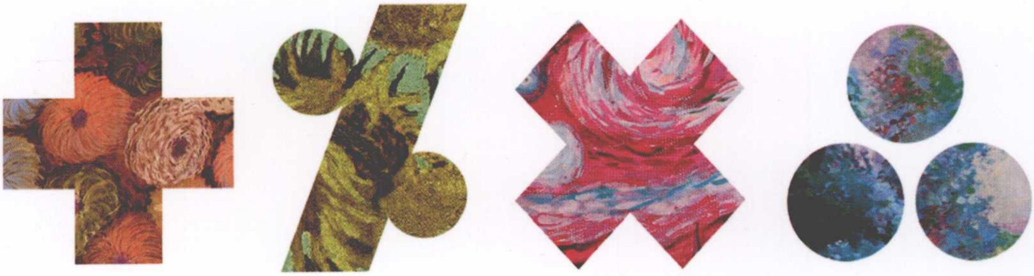
提分攻略系列

疑难与规律详解

YINAN YU GUILÜ XIANGJIE



九年级 数学

主编 蔡晔

龍門書局 龙门品牌 · 学子至爱
www.longmenbooks.com

提分攻略系列

疑难与规律详解

YINAN YU GUILÜ XIANGJIE

九年级 数学

主　编　蔡　晔
副主编　冯素梅
分册主编　高俊元
编　委　徐伯良　唐　星
李　强　陈晓钟

《数理报》优秀作者编写

龍門書局
北　京

图书在版编目(CIP)数据

提分攻略.疑难与规律详解.九年级数学/蔡晔主编;
高俊元分册主编.—北京:龙门书局,2011.5
ISBN 978-7-5088-2945-6

Ⅰ.①提… Ⅱ.①蔡… ②高… Ⅲ.①中学数学课—
初中—习题集 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第073572号

责任编辑:潘恭华 高 鹏/封面设计:浩蓝书籍设计

龍 門 書 局出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
www.longmenbooks.com
新 蕾 印 刷 厂 印刷
科学出版社总发行 各地书店经销
*
2011年5月第 一 版 开本:B5
2011年5月第二次印刷 印张:10 1/4
字数:222 000
定 价:15.00元
(如有印装质量问题,我社负责调换)

前言

新课标教学和新课改理念越来越重视对学生的思维能力、实践能力和创新能力的培养。《考试大纲》告诉我们中考的命题将全面落实新课改理念，把以能力测试为主导的命题指导思想落实到每一道题中，在继承和发展传统命题优势情况下，中考将更加注重对学生各种能力的考查，并真正把对能力的考查放在首要位置。

《提分攻略》系列图书正是在这种背景下应运而生，它包含《疑难与规律详解》和《常考题型训练题典》两大子系列，涉及数学、物理、化学、生物、英语五大学科，供中学不同年级学生和教师使用。《疑难与规律详解》系列丛书集《数理报》优秀一线教师多年教学心得于一体，结合新课标教学理念和考试大纲的要求分学科、分模块、分年级编排成册，总的说来本书有以下特点：

紧扣课标要求，以提高学生思维能力为第一宗旨

应用能力与创新能力的培养以思维能力为核心，本书通过对切实有效的解题方法、规律的讲解、总结和应用让学生在三位一体的科学训练中形成良好的理解、分析和推理能力。

兼具报刊的深度和灵活性以及图书的广度和系统性

一方面，本书取材于数理报，以“新课标”和“考试说明”为指导，将《数理报》多年来积累的精华内容进行重新加工和整合；另一方面，我们针对《数理报》内容随意、系统性差以及知识之间相互重复的缺点进行不断的修订和提升，使之既具有报刊的深度和灵活性，又具有图书的广度和系统性。

疑难问题深入讲解，通法规律全面总结，常见错误深度剖析

本书编写定位于解决教学、学习、考试中的疑难问题，总结归纳出解决问题的方法规律，并有针对性的进行跟踪训练，旨在帮助广大师生突破教学、学习中的疑难易错点，找到提高思维能力的捷径。

全国各地一线教师骨干和专家通力合作，实力雄厚

本书汇集了来自全国各地的优秀教师多年教学心得与体会，对学生学习中遇到的疑难易错问题把握准确，对解题方法规律的总结和应用全面深入，可谓字字珠玑、题题经典，是学习中不可缺少的良师良伴。

编　者

2011.4.10

目 录

目 录

第一章　二次根式

第一节　二次根式与二次根式的乘除

疑难解读

二次根式疑难解读

二次根式是一种特殊的代数式，学习时应注意领会以下几个要点：

一、正确理解二次根式的定义

一般地形如$\sqrt{a}(a\geqslant0)$的形式叫二次根式，$b\sqrt{a}$也是二次根式．它包含三个条件：

1．式中含有“$\sqrt{\ }$”，且根指数为2；

2．被开方数$a\geqslant0$；

3．$b\sqrt{a}(a\geqslant0)$也是二次根式，b叫做二次根式的系数．

如$\sqrt{4}$、$\sqrt{-2}$、$\sqrt[3]{2}$、$-3\sqrt{5}$中，$\sqrt{4}$、$-3\sqrt{5}$是二次根式，其他则不是．

