“希望杯”数学竞赛系列丛书

周国镇　主编

希望杯

数学能力培训教程

（第2版）

孙金兰　骆　华　张海英 等　编

小学
四年级

气象出版社
China Meteorological Press

“希望杯”数学竞赛系列丛书　主编　周国镇

“希望杯”数学能力培训教程

小学四年级

（第2版）

孙金兰　骆　华　张海英　等　编

气象出版社
China Meteorological Press

图书在版编目(CIP)数据

"希望杯"数学能力培训教程. 小学四年级/孙金兰等编.
—2 版. —北京:气象出版社,2011. 11(2012. 1 重印)
("希望杯"数学竞赛系列丛书)
ISBN 978-7-5029-5322-5

Ⅰ. ①希… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①小学数学课-教学参考资料
Ⅳ. ①G624. 503

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 217024 号

"Xiwangbei" Shuxue Nengli Peixun Jiaocheng. Xiaoxue Si Nianji(Di-er Ban)

"希望杯"数学能力培训教程·小学四年级(第 2 版)

孙金兰,骆华,张海英 等 编

出版发行: 气象出版社
地　　址: 北京市海淀区中关村南大街 46 号　　**邮政编码:** 100081
总 编 室: 010-68407112　　**发 行 部:** 010-68409198
网　　址: http://www.cmp.cma.gov.cn　　**E-mail:** qxcbs@cma.gov.cn
责任编辑: 崔晓军　　**终　　审:** 林雨晨
封面设计: 燕　彤　　**责任技编:** 吴庭芳
责任校对: 赵　瑷
印　　刷: 北京京科印刷有限公司
开　　本: 720 mm×960 mm　1/16　　**印　　张:** 17.5
字　　数: 343 千字
版　　次: 2011 年 11 月第 2 版　　**印　　次:** 2012 年 1 月第 2 次印刷
印　　数: 20001—40000　　**定　　价:** 25.00 元

“希望杯”全国数学邀请赛

组织委员会

顾　　问

龚　昇　著名数学家
华罗庚数学奖获得者
中国科学技术大学原副校长

梅向明　著名数学家
原北京师范学院院长

徐利治　著名数学家
大连理工大学数学研究所原所长

常务委员

陈德泉　应用数学家
曾任中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长、副理事长
华罗庚实验室主任
曾任第一、二届“希望杯”组委会主任，其他各届副主任

计　雷　应用数学家
曾任中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长，现任副理事长
华罗庚实验室副主任
曾任三届“希望杯”组委会主任，其他各届副主任

徐伟宣　应用数学家
中国科学院科技政策与管理科学研究所原所长
中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长
华罗庚实验室副主任
曾任六届“希望杯”组委会主任，其他各届副主任

周国镇　数学教育专家
《数理天地》杂志社社长、总编
“希望杯”组委会常任秘书长、命题委员会主任
世界数学团体锦标赛（WMTC）组委会主席

江　西	熊以情	李锦成	杜小许	胡联芳	曾永洪	林健航	杨新民
	董乐华	朱　菊	刘　倩	王彩华	孙根升	吴长生	魏虎甲
山　东	王静玲	赵　路	闫炳杰	刘会丰	高国强		
河　南	马国军	陈宝亭					
湖　北	汪江松	刘统菊	杨德焱	刘　芸			
湖　南	谢细华	肖贞武	肖国瑞	张新春	康锡成	廖如光	曾晓牛
	肖乐农	曹志鹏					
广　东	卢建川	郑喜中	郑俊盛	陈文生	邓志云	殷切文	劳兆喜
	黄文毓	林国忠	徐山洪	周　曙	钟族威	张文俊	梁小贱
	傅冠流	王朝安	王　琪	赵　岚	陈和添	李　锡	陈玉叶
	赵士春	钟　明	王金玉				
广　西	邓印章	张享发	谭思培				
海　南	张光浓	王树国	廖再兴	黄　波	冼词学	施　颖	贺香云
重　庆	吴挽荣	彭安平	肖天祥	刘德珍	欧修祝		
四　川	赵颖钧	余加秋	刘海泉	晋赵勇	屈江川	周春茂	
贵　州	胡朝双	王荣方	张涤初	王兴华	黄　凡	颜家和	易艳萍
云　南	张文英	汪　锐	欧　群	段严发	何智仁	邹光兴	唐泽仪
陕　西	张　雄	闫存哲					
甘　肃	徐　琳						
宁　夏	杨　燕	孙　涛	李　红	何建中			
青　海	闫翊德						
新　疆	杨卫平	黄志清	摆生兰	王　霞	张　美	张连勇	阿不都热西提
	陈　春						
澳　门	伍助志	郑志民					

