学科精英大视野系列丛书

精英数学

八年级　　黄东坡◎著

大视野

◎历史钩沉　文化积淀
◎问题览胜　思维锤炼
◎人文关怀　审美引领

湖北长江出版集团
湖北人民出版社

学科精英大视野系列丛书

精英数学

八年级

黄东坡◎著

大视野

湖北长江出版集团
湖北人民出版社

鄂新登字 01 号

图书在版编目(CIP)数据

精英数学大视野·八年级/黄东坡著.
武汉:湖北人民出版社,2011.5

ISBN 978-7-216-06660-0

Ⅰ.精…
Ⅱ.黄…
Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 237481 号

精英数学大视野
八年级

黄东坡 著

出版发行:湖北长江出版集团
湖北人民出版社

地址:武汉市雄楚大街 268 号
邮编:430070

印刷:荆州市翔羚印刷有限公司
经销:湖北省新华书店
开本:880 毫米×1230 毫米 1/16
印张:16
字数:449 千字
定价:25.00 元
版次:2011 年 5 月第 1 版
印次:2011 年 7 月第 2 次印刷
印数:20 001-30 000
书号:ISBN 978-7-216-06660-0

本社网址:http://www.hbpp.com.cn

前言

俱怀逸兴壮思飞　欲上青天揽明月
——文化视野下的精英数学

一

拿破仑曾说:“百分之二十的法国精英是法兰西民族前进的火车头。”

美国国家研究委员会发表的《人人关心数学教育未来》一书中强调:“国与国之间的竞争是高新技术的竞争,而高新技术竞争的背后是具有创造力的拔尖人才的竞争,很少有人知道,高新技术的本质是数学化的技术。”

本书为有志于升入重点中学的学生而著,为未来学科带头人、各行业领军人而作。追求在广阔的文化背景下,用思想方法武装头脑,用历史名题开启心智,用问题解决锤炼思维,用人文精神滋养心灵,用审美视角引领鉴赏。旨在打造未来精英的核心能力构成:专业素养、理性思维、人文情怀、审美眼光。

二

本书展现了隽永的图景,或数学大师的风采展示,或数学成果的呈现,或数学名著的介绍,或数学重大事件的再现,把抽象的数学化为视觉化的形象,通过图示形象地渗透数学思想方法精神,直观地反映数学与自然、数学与现实、数学与其他学科的联系。在阅读本书过程中,重温厚重而曲折的数学历史,领略数学的力量、神韵、美丽。

本书收录了历史上经典数学名题、趣题,或来自民间传说,或文化名流编撰,或数学大师的研究成果,它们是数学大花园中的奇葩,因内涵丰富、匠心独具而流传千古。在思考这些名题、趣题过程中,从惊讶到思考而开启心智,品鉴经典名题的醇香韵味。

本书汇集了近年国内外中考、竞赛的优秀试题,或引而不发的点拨,或深入浅出的分析,或刨根究底的探索,或开放思维的发散,或言简意赅的总结,或直抵心灵的感悟。在解决这些问题的过程中,感受解题之道、思维之美,体会由一筹莫展、冥思苦想到茅塞顿开、悠然心会的巨大乐趣。

前言

三

潮平两岸阔，风正一帆悬。

走进《大视野》，身临数学文化场景：既有情境，又有历史；既有方法，又有思想；既有真知，又有顿悟；既有趣味，又有哲思。蕴万壑于胸，纳百川于怀。

走进《大视野》，收获的是技巧与方法，激活的是质疑与想象，提升的是意识与美感，生成的是智慧与能力。高远而蔚蓝，广袤而深远。

愿你早日成为未来科技英才、文化精英。

黄东坡

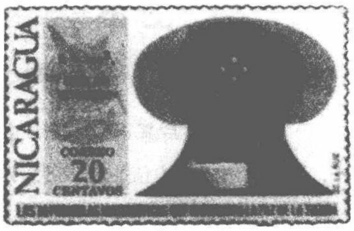
二〇一一年四月于武汉

目录
CONTENTS

知识技能篇

目录

CONTENTS



1905 年，当时在瑞士专利局担任普通职员的一位 26 岁的青年得到了一个关系式，这就是世界上最有名的公式 $E=mc^2$，该公式简单而意义深远，揭示了一个令人难以置信的事实："一块普通石头，其中竟然蕴藏着足以毁灭一座城市的巨大能量"，这位青年就是阿尔伯特·爱因斯坦.