二、二次根式$\sqrt{a}(a\geqslant0)$的双重非负性

1．被开方数大于等于0，即$a\geqslant0$．

2．开方的结果大于等于0，即$\sqrt{a}\geqslant0$．

三、辨析$(\sqrt{a})^2$和$\sqrt{a^2}$

$(\sqrt{a})^2(a\geqslant0)$与$\sqrt{a^2}$是两个重要的二次根式，它们是二次根式运算的基础．

1．意义不同

$(\sqrt{a})^2$表示非负实数a的算术平方根的平方；$\sqrt{a^2}$表示实数a的平方的算术平方根．

2．运算顺序不同

$(\sqrt{a})^2$是先求非负实数a的算术平方根，然后再进行平方运算；而$\sqrt{a^2}$则是先求实数a的平方，再求a^2的算术平方根．

3．取值范围不同

在$(\sqrt{a})^2$中，a只能取非负实数，即$a\geqslant0$；而在$\sqrt{a^2}$中，a可以取一切实数．

4．结果不同

$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$，

而$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a>0),\\ 0 & (a=0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$

5．作用不同

$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant0)$和$\sqrt{a^2}=|a|$都可用于二次根式的化简，但逆向运用时前者可用于将一个非负数写成平方的形式，后者可用于将根号外的数移到根号内．

6．联系

两式运算的结果都是非负数，当$a\geqslant0$时，它们的运算结果是相同的，即当$a\geqslant0$时，$(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}=a$．

二次根式乘除法则的灵活应用

一、积的算术平方根

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$．

即积的算术平方根等于积中各个因式的算术平方根的积．

注意：(1) $\sqrt{(-5)\times(-3)}$有意义，计算结果时不能写成$\sqrt{(-5)\times(-3)}=\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-3}$，而应写成$\sqrt{(-5)\times(-3)}=\sqrt{5\times3}=\sqrt{5}\times\sqrt{3}$．

(2)在利用二次根式性质$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$进行化简时，被开方数一定是乘积的形式，千万不能出现$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$的错误．

(3)可推广到多个非负因数的情况，如

$\sqrt{abcd}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt{d}(a\geqslant0,b\geqslant0,c\geqslant0,d\geqslant0.)$

二、二次根式乘法法则

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant0,b\geqslant0)$.

即两个二次根式相乘，被开方数相乘，根指数不变.

注意：(1)在这个性质中，a、b 可以是数，也可以是代数式，但都必须满足 $a\geqslant0,b\geqslant0$.

(2)此规定是积算术平方根的逆用.

(3)此规定可推广到多个二次根式的情况，如：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}=\sqrt{abc}(a\geqslant0,b\geqslant0,c\geqslant0)$.

三、商的算术平方根

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant0,b>0)$.

即商的算术平方根等于被除式的算术平方根除以除式的算术平方根.

注意：(1)在计算 $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}$ 时，不能写成 $\sqrt{\frac{-3}{-4}}=\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}$，而应写为 $\sqrt{\frac{-3}{-4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)利用 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant0,b>0)$ 可以进行二次根式的化简、计算和化去根号内的分母.

四、二次根式除法法则

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant0,b>0)$.

即两个二次根式相除，被开方数相除，根指数不变.

注意：(1)a、b 可以是数，也可以是代数式，但必须都必须满足 $a\geqslant0,b>0$.

(2)此规定是商的算术平方根的逆用.

五、二次根式乘除运算

1.二次根式的乘法前面有系数时，可以类比单项式的乘法进行，即系数之积作为系数，被开方数之积作为被开方数.

2.二次根式的乘除混合运算与整式乘除混合运算方法类似，整式乘除的一些运算法则、公式在二次根式的乘除混合运算上仍然成立.

二次根式化简的三要点

在进行二次根式的运算时要将结果化为最简形式，二次根式的最简形式应满足三个要点：

一、被开方数中不含开得尽方的因数或因式

被开方数是整数或整式，先把它分解质因数或分解因式，然后把开得尽方的因数或因式开出来，从而将式子化简. 如：当 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$时，$\sqrt{45a^3b}=\sqrt{3^2a^2\times5ab}=3a\sqrt{5ab}$.

二、被开方数中不含有分母

被开方数是分式或分数(包括小数)，有两种处理方式：先利用商的算术平方根的性质，把它写成分式的形式，再根据分式的基本性质化去分母中的根号；也可先根据分式的基本性质将分母变为平方的形式，再将根号化去. 如：当 $x>0$ 时，$\sqrt{0.75x^3}=\sqrt{\frac{3}{4}x^2x}=\sqrt{\frac{3}{4}}x\cdot\sqrt{x}=\frac{\sqrt{3}}{2}x\sqrt{x}$.

三、分母中不含有根号

分母中含有二次根号时，就需要对二次根式进行分母有理化.

1.分母中含有一个根号

形如 $\frac{b}{\sqrt{a}}$ 或 $\frac{c}{\sqrt{a\pm b}}$，分母有理化时，分子、分母同时乘以分母中的根式的最简形式，即 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{ab}}{a}$ 或 $\frac{c}{\sqrt{a\pm b}}=\frac{c\cdot\sqrt{a\pm b}}{\sqrt{a\pm b}\cdot\sqrt{a\pm b}}=\frac{c\sqrt{a\pm b}}{a\pm b}$.

2.分母中含有多个根号

形如 $\frac{c}{a\pm\sqrt{b}}$ 或 $\frac{c}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$，分母有理化时，分子、分母同时乘以分母的有理化因式，即 $\frac{c}{a\pm\sqrt{b}}=$

$\dfrac{c\cdot(a\mp\sqrt{b})}{(a\pm\sqrt{b})(a\mp\sqrt{b})}=\dfrac{c(a\mp\sqrt{b})}{a^2\pm b}$ 或 $\dfrac{c}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=$

$\dfrac{c\cdot(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\dfrac{c(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{a-b}$.

