連接B



第二十二圖



第二十三圖

M；然後或使四方形PQRS擴大，S點沿BZ線而行；或使四方形ALNM縮小，使M點沿ZB線而行；如此可定AC邊上之G點，而餘者亦可求得（第二十二圖。）

但若兒童不知附則普通原則之應用，則必須用分析法，或且試驗數次。除非此兒童已習過相仿之三角形，及比例剖分，則無法得其解決方法。彼必自問如何定AC邊之G點（或AB邊之D點）（第二十三圖。）彼若思及相同三角形或可得其原因，則可用左列之公式以求之：——

$$\frac{AG}{GC}=\frac{AK}{GF}=\frac{AK}{DG}=\frac{AL}{BC}$$

卽用高與底之比例，以定AC邊之G點（AC邊之D點。）此後彼可用演繹法以作其綜合之工作。

（4）用分析法以臨一問題，雖可應用於各種數學，然按照其特別情形，其方法亦不相同。例如排列代數公式以解決問題，大半須賴所採用之方法，以使學生明瞭如何可將普通原則應用於特別情形。非但須教學生用有系統之方法以記載其材料，而且須教其尋求造成公式之更迭條件。例

如將下列問題，列成方程式：若每先令少買雞蛋二枚，則每打雞蛋之價增加一辨士，問每打雞蛋之原價若干？對於較易之習題研究有素之學生，立可解決之，若對於普通原則不甚明瞭者，則略覺困難。

成績較優之學生，可將各問題分析如下：——

(1)考察(a)每打雞蛋之價值，及(b)每先令可購之雞蛋數。

(2)尋求此二事實之關係。(聰敏之兒童，立可見其關係，遲鈍者須逐步推算，以得每蛋之價值。)

(3)列成公式以觀之，

(i)雞蛋數與一先令之關係，或

(ii)雞蛋每打之價值，或

(iii)每一雞蛋之價值

彼於是排列其材料，及推得之關係成表如下：

第一法

	第一條件	更迭條件
一雞蛋每打價值	x 辨士	x＋1 辨士
∴每一雞蛋之價值	$\frac{x}{12}$ 辨士	$\frac{x+1}{12}$ 辨士
∴每先令可購之蛋數	$\frac{144}{x}$	$\frac{144}{x+1}$
是以公式 $\frac{144}{x}=\frac{144}{x+1}+2$		

$$\therefore x=8$$

第二法

	第一條件	更迭條件
每先令可購之蛋數	x	x－2
∴每蛋之價值	$\frac{12}{x}$ 辨士	$\frac{12}{x-2}$ 辨士

∴每打雞蛋之價值	$\frac{144}{x}$ 辨士	$\frac{144}{x-2}$ 辨士
故公式 $\frac{144}{x}=\frac{144}{x-2}-1$		

$\therefore x=18$

第三法

	第一條件	更迭條件
每蛋之價值	x 辨士	y 辨士
∴雞蛋每打之價值	12x 辨士	12y 辨士
∴每先令可購之蛋數	$\frac{12}{x}$	$\frac{12}{y}$
公式 $12x=12y-1$；及 $\frac{12}{x}=\frac{12}{y}+2$		

$\therefore x=\frac{2}{3}$

根據同一之各原則，用其他方法以排列公式。排列表格之方法實爲機械式。教師方面所應闡明者，乃由雞蛋每打之價值，尋求每先令可購之蛋數。略用心算，或即可使此點明瞭。

（5）如欲滿意解決各種問題，當然須視以前所作相仿之實習之多寡。例如下列之問題，除非以前曾由較易之例中，習過用表針起點及終點以排列計算角度之公式，決無法入手。——假定現爲十點及十一點之間，六分鐘後，表之長針之地位，適在三分鐘前短針所在處之對面，求時刻——此題之眞正困難，或在繪一精密滿意之圖，以表示所包含之角度數目，短針現在，三分鐘以前，十點鐘時所占之約略地位；此外或須告以長針之地位必在十點一刻附近。是以可將圖繪在黑板上，然後再將測角法，略加討論。此外可不必有任何之幫助，至多再點醒學生，謂此種公式之排列，應用兩種方法以解集合角。兒童應注意於普通原則之特殊問題，而自應用其原則。

（6）又一問題爲：船桅之頂，高於海面八十八尺，燈塔之燈，高一百三十二尺，今自桅頂適可見燈，問其距離若干。因此爲歐克立特卷 iii 36 之簡單直接應用；教師之工作，應僅限於闡明桅與燈塔實爲一大圓圈中半徑之延長。如學生再需其他說明者，則知其對於歐克立特 iii 36 之意旨不