第 1 讲　整式的乘除

知能概述

幂的运算性质是整式乘除的基础，灵活运用幂的运算性质，能在更高层次上掌握和理解相关代数变形的实质.

多项式除以多项式是整式除法的延拓与发展. 一个一元多项式 $f(x)$ 除以另一个一元多项式 $g(x)$ 时，总存在一个商式 $q(x)$ 与一个余式 $r(x)$，使得 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$ 成立，其中 $r(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数. 特别地，当 $r(x)=0$ 时，称 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除.

问题解决

例 1　(1) 已知 $x^2+x=1$，那么 $x^4+2x^3-x^2-2x+2005=$________.

（"华罗庚金杯"少年数学邀请赛试题）

(2) 若 n 为不等式 $n^{200}>6^{300}$ 的解，则 n 的最小正整数的值为________.

（"华罗庚杯"香港中学竞赛题）

解题思路　对于(1)，恰当地运用条件，把高次项用低次多项式表示，如 $x^2=1-x$，$x^3=x\cdot x^2=x(1-x)=x-x^2=x-(1-x)=2x-1$ 等；对于(2)，从幂的乘方逆用入手.

广角镜

在数学的天地里，重要的不是我们知道什么，而是我们怎么知道什么的.

——毕达哥拉斯

柳维尔公式

18 世纪法国数学家柳维尔在研究整数分解问题时发现一个有趣的现象：

若自然数 a 有因子 $p_1, p_2, \cdots, p_n$（包括 1 和它自身），而这些因子自身的因子个数分别为 $r_1, r_2, \cdots r_n$（包括 1 和它本身），这时有：$r_1^3+r_2^3+\cdots+r_n^3=(r_1+r_2+\cdots+r_n)^2$

请你验证一下，这曾当作数论中的珍奇之一而写入《数学中的智巧》一书中.

例 2 已知 $25^x=2000$，$80^y=2000$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 等于（　　）.

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

解题思路 因 x,y 为指数，故目前无法求出 x、y 的值，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$，只需求出 $x+y$、xy 的值或它们的关系，自然想到幂的运算性质.

例 3 已知 $(3x-1)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$.
求：(1) $a_5-a_4+a_3-a_2+a_1-a_0$ 的值；
(2) $|a_5|+|a_4|+|a_3|+|a_2|+|a_1|$ 的值.

（北京市竞赛题）

解题思路 通过展开式去求出每一项系数，计算繁难. 事实上，条件等式在 x 的允许值范围内取任意值代入计算，等式都成立，注意 ±1 的幂的特征，用赋值法求解.

例 4 设 a、b、c、d 都是自然数，且 $a^5=b^4$，$c^3=d^2$，$a-c=17$，求 $d-b$ 的值.

（上海市普陀区竞赛题）

解题思路 设 $a^5=b^4=m^{20}$，$c^3=d^2=n^6$，这样 a、b 可用 m 的式子表示，c、d 可用 n 的式子表示，通过减少字母的个数，降低问题的难度.

例 5 如果整数 x,y,z 满足 $\left(\frac{15}{8}\right)^x\cdot\left(\frac{16}{9}\right)^y\cdot\left(\frac{27}{10}\right)^z=16$，求代数式 $\frac{2x+y}{z-y}$ 的值.

（美国犹他州竞赛题）

解题思路 由各分数的分子、分母可知，等式左边可以化成底数 2，3，5 的幂的积的形式，由 $a^m=a^n$ 得 $m=n$，建立关于 x,y,z 的方程组.

广角镜

与幂相关的计算、化简求值、比较大小，既要用到幂的性质，又要常用如下策略：

(1) 把不同底数的幂化成同底数的幂；

(2) 把不同指数的幂化为同指数的幂；

(3) 把已知幂化成特殊底数的幂；

(4) 作差、放缩比较幂的大小.