注意:两个含有二次根式的代数式相乘,如果它们的积不含有二次根式,我们就说这两个代数式互为有理化因式.如$(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1$,或$(\sqrt{3}-\sqrt{2})(-\sqrt{3}-\sqrt{2})=-1$,$\sqrt{3}+\sqrt{2}$和$-\sqrt{3}-\sqrt{2}$都是$\sqrt{3}-\sqrt{2}$的有理化因式.

规律透视

$\sqrt{a}$的双重非负性的应用

一、$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$中隐含条件 $a\geqslant 0$ 的应用

1. 确定字母的取值范围

例 1　要使式子$\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$有意义,x 的取值范围是　　(　　)

A. $x\neq 1$　　B. $x\neq 0$

C. $x>-1$ 且 $x\neq 0$　D. $x\geqslant -1$ 且 $x\neq 0$

解析:要使式子有意义,必须满足被开方数非负、分母不能为 0,所以$\begin{cases}x+1\geqslant 0\\x\neq 0\end{cases}$,解得 $x\geqslant -1$且 $x\neq 0$,故选 D.

点评:要使二次根式在实数范围内有意义,必须满足二次根式的被开方数大于或等于零,这类问题有时还与分式结合,如果分母中出现了字母,还要考虑分母不能为 0.

2. 化简

例 2　已知 a 为实数,那么 $\sqrt{-a^2}$ 等于　　(　　)

A. a　B. $-a$　C. -1　D. 0

解析:根据二次根式的被开方数非负性可知:$-a^2\geqslant 0$,即 $a^2\leqslant 0$,而根据平方数非负性可知 $a^2\geqslant 0$,所以 $a=0$,故选 D.

点评:本题利用二次根式被开方数和平方数的非负性进行化简.

3. 求值

例 3　已知实数 A 满足 $|2\ 009-A|+\sqrt{A-2\ 010}=A$,求 $A-2\ 009^2$ 的值.

解析:初看本题感到无从下手,仔细观察可以发现隐含条件:$A\geqslant 2\ 010$,可去绝对值符号.由 $A-2\ 010\geqslant 0$,得 $A\geqslant 2\ 010$.故已知式可化为

$A-2\ 009+\sqrt{A-2\ 010}=A$,

$\therefore\ \sqrt{A-2\ 010}=2009$,两边平方并整理,得:$A-2\ 009^2=2\ 010$.

点评:处理二次根式问题时,要特别关注隐含条件的运用.

二、$\sqrt{a}\geqslant 0(a\geqslant 0)$的应用

例 4　若$|a-2|+\sqrt{b-3}+(c-4)^2=0$,则 $a-b+c=$____.

解析:本题条件中,$|a-2|$、$\sqrt{b-3}$、$(c-4)^2$三个式子都是非负的,三个非负式子和为 0,因而这三个式子都为 0,即 $a-2=0$,$b-3=0$,$c-4=0$,所以 $a=2$,$b=3$,$c=4$,所以 $a-b+c=2-3+4=3$.

点评:几个非负数(或式子)的和为 0,那么这几个数(或式)都为 0.

三、综合运用

例 5　已知实数 x、y、a 满足:$\sqrt{x+y-8}+\sqrt{8-x-y}=\sqrt{3x-y-a}+\sqrt{x-2y+a+3}$,试问长度分别为 x、y、a 的三条线段能否组成一个三角形?如果能,请求出该三角形的面积;如果不能,请说明理由.

解:要判断能否组成三角形,关键是确定三边之间的关系,而条件中给出的是一个含根号的等式,整体观察可以发现被开方数之间存在一定的关系,可用$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$的双重非负性来解,所以根据题意知:

$$\begin{cases}x+y-8\geqslant0,\\8-x-y\geqslant0,\\3x-y-a=0,\\x-2y+a+3=0,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=3,\\a=4,\\y=5,\end{cases}$ 由于 $3^2+4^2=5^2$，所以以长为 x、y、a 的三条线段能组成一个三角形，且是一个直角三角形，其面积为 6.

点评：本题通过整体观察，发现前两个算术平方根的被开方数互为相反数，进而得到 $x+y-8=0$，从而得到 $\sqrt{3x-y-a}+\sqrt{x-2y+a+3}=0$，再利用非负数的性质得到相应方程.

【规律解读】

在解决二次根式 $\sqrt{a}(a\geqslant0)$ 问题时，要注意挖掘隐含条件：根号下的被开方数是非负数，二次根式的值是非负数，利用这个隐含条件可以判定字母的取值范围.

跟踪练习

1. 已知 a 为实数，求代数式 $\sqrt{a+4}-\sqrt{16-4a}+\sqrt{-a^2}$ 的值.

2. 若有理数 x、y、z 满足 $\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}-\sqrt{x}=-\frac{1}{2}(1+x)$，则 $(x-yz)^3$ 的值为多少？

$\sqrt{a^2}=|a|$ 的应用

一、用于化简

例 6 化简 $\sqrt{4x^2-4x+1}-(\sqrt{2x-3})^2$ 得（　　）

A. 2　　B. $-4x+4$

C. -2　　D. $4x-4$

解析：初看此题像没有给出化简条件，但充分发掘隐含条件，由二次根式的定义可知 $2x-3\geqslant0$，即 $x\geqslant\frac{3}{2}$，所以 $2x-1\geqslant0$. 即 $\sqrt{4x^2-4x+1}-(\sqrt{2x-3})^2=\sqrt{(2x-1)^2}-(2x-3)=2x-1-2x+3=2$，故选 A.