甚明瞭也。

(7)或一更難之問題：——圓柱形之器皿，滿裝以水，若依其軸速旋，問須用如何速度，方能將水之一半潑出？——欲解決此問題，須先諳習下列諸原則無疑。

(1)若一圓柱形之器，繞軸旋轉，則液體所成之凹處爲拋物線體。

(2)欲使拋物線體表面上之任何水點，與地面成相對之靜止狀態，則水點在一平面旋轉之速度，等於一物體在此點之橫坐標相等之空間墮落之速度。

(3)圓柱形中內接之拋物線體之容量，等於圓柱形之一半(內接拋物線體之頂，當然觸及圓柱形之底。)

知此數原則，吾人應知：——

(1)所撥出之水量，常等於所成之拋物線體。

(2)圓柱形旋轉速力愈大，則所潑出之水愈多，即頂尖之地位愈低。

(3)圓柱形須旋轉至一種速度，使拋物線體之頂適觸及圓柱體之底。

當然之結果爲速度必等於一物體在一與圓柱體之高度相等之空間自由墮落之速度。

此題係用以練習關於離心力第二原則之計算，僅有一學生成功；其未熟諳第二原則者，無法解決，及待重行演習第二原則後，能算之人數亦增加。教師對於學生之態度，爲最有興趣之事，彼須注意以視彼等是否對於各種原則均已諳習，而絕不助其應用此種原則也。

（8）作者曾參觀一法國學校，見其算學工作，殊足令人驚歎。教師所予之助力極少，而學生竟能表現其解決算學問題之能力，使人異常滿意。當時所習者爲立體幾何學，非但熟悉歐克立特第十一卷之內容，而且對正射影及交截形之練習，亦有相當知識。主任教師要求作者，出一問題，當即以卡落爾（Lewis Carroll）疑題第六十三問與之：——

設有不在同一平面之兩平方面，其中心同在一直線上，一平方面之邊，適與他一平方之對角線相平行，兩者之距離如此，若將鄰近之頂尖相聯，可成八個等邊三角形，求此立體所含之容量。

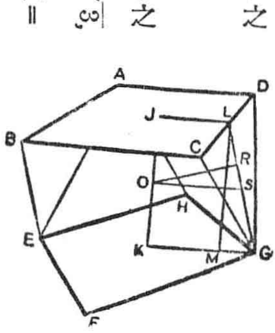
僅有一生能勉強畫成一圖，於是令其在黑板上畫之。三分鐘後，各生均無進步；於是教師行至黑板，畫JK線，再問一二問答之後，一部分學生已能說明此立體爲一對稱體，而以JK爲軸。然而

仍不能十分明瞭；最後，教師又謂JK之中點O，或可用爲解決此問題之起點。於是有學生三人，立見有八個相同之錐形體，均有等邊三角形爲其底，而均以O爲頂尖；顯示此點之後，不久又發見兩錐形體，以原有之兩平方爲底，而亦以O爲頂尖。

至是全班均知此題之解決方法，爲求前一種錐形體之一之容量，及後一種錐體之一之容量。

彼等決定先求ABCD·O之容量，教師再告之，謂平方形之每邊應作爲兩單位，於是彼等由LMG三角之LM（$LG=\sqrt{3}$，$MG=\sqrt{2}-1$，故 $LM=2^{\frac{3}{4}}$）立卽求得JK之長度。今 $JK=2^{\frac{3}{4}}$，故 $JO=\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}$，故ABCD·O之容量 $=\frac{4}{3\cdot 2^{\frac{1}{4}}}$。

然後再算錐形體CDG·O。錐底CDG之面積甚爲顯明，但從頂至底之垂直距離OR，使之略覺困難，最後兩生提議用相同之便利辦法，畫一OS以與KG相平行。是以ORS及LMG兩



第二十四圖

三角相同，因OS爲已知數（爲JL及KG之和之半數）OR可以求得，而$=\frac{\sqrt{2}+1}{2^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{3}}$。故錐形CDG·O之容量$=\frac{\sqrt{2}+1}{2^{\frac{1}{4}}\cdot 3}$。全立體之容量因之可以計算，而等於$\frac{8\cdot 2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}+1)}{3}$

全班二十三人，計十五人之答案完全準確。時間約自十四至二十一分鐘。除上述者外，並無其他之幫助。最堪注意者，即彼等所計算之方法，較之卡落爾更爲簡潔，然所有關鍵固爲教師所供給者也。在黑板上畫一大圖，再加以影線，更可使之明瞭。

簡言之，應用於解決數學問題之科學方法，實爲一發見方法，歸納方法，及分析方法也。學生應知問題之內容，及其所須經之程序。其方法非徒學生取被動之態度，以隨從教師之逐步指導，教師之工作，僅可限於暗示，及詢問一二問題，而不可直接儘量教授之，同時並教學生應用分析方法以處決問題，除非學生之能力有所不及也。