例6 已知多项式 $2x^4-3x^3+ax^2+7x+b$ 能被 x^2+x-2 整除，求$\frac{a}{b}$的值.

（北京市竞赛题）

解法1 列竖式演算，根据整除的意义解

$$
\begin{array}{r|llll}
 & & 2x^2- & & 5x+(a+9) \\
\hline
x^2+x-2 & 2x^4-3x^3+ & ax^2+ & & 7x+b \\
 & 2x^4+2x^3- & 4x^2 & & \\
\cline{2-5}
 & -5x^3+(a+4)x^2+ & & & 7x \\
 & -5x^3- & 5x^2+ & & 10x \\
\cline{2-5}
 & & (a+9)x^2- & & 3x+b \\
 & & (a+9)x^2+ & & (a+9)x-2(a+9) \\
\cline{2-5}
 & & & & (-12-a)x+b+2(a+9)
\end{array}
$$

因为 $2x^4-3x^3+ax^2+7x+b$ 能被 x^2+x-2 整除，

所以$\begin{cases}-12-a=0, \\ b+2(a+9)=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}a=-12, \\ b=6.\end{cases}$

所以$\frac{a}{b}=\frac{-12}{6}=-2.$

解法2 利用待定系数法解

因为 $2x^4-3x^3+ax^2+7x+b$ 能被 x^2+x-2 整除，可设

$2x^4-3x^3+ax^2+7x+b=(x^2+x-2)(2x^2+mx+n)$，

化简整理，

得 $2x^4-3x^3+ax^2+7x+b=2x^4+(m+2)x^3+(m+n-4)x^2+(n-2m)x-2n$，

比较对应项系数，得$\begin{cases}m+2=-3 \\ m+n-4=a \\ n-2m=7 \\ -2n=b,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}m=-5 \\ n=-3 \\ a=-12 \\ b=6.\end{cases}$

所以 $\frac{a}{b}=\frac{-12}{6}=-2.$

解法3 利用因式定理解

因 $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$，而 $f(x)=2x^4-3x^3+ax^2+7x+b$ 能被 x^2+x-2 整除，故 $f(x)$ 也能分别被 $(x+2)$、$(x-1)$ 整除，

则 $f(-2)=0, f(1)=0.$

即$\begin{cases}2\times(-2)^4-3\times(-2)^3+a\times(-2)^2+7\times(-2)+b=0 \\ 2\times1^4-3\times1^3+a\times1^2+7\times1+b=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-12 \\ b=6,\end{cases}$ 所以$\frac{a}{b}=\frac{-12}{6}=-2.$

广角镜

多项式除以多项式，当除式是一次式时，有如下的结论：

(1)余数定理

多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)$ 所得的余数等于 $f(a)$.

(2)因式定理

若多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)$ 所得的余数为 $f(a)=0$，则 $f(x)$ 含有因式 $(x-a)$，反之亦然.

多项式除以多项式，方法与多位数除以多位数的演算方法相似，基本步骤是：

(1)将被除式和除式按照某字母的降幂排列，如有缺项，要留空位；

(2)确定商式，竖式演算，同类项上下对齐；

(3)演算到余式为零或余式的次数小于除式的次数为止.

请你一试：

$(6x^4-19x^2+17x-5)\div(2x^2+2x-5)=?$

例 7 设 a、b、x、y 满足 $ax+by=3$，$ax^2+by^2=7$，$ax^3+by^3=16$，$ax^4+by^4=42$，求 ax^5+by^5 的值.

（美国中学生数学竞赛试题）

分析与解 观察已知多项式，发现它们有规律，但将 $ax+by=3$ 两边平方则出现 $a^2x^2+b^2y^2$，较难与 ax^2+by^2 比较，故考虑将低次式乘以 $(x+y)$ 得到高次式，与条件比较.

由 $ax^2+by^2=7$，得 $(ax^2+by^2)(x+y)=7(x+y)$，

即 $ax^3+ax^2y+bxy^2+by^3=7(x+y)$，$(ax^3+by^3)+xy(ax+by)=7(x+y)$.