二、确定取值范围

例 7 若代数式 $\sqrt{(2\,009-a)^2}+\sqrt{(a-2\,010)^2}$ 的值是常数 1，则 a 的取值范围是________.

解析：本题可根据 $\sqrt{a^2}=|a|$ 先进行化简，$\sqrt{(2\,009-a)^2}+\sqrt{(a-2\,010)^2}=|a-2\,009|+|a-2\,010|$，对这一结果有三种处理办法：

思路 1：对 a 进行分类讨论，分 $a<2\,009$，$2\,009\leqslant a\leqslant2\,010$，$a>2\,010$ 三种情况. 经讨论后，只有当 $2\,009\leqslant a\leqslant2\,010$ 时，原式的结果是常数.

思路 2：根据结果判断，因为代数式的值为常数 1，所以可判断 a 被合并为 0，所以 $|a-2\,009|$ 和 $|a-2\,010|$ 在化简后一定有一个是其本身的相反数，而 $a-2\,009>a-2\,010$，所以 $\begin{cases}a-2\,009\geqslant0\\a-2\,010\leqslant0\end{cases}$，解得 $2\,009\leqslant a\leqslant2\,010$.

思路 3：根据绝对值的意义，$|a-2\,009|+|a-2\,010|$ 表示的是数轴上表示 a 的点与表示 2 009 和 2 010 的点的距离的和，显然当表示 a 的点在 2 009 和 2 010 之间时，其值是常数 1，所以 $2\,009\leqslant a\leqslant2\,010$.

三、求值

例 8 已知 x，y 为实数，且 $2y=2\,010+\sqrt{(x-2\,009)^2}+(\sqrt{2\,009-x})^2$，则 $x+y$ 的值为多少？

分析：因为 y 为实数，所以隐含着两个算术根都有意义，即被开方数均为非负数.

解：依题意得 $2\,009-x\geqslant0$，解得 $x\leqslant2\,009$，于是 $2\,010+|x-2\,009|+2\,009-x=6\,028-2x$. 故 $x+y=3\,014$.

【规律解读】

$\sqrt{a^2}$的化简的关键是关注a的取值范围，这个范围有时候是直接给出的，有时候是隐含的，需要我们在认真阅读题意的基础上准确判断．特别要关注的是当$a<0$时，无论是将因式从根号内开出来（如$\sqrt{5a^2}=\sqrt{5}\cdot|a|=-\sqrt{5}a$），还是将根号外的因式移到根号内（如$\sqrt{5}a=-\sqrt{5}|a|=-\sqrt{5a^2}$）都要特别注意符号问题．

跟踪练习

3．若$|1-x|=1+|x|$，则$\sqrt{(x-1)^2}$等于（　　）

A．$x-1$　　B．$1-x$　　C．1　　D．-1

4．已知$\left|1-\sqrt{(x-1)^2}\right|=x$，化简：$\sqrt{x^2+\frac{1}{4}-x}+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}+x}$．

二次根式的乘除运算技巧

一、巧算乘法

例9　计算：$\frac{3}{2}\sqrt{24}\times\frac{2}{3}\sqrt{18}$．

分析：二次根式相乘时，系数和系数相乘，二次根式和二次根式相乘，最后再化简．

解：原式$=\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\sqrt{18}\times\sqrt{24}$

$=\sqrt{432}=12\sqrt{3}$．

点评：在计算中，要能正确使用公式，并形成技巧，同时也要考虑计算的结果必须化成最简二次根式．

二、巧变除为乘

例10　计算：$\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\div\sqrt{\frac{1}{b}}\right)$．

分析：本题由于被开方数中出现了分式，所以可采用化除为乘的方法进行运算．本例中的运算可直接套用公式$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$进行计算．

解：原式$=\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}\cdot b}=\sqrt{b}$．

三、巧约分

例11　计算：(1)$\frac{\sqrt{n^2-4}}{\sqrt{n-2}}$；

(2)$\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$．

分析：本题中若对分式的分子、分母进行适当的处理后都能找到公因式，约去这个公因式可简化计算过程．

解：(1)$\frac{\sqrt{n^2-4}}{\sqrt{n-2}}=\frac{\sqrt{(n+2)(n-2)}}{\sqrt{n-2}}=\sqrt{n+2}$；

(2)$\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{2})-(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)-\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

$=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\sqrt{2}+1$．

四、巧用倒数

例12　化简：$(4+\sqrt{15})^{2\,007}(4-\sqrt{15})^{2\,008}$．

分析：乍一看似无从下手，细一想便豁然开朗．若抓住$4+\sqrt{15}$和$4-\sqrt{15}$互为倒数的关系，并逆用积的乘方性质可迅速解答此题．

解：$(4+\sqrt{15})^{2\,007}(4-\sqrt{15})^{2\,008}$

$=[(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})]^{2\,007}(4-\sqrt{15})$

$=4-\sqrt{15}$．

五、巧分解

例13　计算：$(x+y+2\sqrt{xy})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$．

分析：观察发现$x\geqslant0$，$y\geqslant0$，所以$x+y+2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$，然后再运用平方差公式并逆用积的乘方性质可快捷地解答问题．

解：原式$=(x+y+2\sqrt{xy})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

$=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

$=[(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})](\sqrt{x}+\sqrt{y})$

$=(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})$．

六、运用有理化因式分母有理化

例 14　化简：$\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$.

