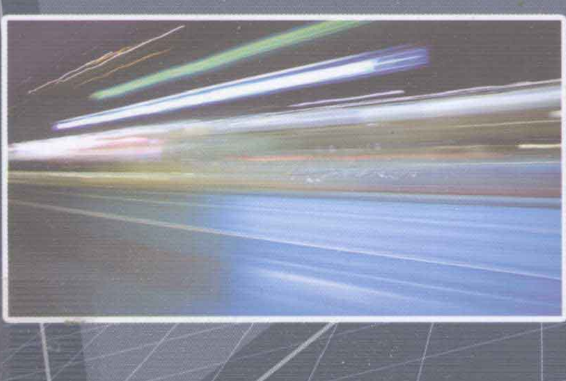
十二五

普通高等教育“十二五”规划教材

电子信息类精品教材

# 随机信号分析（第2版）

赵淑清　郑　薇　编著



電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

普通高等教育“十二五”规划教材

电子信息类精品教材

# 随机信号分析

## （第2版）

赵淑清　郑薇　编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

## 内容简介

全书共分 5 章，主要包括随机信号的基本理论、随机信号的各种分析方法及基本仿真方法。本书从分布律、数字特征和特征函数引出随机信号的基本概念，分别在时域和频域讨论随机信号的特点，并将连续时间的随机信号扩充到随机序列，将相关理论的内容引申到高阶统计量。书中详细介绍了电子系统中常用随机信号的统计特性，包括白噪声、高斯过程、窄带过程、马尔可夫过程，并介绍了现代信号处理中常用的隐马尔可夫的概念，以及各种随机过程在通信、雷达等电子系统中的应用。本书还详细讨论了随机信号通过线性系统和非线性系统的时域分析和功率谱分析，系统地讨论了基于 MATLAB 环境的离散随机信号仿真方法、随机信号通过线性和非线性系统的仿真方法。书末给出了一些常用的 C 语言程序和习题参考答案。

本书的目的是为读者打下牢固的随机信号基础，使之适应现代信号处理的发展。本书可作为高等学校电子信息类专业高年级本科生和相关学科研究生的教材，对从事相关领域研究的科技人员亦有重要的参考价值。



**图书在版编目（CIP）数据**

随机信号分析 / 赵淑清，郑薇编著. —2 版. —北京：电子工业出版社，2011.8
（电子信息类精品教材）
ISBN 978-7-121-13571-2
Ⅰ. ①随… Ⅱ. ①赵… ②郑… Ⅲ. ①随机信号－信号分析－高等学校－教材 Ⅳ. ①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 089458 号

责任编辑：韩同平　特约编辑：李佩乾
印　　刷：北京季蜂印刷有限公司
装　　订：三河市鹏成印业有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编：100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：14.75　字数：385 千字
印　　次：2011 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：4 000 册　定价：29.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系电话：（010）68279077；邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

# 第 2 版前言

“随机信号分析”是电子信息类专业主要的专业基础课程之一，是研究随机信号特点与规律的理论。随机信号与确定信号一样，是通信、雷达、语音信号处理、信号与信息处理、自动控制等领域中必须涉及的信号形式。因此，工科院校中电类甚至一些机械类专业的学生应该对随机信号有必要的了解，并掌握一些随机信号理论、仿真及分析处理的基本方法。

本书第 1 版于 1999 年出版，是电子工业部“九五”规划教材，同时被编入国家“九五”重点《航天科学》丛书。经过十多年的使用，我们积累了大量的经验，并从各渠道收到过很多反馈意见。这次的第 2 版是在保持第 1 版教材特色的基础上，结合多年的教学经验，并参考国内外同类教材的长处，对部分内容做了相应的加深和拓宽，修订而成的。