所以 $16+3xy=7(x+y)$. ①

由 $ax^3+by^3=16$，得 $(ax^3+by^3)(x+y)=16(x+y)$，

即 $ax^4+ax^3y+bxy^3+by^4=16(x+y)$，$(ax^4+by^4)+xy(ax^2+by^2)=16(x+y)$.

所以 $42+7xy=16(x+y)$. ②

由①、②，可得 $x+y=-14$，$xy=-38$.

由 $ax^4+by^4=42$，得 $(ax^4+by^4)(x+y)=42\times(-14)$，

$(ax^5+by^5)+xy(ax^3+by^3)=-588$，$(ax^5+by^5)+16\times(-38)=-588$.

故 $ax^5+by^5=20$.

广角镜

待定系数法是数学中的一种重要方法，在有关整式的恒等变形的解题中经常用到，运用此方法解题的一般步骤是：

(1)根据多项式之间的次数关系，设出一个恒等式，其中含有几个待定系数；

(2)比较对应项的系数，列出方程组；

(3)解方程组，求出待定系数的值.

刻意练习

1. (1) 若 $\dfrac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5}\times\dfrac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5}=2^n$，则 $n=$________.

（“宗沪杯”数学竞赛题）

(2) $\left(\dfrac{7}{3}\right)^{1998}\times\dfrac{3^{2000}+15^{2000}}{7^{2000}+35^{2000}}=$________.

（“希望杯”邀请赛试题）

2. 满足 $(x-1)^{200}>3^{300}$ 的 x 的最小正整数为________.

（武汉市竞赛题）

3. 已知 $(x+2)^5=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$，那么 $16b+4d+f=$______.

（“五羊杯”竞赛题）

4. (1) 比较大小：15^{16} ________ 33^{13}.

（“希望杯”竞赛题）

(2) 比较大小：$(-2)^{234}$ ________ 5^{100}.

（“华罗庚金杯”少年数学邀请赛试题）

5. 方程 $(3x+2)^{x+5}=1$ 的解为________.

（“华罗庚杯”香港中学竞赛题）

美国教育家杰夫·科尔文在《哪来的天才：练习中的平凡与伟大》一书中指出：非凡的成就不取决于天赋，而是坚持不懈的刻意练习.

刻意练习不同于普通练习，普通练习是重复性和无意识的，而刻意练习需要打破习惯，需要更大的专注力，并在名师的指点下，使技能、方法、思想、境界迈向更高的层次.

广角镜

6. 已知 x^2+x-6 是多项式 $2x^4+x^3-ax^2+bx+a+b-1$ 的因式，则 $a=$________，$b=$________.

（江苏省竞赛题）

7. 已知 $a=2^{55}$，$b=3^{44}$，$c=5^{33}$，$d=6^{22}$，那么 a、b、c、d 从小到大的顺序是（　　）.

A. $a<b<c<d$　　B. $a<b<d<c$　　C. $b<a<c<d$　　D. $a<d<b<c$

（北京市"迎春杯"竞赛题）

8. 若 $x^2+x-2=0$，则 $x^3+2x^2-x+2007=$（　　）.

A. 2009　　B. 2008　　C. -2008　　D. -2009

（"希望杯"邀请赛试题）

9. 若 $(x^2-x-2)^6=a_{12}x^{12}+a_{11}x^{11}+a_{10}x^{10}+\cdots+a_1x+a_0$，则 $a_{12}+a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2=$（　　）.

A. -32　　B. 0　　C. 32　　D. 64

（"五羊杯"竞赛题）

10. 若 a、b 是正数，且满足 $12345=(111+a)(111-b)$，则 a 与 b 的大小关系是（　　）.

A. $a<b$　　B. $a=b$　　C. $a>b$　　D. 不能确定

（全国初中数学竞赛题）

11. 已知 $x=2007^{2008}$，则 x 除以 10 的余数是（　　）.

A. 9　　B. 7　　C. 3　　D. 1

（四川省竞赛题）

12. 计算 $2^{12}\times5^9$，得数是（　　）.

A. 9 位数　　B. 10 位数　　C. 11 位数　　D. 12 位数

（2010 年"希望杯"邀请赛试题）

13. 已知 x^3+kx^2+3 除以 $x+3$，其余数较被 $x+1$ 除所得的余数少 2，求 k 的值.