分析：$\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$ 的有理化因式是 $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$，可分子分母同乘以 $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.

解：原式

$$=\frac{(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})^2}{(\sqrt{x+y}-\sqrt{(x-y)})(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})}$$

$$=\frac{x+y+2\sqrt{(x+y)(x-y)}+x-y}{x+y-(x-y)}$$

$$=\frac{2x+2\sqrt{x^2-y^2}}{x+y-(x-y)}$$

$$=\frac{2x+2\sqrt{x^2-y^2}}{2y}=\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}.$$

【规律解读】

二次根式的乘除运算一般来说都是先运算再化简，实际运算时，可将根号内和根号外分别计算，最后再化简，对于一些复杂的二次根式应根据式子的具体特点选择合适的方法，如利用因式分解约分、利用公式计算等，就可以做到化难为易，避繁就简.

跟踪练习

5. 计算：$(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})(-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

6. 化简：$\dfrac{4-\sqrt{11}}{\sqrt{27-8\sqrt{11}}}$.

7. 化简：$\dfrac{1-b}{1-\sqrt{b}}(b\neq 1)$.

二次根式新题型

一、与勾股定理结合

例 15　如图 1-1-1 所示，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle D=90°$，$\angle A=60°$，$AB=2$，$CD=1$. 求四边形 $ABCD$ 的面积.

分析：不规则四边形求面积，可利用分割法.

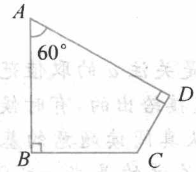


图 1-1-1

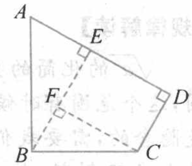


图 1-1-2

在三角形面积的求解过程中，应用二次根式的运算法则.

解：如图 1-1-2，过 B 作 $BE\perp AD$，垂足为 E. 过 C 作 $CF\perp BE$ 于 F，垂足为 F.

在 Rt$\triangle ABE$ 中，$\because \angle A=60°$.

$\therefore \angle ABE=30°$，

$\therefore AE=\dfrac{1}{2}AB=1$，

$BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{3}$.

又$\because$四边形 $CDEF$ 为矩形，

$\therefore EF=CD=1$，$BF=BE-EF=\sqrt{3}-1$.

在 Rt$\triangle BCF$ 中，$\angle FBC=90°-\angle ABE=60°$，

$\therefore \angle FCB=30°$，$BC=2BF=2(\sqrt{3}-1)$，

$$\therefore FC=\sqrt{BC^2-BF^2}$$
$$=\sqrt{[2(\sqrt{3}-1)]^2-(\sqrt{3}-1)^2}$$
$$=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$$
$$=3-\sqrt{3}.$$

$$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle BCF}+S_{矩形CDEF}$$
$$=\frac{1}{2}BE\cdot AE+\frac{1}{2}BF\cdot FC+CD\cdot CF$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1+\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}-1)\times(3-\sqrt{3})+1\times(3-\sqrt{3})$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)^2+3-\sqrt{3}$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

二、判断改错题

例 16　课堂上，李老师给大家出了这样一道题：化简 $\dfrac{a}{b-a}\sqrt{\dfrac{b^3-2ab^2+a^2b}{a}}(b<a<0)$.

小明同学是这样解的：

解：原式 $=\frac{a}{b-a}\sqrt{\frac{b(a-b)^2}{a}}$ ①

$=\frac{a(b-a)}{b-a}\sqrt{\frac{b}{a}}$ ②

$=a\times\frac{1}{a}\times\sqrt{ab}$ ③

$=\sqrt{ab}$ ④

请问小明的解答过程是否正确？若不正确，指出是哪一步出现错误，并写出你认为正确的解答全过程.

解：小明的解答过程不正确，解题过程出错的原因是对公式 $\sqrt{a^2}=|a|$ 理解不准确，第②，③步出现了错误. 正确的解答过程为：

因为 $b<a<0$，所以 $a-b>0$，所以，原式 $=\frac{a}{b-a}\sqrt{\frac{b(a-b)^2}{a}}=\frac{a(a-b)}{b-a}\times\sqrt{\frac{b}{a}}=-a\times(-\frac{1}{a})\sqrt{ab}=\sqrt{ab}$.

三、联系实际题

例 17 在数学课上，老师设计一幅矩形图片. 已知矩形的长为 $\sqrt{140\pi}$ cm，宽是 $\sqrt{35\pi}$ cm，要求同学们设计一个面积与其相等的圆，若是你，请设计出圆的半径.

分析：由圆的面积与矩形的面积相等可列方程，求出圆的半径.

解：设圆的半径为 r cm，根据题意，得 $\pi r^2=\sqrt{140\pi}\times\sqrt{35\pi}=\sqrt{140\pi\times35\pi}=\sqrt{2^2\times5^2\times7^2\times\pi^2}=2\times5\times7\times\pi=70\pi$.

$\therefore r^2=70$.

$\because r>0$，$\therefore r=\sqrt{70}$ (cm).

四、规律探究题

例 18 观察下列各式及其验证过程：

$\sqrt{2+\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$，验证：$\sqrt{2+\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}=\sqrt{\frac{2^2\times2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

$\sqrt{3+\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$，验证：$\sqrt{3+\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{27}{8}}=\sqrt{\frac{3^2\times3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$.