全书共分 5 章。第 1、2、5 章是随机信号的基本理论，第 3、4 章则以通信与电子信息领域中的实际应用为背景，给出随机信号的各种分析方法。第 1 章，首先对已经学过的随机变量进行了较系统的回顾，然后讨论了特征函数，另外还分析了基于高斯分布变换后的一些分布的相互关系。第 2 章，在时域(相关)和频域(功率谱)中讨论随机过程及平稳随机过程的定义和性质，同时还对随机序列进行了相应的讨论。第 3 章，介绍随机信号通过线性系统和非线性系统的分析方法。第 4 章，讨论无线电系统中常用的窄带随机过程的一些性质和应用。第 5 章，介绍马尔可夫过程、隐马尔可夫(HMM)的基本概念和基本理论。

修订后本书具有以下几方面的重要特点。

(1) *以经典信号处理为主，注重为现代信号处理打基础*

本书重点面向本科生，因此主要目的是在确定性信号理论的基础上为本科生建立随机信号理论的基础。在内容的选择和编排方面，充分考虑了基本概念、基本理论的完整性和易学性。由于受到篇幅的限制，本书限于在经典信号处理的范畴内讨论随机信号理论与应用问题。

现代信号处理是建立在经典信号处理之上的，以随机信号为背景的信号处理理论。随着现代信号理论的发展，为了使读者在未来的继续学习中具有较完整的知识体系，特别注意增加了高阶谱、隐马尔可夫过程方面的内容，为进一步学习现代信号处理理论提供必要的理论基础。

(2) *理论与应用并重，加强实验仿真*

随机信号理论是建立在确定性信号理论基础上的知识体系，是最接近实际应用的理论。在很多科学研究和实际工程中，随机信号是最基本的信号。本书以讨论随机信号的基本理论和基本分析方法为主，注重强调分析方法的正确性和物理模型的准确性，注重应用实例的引用，以及辅助的实验仿真。由于计算机及数字信号处理设备的普遍应用，本书详细讨论了离散随机信号及系统的分析方法。

对“随机信号分析”这门课程，初学者往往感到抽象、模糊、难懂。还有许多学过随机信号理论的人，常常停留在理论层面，而在实际科研和工程实践中却感到无从下手。鉴于这些情况，本书修订时进一步增加了工程应用的实例，加大了随机信号的仿真内容，对实际信号处理中遇到的基本方法进行了比较系统的介绍。考虑到 MATLAB 的广泛应用，将原来正文中的 C 语言程序修订为 MATLAB 程序，同时附录 A 中保留并增加了一些常用的 C 语言程

序。相信本书对初学随机信号的学生、需要进行随机信号仿真实验的研究生和相关的科研工作者都会有所帮助。

(3) 与先修课程和后续课程无缝连接

尽管按教学大纲要求，在学习本课程之前，学生应掌握必要的概率论和信号理论知识，我们仍在部分章节中对学过的知识做了必要的重复，以便与新的内容进行有机的衔接。

作者曾经讲授过信号与系统、数字信号处理、信号检测理论、现代通信原理、自适应信号处理、现代信号处理等相关信号系列课程，熟悉相关知识的结构和关系，以及不同后续课程对随机信号理论的需求，对信号系列课程的知识体系和框架有着深刻的理解。在构造随机信号理论体系时，已经考虑到电子信息工程、通信工程、生物医学工程等专业所需要的基础理论，为后续通信理论、信号处理理论、信号检测理论提供了必要的理论基础。

(4) 内容模块化，按需取舍

本书内容呈现明显的模块化特点，各个专业和院校可根据学时数灵活选择教学内容。第1、2章作为全书的基础，是必学内容。第3章分为线性系统和非线性系统两个模块，需至少选择线性系统。第4章包括窄带过程分析、信号检测和通信方面应用实例两个模块，实例部分可根据专业需求取舍。考虑到不同专业对随机信号理论的需求，修订时特别注意将部分冗长的推导改为例题，并增加了例题和习题的题量，较难的题和复杂的题标有*，可在教学中根据实际情况进行取舍，或作为自学的内容，以满足不同学时的需求。