（香港中学竞赛题）

14. 设 a、b、c、d 都是正整数，且 $a^5=b^4$，$c^3=d^2$，$c-a=19$，求 $d-b$ 的值.

（江苏省竞赛题）

15. 已知 $a^2-3a+1=0$，求代数式 $\dfrac{2a^6-6a^4+2a^5-a^2-1}{3a}$ 的值.

（南昌市竞赛题）

16. 已知 $ax+by=7$，$ax^2+by^2=49$，$ax^3+by^3=133$，$ax^4+by^4=406$，试求 $1995(x+y)+6xy-\dfrac{17}{2}(a+b)$ 的值.

（"希望杯"邀请赛试题）

17. 证明：对于任意自然数 n 来说，总能使 $(n+1)^{2005}+n^{2005}+(n-1)^{2005}-3n$ 被 10 整除.

（俄罗斯萨温市竞赛题）

18. 若 x,y,z,w 为整数，且 $x>y>z>w$，$2^x+2^y+2^z+2^w=20\dfrac{5}{8}$，求 $(x+y+z+w-1)^{2010}$ 的值.

（2010 年湖北省黄冈市竞赛题）

参考答案

问题解决

例 1 (1) 2004

(2) $(n^2)^{100}>(6^3)^{100}$, $n^2>216$, n 的最小值为 15.

例 2 选 B. $25^{xy}=2000^y$ ①, $80^{xy}=2000^x$ ②, ①×②, 得 $(25\times 80)^{xy}=2000^{x+y}$, 得 $xy=x+y$.

例 3 (1) 当 $x=-1$ 时, 得 $-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=[3\times(-1)-1]^5=-1024$, 故原式 $=1024$.

(2) 由 $(3x-1)^5$ 展开并比较系数的符号, 得 $a_5>0$, $a_4<0$, $a_3>0$, $a_2<0$, $a_1>0$, $a_0<0$, 则原式 $=a_5-a_4+a_3-a_2+a_1=1024+a_0=1023(a_0=-1)$.

例 4 设 $a^5=b^4=m^{20}$, $c^3=d^2=n^6$(m, n 为自然数), 则 $a=m^4$, $b=m^5$, $c=n^2$, $d=n^3$, 由已知得 $m^4-n^2=17$, 即 $(m^2+n)(m^2-n)=17$, 因 17 是质数, m^2+n、m^2-n 是自然数, 且 $m^2+n>m^2-n$,

故 $\begin{cases}m^2+n=17\\ m^2-n=1,\end{cases}$ 解得 $m=3$, $n=8$, 所以, $d-b=n^3-m^5=8^3-3^5=269$.

例 5 由 $\dfrac{3^x\cdot 5^x}{2^{3x}}\cdot\dfrac{2^{4y}}{3^{2y}}\cdot\dfrac{3^{3z}}{2^z\cdot 5^z}=2^4$, 得 $3^{x+3z-2y}\cdot 5^{x-z}\cdot 2^{4y-3x-z}=2^4$,

$\therefore \begin{cases}x+3z-2y=0\\ x-z=0\\ 4y-3x-z=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=1,\end{cases}$

故原式 $=\dfrac{2\times 1+2}{1-2}=-4$.

参考答案

刻意练习

1. (1) 12 (2) $\dfrac{9}{49}$ **2.** 7 $(n-1)^2>3^3$ **3.** 512 令 $x=\pm 2$ 代入

4. (1) $15^{16}<33^{13}$ $15^{16}<16^{16}=2^{64}$, $33^{13}>32^{13}=2^{65}>2^{64}$.

(2) $(-2)^{234}=(2^7)^{33}\times 8>125^{33}\times 5=5^{100}$.