前　　言

这套教程的再版(含小学四、五、六年级各一册)是为小学四、五、六年级师生开展数学科普活动或参加“希望杯”数学邀请赛而专门编写的培训教材。在编写过程中,作者**充分注意了**新的小学数学教学大纲,**认真研究了**欧美国家小学数学教育的先进经验,**力求充分体现“希望杯”**的特色,为广大的小学师生提供系统、全面、实用的数学内容、思想和方法,以“鼓励学好课本知识,适当拓宽知识面,激发学习数学的兴趣和热情,培养科学的思维能力、创新能力和实践能力”。

本教程中所有原始的素材都来源于历届小学“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题,这些题目中的**绝大多数**是由“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的专家命题,其余则是由全国各地的数学命题研究人员编拟。这些题目,贴近现行的小学数学课本,很有启发性、思考性和趣味性,寓科学于趣味之中,寓知识、能力的考查于数学的美育之中。学习和研究这些题目不仅能使学习者加深对数学课本知识的理解、掌握和应用,并且能实实在在地提高科学思维素质,而这种素质对于有效地学习其他的功课都是必需的。正因为如此,历届小学“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题被多方人士看好:小学数学各类考试命题人员经常从中汲取营养;有远见的数学教师大量地从中选取资料,以充实和丰富自己的教学内容;众多的数学教学和培训机构则将其作为主要教材。最有说服力的是千千万万的小学生,正是通过对“希望杯”试题的学习、研究,提高了水平,大大提升了学数学的兴趣和信心。

考虑到大部分小学生不只是希望掌握数学课本上的内容,他们对课本以外的数学也有强烈的求知欲,所以我们的教程既包含了能充分体现小学数学主要内容的部分,也包含了小学数学课本中没有而小学生也能理解和掌握的一些有价值的内容。前者占教程的大部分,后者只占小部分。

考虑到小学生年龄小，阅读和理解能力不是很强，本教程在行文上力求简明易懂。

教程的作者是"希望杯"全国数学邀请赛和世界数学团体锦标赛（WMTC）命题委员会的成员、著名的《数理天地》杂志的编辑，他们不仅有很好的数学功底，而且每个人都有丰富的教学经验。相信本教程新版的问世对于小学生数学学习水平的提高会有实际帮助。当然，书中难免会有不妥之处，真诚地欢迎读者批评指正。

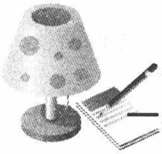
周国镇

2011 年 11 月 20 日

注：**周国镇** 《数理天地》杂志社社长兼总编；中国优选法统筹法与经济数学研究会常务理事，数学教育委员会主任；"希望杯"全国数学邀请赛组委会秘书长，命题委员会主任；世界数学团体锦标赛组委会主席。

目　　录

第1讲　巧　算



一、知识提要

开始学数学，先要认数字，然后就要学习加、减、乘、除运算.

给出一个算式，根据运算法则(先乘除，后加减，有括号时先算括号里的)一步一步地计算，大多数同学都能得出正确结果.但是有些算式不一定要按部就班地计算，如果注意运用一些技巧，就可以提高解题效率，既快又准地得出结果，这就是巧算.

要学会巧算，必须能够熟练应用以下五个基本运算定律和五个运算性质.

1. 五个基本运算定律

(1) **加法交换律**：$a+b=b+a$.

(2) **加法结合律**：$(a+b)+c=a+(b+c)$.

(3) **乘法交换律**：$a\times b=b\times a$.

(4) **乘法结合律**：$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$.

(5) **乘法分配律**：$(a\pm b)\times c=a\times c\pm b\times c$.

2. 五个运算性质

(1) **除法分配性质**：

$(a\pm b)\div c=a\div c\pm b\div c$.

(2) **商不变性质**：

$a\div b=(a\times c)\div(b\times c)=(a\div c)\div(b\div c)$，$(b,c\neq 0)$.

(3) **加减法的运算性质**：

$a+b-c=a-c+b$；

$a-b-c=a-c-b=a-(b+c)$.