本书的参考学时数为40～50学时，目录中标有*的章节为选学内容。不同的专业根据需求可对课程内容进行取舍和组合，实施学时可以有很大的弹性，课堂教学可以从 36 学时到 60 学时左右。书中 3.5 节和第 5 章基本是独立章节，可以在各种组合中取舍。例如：用 36 学时讲授第 1～4 章，可适当简化，不包括非线性系统，以及各章的信号与系统仿真；用 48 学时讲授第 1～4 章，可包括部分信号与系统仿真，第 5 章简单介绍；60 学时几乎可以讲授所有内容。

书中所有原理图都由作者手工绘制，以保证图的准确性和质量，所有曲线图是由作者编写程序正确运行后加工得到的，所附 MATLAB 程序和 C 语言程序都是由作者编写，并通过测试的。

本书由哈尔滨工业大学赵淑清、郑薇编著，参加本书编写的还有杨金丹，哈尔滨工业大学的部分研究生为本书的校对和习题答案做了大量工作。刘永坦院士对第 1 版和第 2 版都提出了宝贵意见，在此表示诚挚的感谢。由于作者水平有限，书中难免存在疏漏或不足之处，敬请广大读者批评指正。

作者 E-mail：zhaosq2000@163.com

编著者

# 目　录

# 第 1 章　随机信号基础

信号有多种表现形式，主要的形式有电信号、光信号、声信号等；根据表达式的不同，还可以分为连续时间信号和离散时间信号，或者分为确定性信号和随机信号。连续时间信号和离散时间信号的区别在于自变量是连续的还是离散的，而确定性信号和随机信号的区别才是本质的区别，因为确定性信号是以时间为自变量的一般函数，随机信号则是以时间为自变量的随机函数。

在实际应用中，需要处理的信号往往不是确定性信号，而是随机信号与确定性信号的混合信号。由于随机信号与确定性信号有本质上的不同，因此分析方法也不尽相同。

随机信号理论的基础是“概率论”和“信号与系统”，这里假定读者已经掌握了这些知识。本章首先对随机变量的要点做一下系统的回顾；然后介绍用特征函数描述随机变量的方法。本章的后半部分将给出通信与信息处理领域中经常用到的一些随机变量的分布，并重点讨论高斯随机变量。本章还将给出一些随机变量仿真的方法和程序，供读者参考和选用。

## 1.1　随机变量要点回顾

设随机试验的样本空间为 $S=\{e_i\}$，如果对样本空间的每一个元素 $e_i \in S$，都有一个实数 $X\{e_i\}$ 与之对应，对所有的元素 $e \in S$，就得到一个定义在空间 $S$ 上的实单值函数 $X\{e\}$，称 $X\{e\}$ 为随机变量，简写为 $X$。一般用大写字母 $X, Y, Z$ 来表示随机变量，而用小写字母 $x, y, z$ 表示对应随机变量的可能取值。

引入随机变量可以将随机试验的所有可能结果与对应的概率联系起来。如一段导体中的电子运动引起的电流，接收机的噪声电压，这些都与数值有关。即使像发现目标这样的事件，也可以规定一个数值来表示“发现目标”或“未发现目标”。分布律便表明了随机变量取值与概率的对应关系。

根据随机变量的取值是可列还是不可列的，把随机变量分为离散随机变量和连续随机变量。离散随机变量的样本空间是离散的点，因而取值也是离散的，如图 1.1-1(a)所示。连续随机变量的样本空间是连续区间，如图 1.1-1(b)所示，所以取值连续地占据某一区间。接收机的噪声电压是连续随机变量，而探测是否存在目标的试验则是离散随机变量。

(a) 离散随机变量

(b) 连续随机变量

图 1.1-1　随机变量

根据描述随机试验参量的数目，还可以把随机变量分为一维、二维和多维随机变量。例如，随机变量 $X$ 只能用来描述一个随机量，若用它来描述一个随机信号的幅度和相位是不够的，必须用两个随机变量 $X$ 和 $Y$。对于更复杂的随机试验，可能用更多的随机变量进行描述。