(1)按照上述两个等式及其验证过程，猜想 $\sqrt{4+\frac{4}{15}}$ 的变形结果并进行验证.

(2)针对上述各式反映的规律，写出用 a（a 为任意自然数，且 $a\geqslant2$）表示的等式，并给出验证.

(3)针对三次根式及 n 次根式（n 为任意自然数），有无上述类似的变形，如果有，写出用 a（a 为任意自然数，且 $a\geqslant2$）表示的等式，并给出验证.

解：(1) $\sqrt{4+\frac{4}{15}}=\sqrt{4\frac{4}{15}}$.

验证：$\sqrt{4+\frac{4}{15}}=\sqrt{\frac{64}{15}}=\sqrt{\frac{4^2\times4}{15}}=\sqrt{4\frac{4}{15}}$.

(2) $\sqrt{a+\frac{a}{a^2-1}}=a\sqrt{\frac{a}{a^2-1}}$（$a$ 为任意自然数，且 $a\geqslant2$）.

验证：$\sqrt{a+\frac{a}{a^2-1}}=\sqrt{\frac{a^3-a+a}{a^2-1}}=\sqrt{\frac{a^3}{a^2-1}}=a\sqrt{\frac{a}{a^2-1}}$.

(3) $\sqrt[3]{a+\frac{a}{a^3-1}}=a\sqrt[3]{\frac{a}{a^3-1}}$（$a$ 为任意自然数，且 $a\geqslant2$）.

验证：$\sqrt[3]{a+\frac{a}{a^3-1}}=\sqrt[3]{\frac{a^4-a+a}{a^3-1}}=\sqrt[3]{\frac{a^4}{a^3-1}}=a\sqrt[3]{\frac{a}{a^3-1}}$.

$\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}=a\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}$（$a$ 为任意自然数，且 $a\geqslant2$）.

验证：$\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{a^{n+1}-a+a}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{a^{n+1}}{a^n-1}}=a\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}$.

点评:本题从最简单的二次根式的变形入手，层层递进，经过归纳、猜想得出 n 次根式的变形结论. 这种从特殊到一般的思维方式就是数学归纳思想.

五、阅读理解题

例 19　问题背景:在△ABC 中，AB、BC、AC 三边的长分别为 $\sqrt{5}$、$\sqrt{10}$、$\sqrt{13}$，求这个三角形的面积.

小辉同学在解答这道题时，先建立一个正方形网格(每个小正方形的边长为 1)，再在网格中画出格点△ABC(即△ABC 三个顶点都在小正方形的顶点处)，如图 1-1-3 所示. 这样不需求△ABC 的高，而借用网格就能计算出它的面积.

(1)请你将△ABC 的面积直接填写在横线上______.

(2)思维拓展:我们把上述求△ABC 面积的方法叫做构图法. 若△ABC 三边的长分别为 $\sqrt{5a}$、$2\sqrt{2a}$、$\sqrt{17a}(a>0)$，请利用图 1-1-4 的正方形网格(每个小正方形的边长为 $\sqrt{a}$)画出相应的△ABC，并求出它的面积.

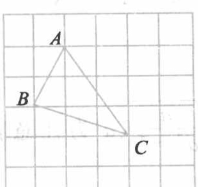


图 1-1-3

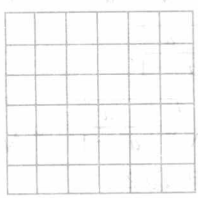


图 1-1-4

分析:(1)计算图中的△ABC 的面积可用割补法，即将图形看成是一个边长为 3 的正方形的面积减去三个小的三角形的面积.

(2)不妨设网格中小正方形边长为 $\sqrt{a}$，则 $\sqrt{5a}$ 可看成是两直角边为 $2\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{a}$ 的直角三角形的斜边，$2\sqrt{2a}$ 可看成是两直角边为 $2\sqrt{a}$ 和 $2\sqrt{a}$ 的直角三角形的斜边，$\sqrt{17a}$ 可看成是两直角边为 $\sqrt{a}$ 和 $4\sqrt{a}$ 的直角三角形的斜边.

解:(1)$S_{\triangle ABC}=3\times3-\frac{1}{2}\times3\times1-\frac{1}{2}\times2\times1-\frac{1}{2}\times3\times2=3.5.$

(2)根据勾股定理可构造如图 1-1-5:

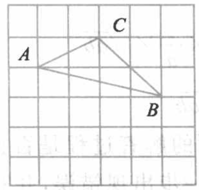


图 1-1-5

其面积为:$2\sqrt{a}\times4\sqrt{a}-\frac{1}{2}\times\sqrt{a}\times4\sqrt{a}-\frac{1}{2}\times\sqrt{a}\times2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\times2\sqrt{a}\times2\sqrt{a}=3a.$

点评:本题首先通过一个简单的基本问题引入思路，构造图形计算面积，进而将问题一般化处理，问题的解决体现了从特殊到一般的过程.

【规律解读】

这类试题的解决需要在认真阅读题意的基础上通过观察、实验、自主探究、猜想等思维和活动过程，获得解决问题的方法.