5. $x=-5$, $x=-\dfrac{1}{3}$, $x=-1$

6. 16, 3 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$, 原多项式能分别被 $(x+3)$、$(x-2)$ 整除, 则 $f(-3)=0$, $f(2)=0$

7. D $a=(2^5)^{11}$, $b=(3^4)^{11}$, $c=(5^3)^{11}$, $d=(6^2)^{11}$, 只需比较 2^5、3^4、5^3、6^2 的大小.

8. A **9.** A

10. C 由 $12345=(111+a)(111-b)=111^2+111(a-b)-ab$, 得 $111(a-b)=12345-111^2+ab=24+ab>0$.

11. D x 除以 10 的余数等于 7^{2008} 除以 10 的余数, $2008=502\times 4$, 7^{2008} 与 7^4 除以 10 的余数相同.

12. B

13. 设 $x^3+kx^2+3=(x+3)(x^2+ax+b)+r_1$, $x^3+kx^2+3=(x+1)(x^2+cx+d)+r_2$, 令 $x=-3$, 得 $r_1=9k-24$, 令 $x=-1$, 得 $r_2=k+2$, 由 $9k-24+2=k+2$, 得 $k=3$.

14. 757 参见例 4.

15. 原式$=\dfrac{2a^3(a^2-3a+1)-(a^2+1)}{3a}=-\dfrac{a^2+1}{3a}=-1$.

16. 4800　参见例7.

17. $n^{4k+1}-n$一定是10的倍数，原式$=[(n+1)^{2005}-(n+1)]+(n^{2005}-n)+[(n-1)^{2005}-(n-1)]$，每个括号的数都能被10整除，所以合式也能被10整除.

18. 两边同乘以8得$2^{x+3}+2^{y+3}+2^{z+3}+2^{w+3}=165$.

$\because$ $x>y>z>w$且为整数，$\therefore$ $x+3>y+3>z+3>w+3$，且为整数.

$\because$ 165是奇数，$\therefore$ $w+3=0$，$\therefore$ $w=-3$. $\therefore$ $2^{x+3}+2^{y+3}+2^{z+3}=164$.

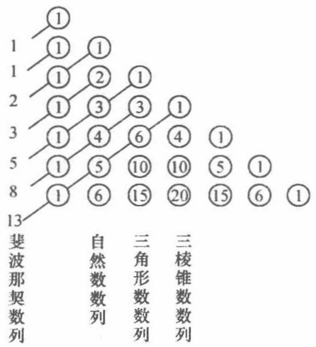
$\therefore$ $2^{x+1}+2^{y+1}+2^{z+1}=41$，$\therefore$ $z+1=0$.

$\therefore$ $z=-1$，$\therefore$ $2^{x+1}+2^{y+1}=40$. 两边都除以8得：$2^{x-2}+2^{y-2}=5$.

$\therefore$ $y-2=0$，$\therefore$ $y=2$. $\therefore$ $2^{x-2}=4$.

$\therefore$ $x-2=2$，$\therefore$ $x=4$.

$\therefore$ $(x+y+z+w-1)^{2010}=(4+2-1-3-1)^{2010}=1$.



杨辉是我国南宋时期杰出的数学家，在他1261年所著的《详解九章算法》一书中，辑录了三角形数表，称之为“开方作法本源”图，并特意说明：“贾宪用此本”. 如果把贾宪三角变换一下形式，它又可以被看做几个数列的组合体.

广角镜

追求知识的精神和应用知识的方式，比知识本身更重要、更真实.

——布拉格

第2讲　乘法公式

知能概述

乘法公式是多项式相乘得出的既有特殊性、又有实用性的具体结论，在复杂的数值计算、代数式的化简求值、代数式的恒等变形、代数等式的证明等方面有广泛的应用.

在课本的基础上，常用的乘法公式有：

(1) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$；

(2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$；

(3) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$；

(4) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$；

(5) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$；

(6) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=a^3+b^3+c^3-3abc$；

(7) $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$；

(8) $(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2+\cdots-ab^{2n-1}+b^{2n})=a^{2n+1}+b^{2n+1}$.

问题解决

例1　已知 a、b、c 满足 $a^2+2b=7$，$b^2-2c=-1$，$c^2-6a=-17$，则 $a+b+c$的值等于________.

（河北省竞赛题）

解题思路　由条件等式联想到完全平方公式，解题的关键是整体思考.