### 1.1.1　随机变量的分布律

研究确定性函数 $y=f(x)$ 时，如果是单值函数，可以唯一确定 $x$ 和 $y$ 的关系。随机试验

的某一结果是否出现并不能根据函数关系决定，因此无法用函数唯一地表示。例如，在一次掷硬币试验中，在试验前是否“出现正面”是未知的，但是通过大量的试验可以得到“出现正面”的概率为 0.5 这一结论。

通过大量试验得到的结果就是统计规律，那么如何研究随机变量的统计规律呢？分布律就是研究随机变量统计规律的一种方法，它描述了随机变量各可能取值与相应的概率之间的对应关系。

**1．概率分布函数**

定义随机变量 $X$ 取值不超过 $x$ 的概率为概率分布函数或累积分布函数

$$F(x)=P(X\leqslant x) \tag{1.1-1}$$

如果把一维随机变量看成是数轴上的一个随机点，上式说明了随机变量 $X$ 取值落在区间 $(-\infty,x]$ 的概率，显然它既适用于离散随机变量，也适用于连续随机变量。根据概率分布函数的定义，可得到如下性质。

**性质 1** $F(x)$是 $x$ 的单调非减函数。即对于 $x_2>x_1$，有

$$F(x_2)\geqslant F(x_1) \tag{1.1-2}$$

**性质 2** $F(x)$非负，且取值满足

$$0\leqslant F(x)\leqslant 1 \tag{1.1-3}$$

**性质 3** 随机变量在 $x_1,x_2$ 区间内的概率为

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1) \tag{1.1-4}$$

**性质 4** $F(x)$右连续，即

$$F(x^+)=F(x) \tag{1.1-5}$$

性质 4 对离散随机变量特别有用。对于任意一个函数，看它是否为概率分布函数的正确表达式，只要用性质 1、性质 2 和性质 4 判断即可。离散随机变量的分布函数除满足以上性质外，还具有阶梯形式，阶跃的高度等于随机变量在该点的概率，即

$$F(x)=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i)u(x-x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P_iu(x-x_i) \tag{1.1-6}$$

式中，$u(x)$为单位阶跃函数，$P_i$ 为 $X=x_i$ 的概率。

**【例 1.1-1】** 判断函数 $\cos(x)$, $\exp(x)$, $1-\exp(-x)$ 是否为概率分布函数？exp 为指数函数。

**解：**（1）由性质 1，概率分布函数应该是单调非减函数，因此排除了 $\cos(x)$。

（2）由性质 2，可知概率分布函数应该是在 0～1 之间的非负函数，因此排除了 $\exp(x)$。

（3）当 $x\in(-\infty,\infty)$ 时，$1-\exp(-x)$ 也不是在 0～1 之间的非负函数；但是当 $x\in(0,\infty)$ 时，$1-\exp(-x)$ 除了满足 0～1 之间非负且单调非减函数外还满足性质 4，因此

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-\exp(-x), & x\geqslant 0\end{cases}$$

是概率分布函数。

## 2. 概率密度函数

分布律的另一种形式是概率密度函数，定义为概率分布函数$F(x)$对$x$的导数

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.1-7}$$

或写成积分形式

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{1.1-8}$$

如果概率分布函数是连续的，其导数一定存在，故概率密度存在。如果概率分布函数存在有限个间断点，则可引入δ函数，因此概率密度总是存在的。根据概率分布函数的性质，可得到概率密度的性质。