跟踪练习

8. 用计算器计算：$\frac{\sqrt{2^2-1}}{2-1}$，$\frac{\sqrt{3^2-1}}{3-1}$，$\frac{\sqrt{4^2-1}}{4-1}$，$\frac{\sqrt{5^2-1}}{5-1}$，…根据你发现的规律，判断 $P=\frac{\sqrt{n^2-1}}{n-1}$ 与 $Q=\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}}{(n+1)-1}$($n$ 为大于 1 的整数)的值的大小关系为(　　)

A. $P<Q$　　B. $P=Q$

C. $P>Q$　　D. 与 n 的取值无关

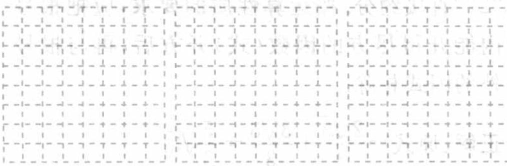
9. 图 1-1-6 是三张形状、大小完全相同的方格纸，方格纸中的每个小正方形的边长均为 1. 请在图 1-1-6 中，分别画出符合要求的图形，所画图形各顶点必须与方格纸

中的小正方形顶点重合.

(1)画一个底边长为4,面积为8的等腰三角形.

(2)画一个面积为10的等腰直角三角形.

(3)画一个一边长为 $2\sqrt{2}$,面积为6的等腰三角形.



(1) (2) (3)

图 1-1-6

误区破解

二次根式误区剖析

一、忽视二次根式的"非负性"

例 20 化简:$\sqrt{16a-64}\cdot\dfrac{\sqrt{9-6a+a^2}}{\sqrt{a-4}}$.

错解:原式 $=4\sqrt{a-4}\cdot\dfrac{\sqrt{(3-a)^2}}{\sqrt{a-4}}$

$=4(3-a)=12-4a$.

剖析:二次根式 $\sqrt{a}$ 有两个"非负性":①$a\geqslant0$;②$\sqrt{a}\geqslant0$. 若分母中含二次根式,则其被开方数定为正数. 而本题的解答正是忽视了 $a-4>0$ 这一性质,造成错误.

正解:依题意可知 $a-4>0$,即 $a>4$,从而有 $a-3>0$,即 $3-a<0$,所以原式 $=4\sqrt{a-4}\cdot\dfrac{\sqrt{(3-a)^2}}{\sqrt{a-4}}=-4(3-a)=4(a-3)=4a-12$.

例 21 化简:$(a-1)\sqrt{-\dfrac{1}{a-1}}$.

错解:$(a-1)\sqrt{-\dfrac{1}{a-1}}=\sqrt{(a-1)^2\cdot(-\dfrac{1}{a-1})}$

$=\sqrt{1-a}$.

剖析:错解中忽视了 $-\dfrac{1}{a-1}>0$ 这一隐含条件,即 $a<1$,此式的值应为负值.

正解:$(a-1)\sqrt{-\dfrac{1}{a-1}}=-\sqrt{(a-1)^2\cdot(-\dfrac{1}{a-1})}$

$=-\sqrt{-(a-1)}=-\sqrt{1-a}$.

二、忽视公式应用的前提条件

例 22 计算:$\sqrt{(-289)\times(-36)}$.

错解:原式 $=\sqrt{-289}\times\sqrt{-36}=(-17)\times(-6)=102$.

剖析:错解虽然结果正确,但没有想到 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 的使用条件是 $a\geqslant0,b\geqslant0$. 实际上负数没有平方根.

正解:原式 $=\sqrt{289\times36}=\sqrt{289}\times\sqrt{36}=17\times6=102$.

三、分不清除数

例 23 计算:$\sqrt{18}\div2\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

错解:原式 $=\sqrt{18}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{18\times\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$.

剖析:本题目的除数是 $2\sqrt{\dfrac{1}{3}}$,而不是2,所以除法运算变为乘法运算时,应乘 $2\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ 的倒数,而不是乘2的倒数后再乘 $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

正解:原式 $=\sqrt{18}\times\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{3}}}=\sqrt{18}\times\dfrac{1}{2}\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\sqrt{54}=\dfrac{3}{2}\sqrt{6}$.

四、误用运算法则

例 24 计算:$\sqrt{pq}\cdot(\sqrt{\dfrac{p}{q}}\div\sqrt{\dfrac{q}{p}})$.

错解:原式 $=(\sqrt{pq}\cdot\sqrt{\dfrac{p}{q}})\div(\sqrt{pq}\cdot\sqrt{\dfrac{q}{p}})$

$=p\div q=\frac{p}{q}$.

剖析:上述解法误用了乘法分配律,乘法分配律是乘法对加法的分配律,而不是乘法对除法的分配律.

正解:原式$=\sqrt{pq}\cdot(\sqrt{\frac{p}{q}}\cdot\sqrt{\frac{p}{q}})=\sqrt{pq}\cdot\frac{p}{q}=\frac{p\sqrt{pq}}{q}$.

五、化简不彻底

例 25 化简:$\sqrt{\frac{36n^2}{25m^3}}$ $(n>0)$.

错解:原式$=\frac{\sqrt{36n^2}}{\sqrt{25m^3}}=\frac{\sqrt{(6n)^2}}{\sqrt{(5m)^2\cdot m}}=\frac{6n}{5m\sqrt{m}}$.

剖析:在二次根式的运算中,最后的结果一般要求分母中不含二次根式,对上面所得结果还需进一步化简.

正解:原式$=\frac{\sqrt{36n^2}}{\sqrt{25m^3}}=\frac{\sqrt{(6n)^2}}{\sqrt{(5m)^2\cdot m}}=\frac{6n}{5m\sqrt{m}}=\frac{6n\cdot\sqrt{m}}{5m\sqrt{m}\cdot\sqrt{m}}=\frac{6n\sqrt{m}}{5m\cdot m}=\frac{6n\sqrt{m}}{5m^2}$.