寻找了13年的等式

从1730年--1743年，欧拉发现了下面的等式：

$(a^2+b^2+c^2+d^2)(r^2+s^2+t^2+u^2)$
$=(ar+bs+ct+du)^2+(at-bu-cr+ds)^2+(as-br+cu-dt)^2+(au+bt-cs-dr)^2$.

由于他的发现使得古希腊学者丢番图提出的“每一个整数均可用四个完全平方数的和表示”的猜想时证明有所进展. 1770年，拉格朗日借助于欧拉等式证明了丢番图猜想.

例 2　若一个正整数能表示为两个正整数的平方差，则称这个正整数为“智慧数”(如 $3=2^2-1^2$，$16=5^2-3^2$)．已知智慧数按从小到大的顺序构成如下数列：3，5，7，8，9，11，12，13，15，16，17，19，20，21，23，24，25，…则第 2006 个智慧数是(　　)．

A．2672　　B．2675　　C．2677　　D．2680

(太原市竞赛题)

解题思路　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，而 $a+b$ 与 $a-b$ 的奇偶性相同，由此揭示了“智慧数”的特征．

例 3　计算

(1) $6(7+1)(7^2+1)(7^4+1)(7^8+1)+1$；

(天津市竞赛题)

(2) $\dfrac{20012000^2}{20011999^2+20012001^2-2}$；

(江苏省竞赛题)

(3) $\dfrac{45.1^3-13.9^3}{31.2}+45.1\times 13.9$．

(北京市竞赛题)

解题思路　运用分组、结合、拆添项、字母化等变形方法，为乘法公式的运用创造条件．

例 4　已知 $x+y=1$，$x^2+y^2=2$，求 x^6+y^6 的值．

(“祖冲之杯”竞赛题)

解题思路　$x^6+y^6=(x^3)^2+(y^3)^2=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$，或 $x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$，或 $x^6+y^6=(x^2+y^2)(x^4+y^4)-x^2y^2(x^2+y^2)$，而从条件出发求出 xy 是不同解法都必须求出的．

广角镜

完全平方公式的逆用可得到如下重要结论：

(1) $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2\geqslant 0$；

(2) $a^2+b^2\geqslant 2ab$；

(3) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\dfrac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0$．

上述结论在揭示式子的非负性，求最值等方面应用广泛．

灵活运用公式，既能正用，又能逆用，而且还能适当变形或重组综合运用公式，是学好乘法公式的关键．

例5 设 a、b、c、d 是四个整数，且使得 $m=(ab+cd)^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$ 是个非零整数. 求证：$|m|$ 一定是合数.

（北京市竞赛题）

解题思路 化复杂为简单，逆用乘法公式，从变形 m 中寻找解题突破口.

例6 设 a、b、c 满足 $a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=2$，$a^3+b^3+c^3=3$.
求：(1) abc 的值；(2) $a^4+b^4+c^4$ 的值.

（江苏省竞赛题）

解 设 $\begin{cases} a+b+c=1 & ① \\ a^2+b^2+c^2=2 & ② \\ a^3+b^3+c^3=3 & ③ \end{cases}$

$①^2-②$，得 $ab+bc+ac=-\frac{1}{2}$，

$\because$ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$，

$\therefore$ $abc=\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)-\frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

$=\frac{1}{3}\times3-\frac{1}{3}\times1\times\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$.

将②式两边平方，得

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2=4,$$

$\therefore$ $a^4+b^4+c^4=4-2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$

$=4-2[(ab+bc+ac)^2-2abc(a+b+c)]$

$=4-2\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{6}\times1\right]=\frac{25}{6}$.

广角镜

完全平方公式的常用变形有：

(1) $a^2+b^2=(a\pm b)^2\mp2ab$；

(2) $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a\pm\frac{1}{a}\right)^2\mp2$；

(3) $ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\frac{(a^2+b^2)-(a-b)^2}{2}$；

(4) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$.

设 $x+y=a$，$xy=b$，运用乘法公式及递推关系，可分别求出 x^2+y^2，x^3+y^3，$x^4+y^4\cdots$，x^n+y^n 的值.

其中 $x^{n+1}+y^{n+1}=(x^n+y^n)(x+y)-xy(x^{n-1}+y^{n-1})$.