**性质 1** 概率密度函数非负，即

$$f(x)\geqslant 0 \tag{1.1-9}$$

**性质 2** 概率密度函数在整个取值区间积分为 1，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1 \tag{1.1-10}$$

**性质 3** 概率密度函数在$(x_1,x_2]$区间积分，给出该区间的取值概率

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \tag{1.1-11}$$

这三条性质与概率分布函数的前三条性质是对应的。性质 1 和性质 2 说明概率密度函数是一条在横轴上方且与横轴所围的面积为 1 的曲线，它们也是检验一个函数是否为概率密度的条件。离散随机变量的概率密度为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} P(X=x_i)\delta(x-x_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P_i\delta(x-x_i) \tag{1.1-12}$$

式中，$\delta(x)$为单位冲激函数。

概率分布函数$F(x)$和概率密度$f(x)$可以充分说明离散随机变量取值落在某点和某个区间的概率，而连续随机变量取值落在某一区间的概率也可由$F(x)$和$f(x)$求出。需要注意的是：连续随机变量在某点取值的概率为零。因此，对于连续随机变量，取值区间写成开区间和闭区间是一样的，但对于离散随机变量，开区间和闭区间则是不同的。图 1.1-2 和图 1.1-3 示出了连续随机变量和离散随机变量的分布律。

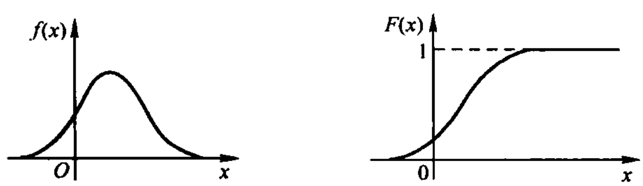



图 1.1-2 连续随机变量概率密度和概率分布函数

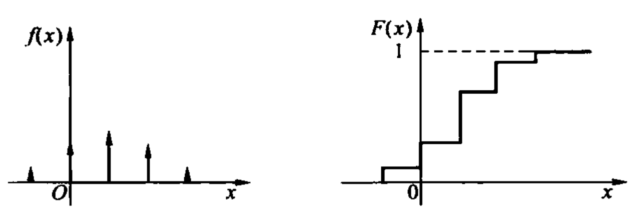



图 1.1-3 离散随机变量的概率密度和概率分布函数

【例 1.1-2】 判断函数 $f(x)=K[u(x)-u(x-a)]$ 满足什么条件才有可能是概率密度函数？当 $a=2$ 和 $a=-2$ 时，$K$ 应该取何值？

**解**：（1）为保证满足性质 1，概率密度函数非负。当 $a>0$ 时需要 $K>0$；当 $a<0$ 时需要 $K<0$。由性质 2 可知，概率密度函数与横轴包围的面积应该为 1，因此 $K=1/a$。综上，$f(x)=\frac{1}{a}[u(x)-u(x-a)]$ 满足概率密度函数的条件。

（2）当 $a=2$ 时 $K=0.5$；当 $a=-2$ 时，$K=-0.5$。

### 3. 多维随机变量的分布律

二维随机变量用$(X, Y)$表示，可认为它是二维平面上的一个随机点(图 1.1-4)。$n$ 维随机变量则用$(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n)$表示，可推广为 $n$ 维空间上的一个随机点。

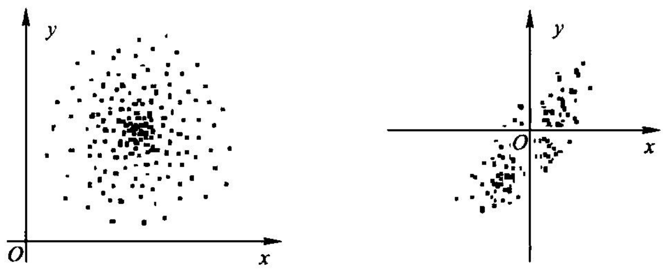



图 1.1-4 二维随机变量——平面上的随机点

多维随机变量不是几个一维随机变量的简单组合，作为一个整体，多维随机变量的统计规律不仅取决于各个随机变量的统计规律，还与几个随机变量之间的关联程度有关。由一维随机变量的分布律不难推广到二维随机变量的分布律(图 1.1-5)。