六、根号外的数(式)与根号内的数(式)错误约分

例 26 计算:$\frac{\sqrt{12}+\sqrt{27}}{3}$.

错解:原式$\frac{\sqrt{12}}{3}+\frac{\sqrt{27}}{3}=\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$.

剖析:错在把根号外的"3"与根号内的"12"、"27"直接约分.按运算性质的要求,应把根号内能开得尽方的因数(式)开方后,再与根号外的因式相除.

正解:原式$=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{3\sqrt{3}}{3}=\frac{5}{3}\sqrt{3}$.

七、与形近式子相混淆

例 27 计算:(1) $\sqrt{5^2+12^2}$; (2) $\sqrt{10^2-6^2}$.

错解:(1)原式$=\sqrt{5^2}+\sqrt{12^2}=5+12=17$;

(2)原式$=\sqrt{10^2}-\sqrt{6^2}=10-6=4$.

剖析:$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$,而$\sqrt{a^2\pm b^2}\neq\sqrt{a^2}\pm\sqrt{b^2}$.

正解:(1)原式$=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$,

(2)原式$=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8$.

跟踪练习

10. 化简:$a\div a\sqrt{\frac{1}{a}}(a>0)$.

11. 已知$xy=3$,那么$x\sqrt{\frac{y}{x}}+y\sqrt{\frac{x}{y}}$的值是多少?

第二节　二次根式的加减

疑难解读

二次根式的加减解读

一、同类二次根式

几个二次根式化成最简二次根式后,如果被开方数相同,这几个二次根式叫同类二次根式.判断两个二次根式是否是同类二次根式,不是看形式,而是看化简后被开方数是否相同.例如$\sqrt{8}$,$\frac{1}{\sqrt{2}}$从形式上看被开方数不同,但化为最简二次根式后被开方数相同,因而它们是同类二次根式.

二、同类二次根式的合并

与合并同类项相类似,合并同类二次根式的依据是逆用乘法分配律,具体方法是:先将同类二次根式化简,再将根号外的因式相加减作为结果的一个系数,根号和根号下的被开方数不变.例如:$a\sqrt{b}+c\sqrt{b}=(a+c)\sqrt{b}$.

注意:不是同类二次根式的二次根式不能合并,如 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$,应为最终结果,而有时错误的合并为 $\sqrt{5}$.

三、二次根式的加减

二次根式的加减,就是合并同类二次根式,二次根式加减运算的一般步骤:

(1)将每一个二次根式化为最简二次根式;

(2)找出其中的同类二次根式,合并同类二次根式.

注意:(1)加法交换律和结合律仍然适用于二次根式的运算.

(2)带分数与二次根式相乘,必须写成假分数的形式.如 $2\frac{1}{3}\times\sqrt{5}$应写成 $\frac{7}{3}\sqrt{5}$而不能写成 $2\frac{1}{3}\sqrt{5}$;

(3)运算结果要化成最简形式.

(4)合并同类二次根式时,不可忽视系数为1或−1的二次根式.如$-\sqrt{a}$的系数不是0,而是−1.

四、二次根式的混合运算

二次根式的混合运算和整式的运算顺序一样:先乘方,后乘除,最后加减,有括号的先算括号内的.对于同级运算按照从左到右的顺序进行.

规律透视

二次根式混合运算的技巧

一、先用分配律再化简

例1　计算:$2\sqrt{3}(\sqrt{12}-3\sqrt{75}+\frac{1}{3}\sqrt{108})$.

分析:本题可根据乘法分配律去括号,再运算.

解:原式$=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}-2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{75}+2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{108}=12-90+12=-66$.

二、除法转化为乘法

例2　计算$(3\sqrt{48}-4\sqrt{27})\div 2\sqrt{3}$

分析:本题可将除法转化为乘法,再用分配律.

解:原式$=(3\sqrt{48}-4\sqrt{27})\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}$

$=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{48}{3}}-\frac{4}{2}\sqrt{\frac{27}{3}}$

$=\frac{3}{2}\sqrt{16}-2\sqrt{9}=\frac{3}{2}\times 4-2\times 3=0$

三、巧用乘法公式

例3　计算:

$(\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{6})(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3\sqrt{6})$.

分析:若直接相乘,计算较繁.观察发现先适当分组,再运用乘法公式来进行计算较为简单.

解:$(\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{6})(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3\sqrt{6})$

$=[\sqrt{2}+(2\sqrt{3}-3\sqrt{6})][\sqrt{2}-(2\sqrt{3}-3\sqrt{6})]$

$=2-(2\sqrt{3}-3\sqrt{6})^2$

$=36\sqrt{2}-64$.

四、分母有理化

例4　计算:$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

分析:直接代入求值比较麻烦,可考虑把各分母的有理化因式找到,将分母有理化后再进行计算.

解:原式$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})=\sqrt{100}-1=9$.

五、巧移因式

例5　计算:$(3\sqrt{2}+\sqrt{48})(\sqrt{18}-4\sqrt{3})$.

分析:将 $3\sqrt{2}$、$4\sqrt{3}$根号外的因式移到根号内,然后运用平方差公式计算比较简便;或先把$\sqrt{48}$、$\sqrt{18}$化简,然后利用平方差公式计算.