二维随机变量的概率分布函数和概率密度分别为

$$F_{XY}(x,y)=P(X\leqslant x, Y\leqslant y) \tag{1.1-13}$$

$$f_{XY}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\partial y} \tag{1.1-14}$$

由于分布函数与概率密度的对应关系，这里只考虑二维概率密度的性质。

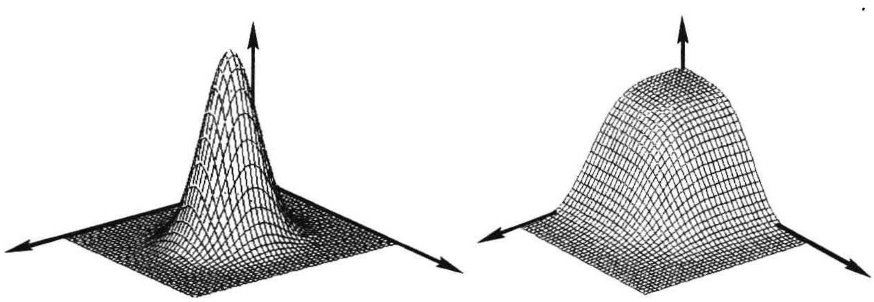


图 1.1-5 二维概率密度和概率分布函数

**性质 1** 二维概率密度函数非负，即

$$f_{XY}(x,y)\geqslant 0 \tag{1.1-15}$$

**性质 2** 二维概率密度函数在整个取值区域积分为 1，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 \tag{1.1-16}$$

**性质 3** 二维概率密度函数在某个区域积分，给出该区域的取值概率

$$P(x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2) = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1-17}$$

**性质 4** 对二维概率密度函数在一个随机变量的所有取值区间上积分，将给出另一个随机变量的概率密度函数

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y \tag{1.1-18}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x \tag{1.1-19}$$

在二维分布律中，称 $F_{XY}(x,y)$为联合概率分布函数，$f_{XY}(x,y)$为联合概率密度，$F_X(x)$和$F_Y(y)$为边缘概率分布函数，$f_X(x)$和$f_Y(y)$为边缘概率密度。如果将条件概率的概念引入到分布律中，还可得到条件概率分布函数 $F_Y(y|x)$和条件概率密度 $f_Y(y|x)$。在表示概率分布函数和概率密度时，为了区别不同的随机变量，常把随机变量作为下角标。

在已知 $X \leqslant x$ 的条件下，随机变量 $Y$ 的条件概率分布函数和条件概率密度函数分别表示为

$$F_Y(y \mid x) = \frac{F_{XY}(x,y)}{F_X(x)} \tag{1.1-20}$$

$$f_Y(y \mid x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \tag{1.1-21}$$

对于所有的 $x$ 和 $y$，若

$$f_X(x \mid y) = f_X(x) \tag{1.1-22}$$

$$f_Y(y \mid x) = f_Y(y) \tag{1.1-23}$$

成立，则称 $X, Y$ 是相互统计独立的两个随机变量。将式(1.1-21)～式(1.1-23)联合，便得到两个随机变量 $X, Y$ 相互统计独立的充要条件

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \tag{1.1-24}$$

即随机变量 $X, Y$ 的二维联合概率密度等于 $X$ 和 $Y$ 的边缘概率密度的乘积。

二维分布律是多维分布律最简单的情况，对于 $n$ 维随机变量$(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n)$，仍可仿照式(1.1-13)和式(1.1-14)定义 $n$ 维分布函数和概率密度

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n) = P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n) \tag{1.1-25}$$

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \tag{1.1-26}$$

$n$ 维概率密度的性质也类似二维概率密度的性质，对应式(1.1-18)的一条重要性质为

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n-m}f_X(x_1,x_2,\cdots,x_m,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_{m+1}\cdots\mathrm{d}x_n \tag{1.1-27}$$

上式说明了高维概率密度可以通过积分降低维数。式(1.1-18)是 $n=2$，$m=1$ 时的情况。

$n$ 维随机变量相互统计独立的充要条件为：对于所有的 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$，满足

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}(x_i) \tag{1.1-28}$$

若 $n=2$，上式简化为式(1.1-24)。

### 1.1.2 随机变量的数字特征

分布律描述随机变量的统计特征是利用随机变量取值与取值概率的对应关系。在许多实际问题中，概率分布函数和概率密度函数需要大量的试验才能得到。幸运的是有时并不需要对随机变量进行完整的描述，而只要求知道随机变量统计规律的主要特征。另一方面，有时虽然掌握了随机变量的概率分布函数和概率密度函数，但需要更直观地了解它的平均值和偏离平均值的程度，因此引出随机变量的数字特征。

数字特征也称为特征数。数字特征有很多，但主要的数字特征是描述随机变量的集中特性、离散特性和随机变量之间的相关性。

#### 1. 数学期望

数学期望又称为统计平均或集合平均，有时更简单地称为均值。数学期望用于描述随机变量的集中特性，用 $E[X]$或 $m_X$ 表示。对于离散随机变量 $X$，其数学期望

$$E[X]=\sum_{i=1}^{\infty}x_iP(X=x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}x_iP_i \tag{1.1-29}$$

如果 $X$ 是连续随机变量，则有

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.1-30}$$

数学期望具有明确的物理意义，如果把概率密度看成具有一定密度的曲线，那么数学期望便是曲线的重心。

在上面的定义中，$E[\cdot]$是一个线性算子。在下面随机变量的函数变换中，可以利用 $E[\cdot]$的线性性质对随机变量进行运算。

描述随机变量集中特性的统计量还有中位数和众数。使下式成立的 $M_e$ 称为随机变量的中位数

$$P(X<M_e)=P(X>M_e) \tag{1.1-31}$$

连续随机变量的中位数将随机变量概率密度下的面积一分为二。离散随机变量的中位数不唯一。概率最大(离散随机变量)或概率密度最大(连续随机变量)的点 $x_M$ 称为众数，记为 $M_o$。在数字图像处理中，灰度直方图描述了一幅图像的灰度分布。灰度直方图的众数反映了图像的基调，因为在图像上众数这一点的灰度最多。

数学期望、中位数和众数的相对关系如图 1.1-6 所示，若概率密度曲线有单峰且关于峰值点对称，则三者重合。

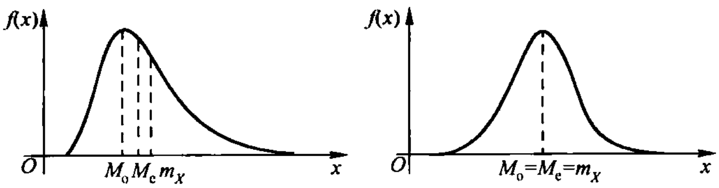



图 1.1-6　表示随机变量集中特性的数字特征

## 2. 方差

方差用来度量随机变量偏离其数学期望的程度，或者度量随机变量在数学期望附近的离散程度。因此它描述的是随机变量取值分布的离散特性。方差用 $D[X]$或 $\sigma_X^2$ 表示。对于离散和连续随机变量，分别有

$$D[X]=E\{(X-E[X])^2\}=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-E[X])^2 P_i \tag{1.1-32}$$

$$D[X]=E\{(X-E[X])^2\}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])^2 f_X(x)\mathrm{d}x \tag{1.1-33}$$

方差开方后称为均方差或标准差

$$\sigma_X=\sqrt{D[X]} \tag{1.1-34}$$

在误差分析中，常用均方差表示误差范围。例如，某一测速雷达的测速精度为 0.1m/s，即均方差 $\sigma=0.1$m/s，是指在多次测量过程中，测速的数值大部分(一般取决于测速误差的概率分布)落在真值的±0.1m/s 范围内。当然也有用 3 倍 $\sigma$ 表示误差或测量精度的，这时，测量的数值绝大部分落在真值的 $\pm 3\sigma$ 范围内。

在图像处理中，灰度直方图的方差大致反映了图像的反差。方差较大的图像，层次感较强，而方差较小的图像，图中的景象或物体的轮廓显得不清。

数学期望和方差是随机变量分布的两个重要的特征，图 1.1-7 示出了具有不同数学期望和方差的概率密度。因为概率密度曲线下的面积恒为 1，对于相同分布的随机变量，若数学期望不同但方差相同，表现为概率密度曲线在横轴上平移；若方差不同但数学期望相同，则表现为概率密度曲线在数学期望附近集中的程度，图中 $\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$。

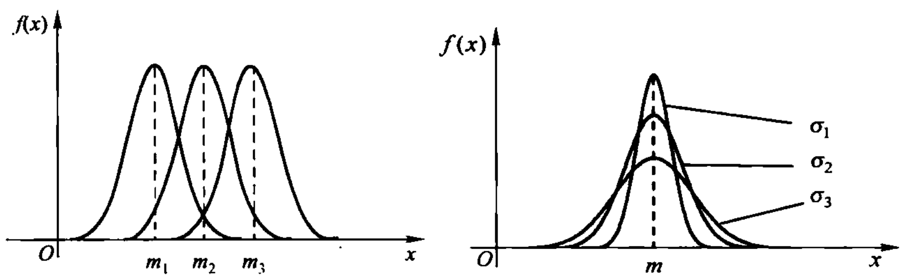



图 1.1-7　具有不同数学期望和方差的随机变量概率密度

**【例 1.1-3】** 已知高斯随机变量 $X$ 的概率密度

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

求它的数学期望和方差。

**解**：根据数学期望和方差的定义，有

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

令 $t=\dfrac{x-m}{\sigma}$，$\mathrm{d}x=\sigma\mathrm{d}t$，代入上式并整理得

$$E[X]=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t+\frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t=0+\frac{m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=m$$

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-m)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

与前面做同样的变换，即令 $t=\dfrac{x-m}{\sigma}$，整理后得

$$D[X]=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}t^2\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$$

查数学手册中的积分表 $\displaystyle\int_0^{\infty}x^{2n}\,\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

在上式中，令 $n=1$ 及 $a=1/2$，利用积分结果，可得方差

$$D[X]=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sigma^2$$

可见，高斯变量概率密度中的两个量 $m$ 和 $\sigma^2$ 分别是数学期望和方差，或者说一维高斯变量的概率密度由其数学期望和方差唯一决定。

### 3．矩函数

矩函数是一种数学定义，根据阶数大小有一阶矩、二阶矩，高于三阶的矩函数称为高阶矩。根据矩函数的计算方式还可以分为原点矩和中心距。下面将会看到一阶原点矩正是曲线的几何重心。如果曲线是概率密度，那么一阶原点矩就是随机变量的数学期望。

随机变量 $X$ 的 $n$ 阶原点矩定义为

$$m_n=E[X^n],\qquad n=1,2,\cdots \tag{1.1-35}$$

对于离散和连续随机变量，则分别有

$$m_n=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^nP_i,\qquad n=1,2,\cdots \tag{1.1-36}$$

$$m_n=\int_{-\infty}^{\infty}x^nf_X(x)\mathrm{d}x,\qquad n=1,2,\cdots \tag{1.1-37}$$

随机变量 $X$ 的 $n$ 阶中心矩定义为

$$\mu_n=E\{(X-E[X])^n\},\qquad n=1,2,\cdots \tag{1.1-38}$$

类似原点矩的定义式，也可分别写出离散随机变量和连续随机变量中心矩的具体表达式

$$\mu_n=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-E[X])^nP_i,\qquad n=1,2,\cdots \tag{1.1-39}$$