(4) **乘除法的运算性质:**

$a\times b\div c=a\div c\times b$, ($c\neq 0$);

$a\div b\div c=a\div c\div b=a\div(b\times c)$, ($b,c\neq 0$).

(5) **去括号:**

$a+(b-c)=a+b-c$;

$a-(b-c)=a-b+c$;

$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$;

$a\times(b\div c)=a\times b\div c$, ($c\neq 0$);

$a\div(b\times c)=a\div b\div c$;

$a\div(b\div c)=a\div b\times c$, ($b,c\neq 0$).

利用上面的运算定律和运算性质,可以灵活改变运算顺序,使计算变得简便.

此外,还可以运用倒序相加、分组计算、凑整、恒等变形等运算技巧.

每道题都有自己的特点.刚看到题时,不要急于动手算,要先观察它的结构特点,然后寻找恰当的简便方法.

二、例　题

例 1　$8\times 7\div 8\times 7=$ ______.

第8届(2010年)四年级第1试

分析·解　在乘除混合运算中,如果算式中没有括号,计算时可以根据运算定律和性质调换因数或除数的位置.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=8\div 8\times 7\times 7\\&=1\times 7\times 7\\&=49.\end{aligned}$$

例 2　$123+456+789+987+654+321=$ ______.

第9届(2011年)四年级培训题

分析·解　显然可以用加法结合律来计算,体现了凑整思想.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(123+987)+(456+654)+(789+321)\\&=1110+1110+1110\\&=3330.\end{aligned}$$

例 3 $12 \times 45 + 15 \times 28 + 30 \times 26 + 60 \times 11 =$ ______.

第 7 届(2009 年)四年级培训题

分析·解 45,30,60 分别是 15 的 3 倍、2 倍、4 倍,所以可逆用乘法分配律.

$$\begin{aligned}原式 &= 12 \times 5 \times 9 + 15 \times 4 \times 7 + 30 \times 2 \times 13 + 60 \times 11 \\ &= 60 \times 9 + 60 \times 7 + 60 \times 13 + 60 \times 11 \\ &= 60 \times (9 + 7 + 13 + 11) \\ &= 2400.\end{aligned}$$

例 4 $44 \times 555 + 55 \times 666 =$ ______.

第 8 届(2010 年)四年级培训题

分析·解 44 和 55 含有相同的因数 11,555 和 666 含有相同的因数 111,由此可用乘法结合律及分配律.

$$\begin{aligned}原式 &= 4 \times 11 \times 5 \times 111 + 5 \times 11 \times 6 \times 111 \\ &= 11 \times 111 \times (20 + 30) \\ &= 1221 \times 50 = 61050.\end{aligned}$$

例 5 $(70 \div 4 + 90 \div 4) \div 4 =$ ______.

第 9 届(2011 年)四年级第 2 试

分析·解 括号内的两个除法算式中的除数都是 4,所以实质上是除法分配性质的逆运用.

$$\begin{aligned}原式 &= [(70 + 90) \div 4] \div 4 \\ &= 160 \div 4 \div 4 \\ &= 40 \div 4 \\ &= 10.\end{aligned}$$

例 6 用简便方法计算:

(1) $864 \times 27 \div 54$;　　(2) $25 \times 720 \div (18 \div 4)$.

第 6 届(2008 年)四年级培训题

分析·解 算式(1)中的 54 是 27 的 2 倍,所以可用商不变的性质将除数和被除数同除以 27.算式(2)很容易出错,要注意 $a \div (b \div c) = a \div b \times c$,这里,去括号是关键.

(1) $$原式 = 864 \times (27 \div 27) \div 2 = 864 \div 2 = 432.$$

(2) $$\begin{aligned}原式 &= 25 \times 720 \div 18 \times 4 \\ &= (25 \times 4) \times (720 \div 18) \\ &= 100 \times 40 \\ &= 4000.\end{aligned}$$

例7 $1+11+21+\cdots+1991+2001+2011=$ ______.

第9届(2011年)四年级第1试

分析·解 观察发现1,11,21,…,1991,2001,2011这202个数从第2个数起,每个数与它前面一个数的差都是10.

若一列数 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$,从第2个数起每一个数与它前面一个数的差都等于 d,则称这列数为**等差数列**.前 n 个数的和

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=n(a_1+a_n)\div 2\\&=na_1+n(n-1)\cdot d\div 2.\end{aligned}$$

理由如下:

因为
$$\begin{aligned}a_2-a_1&=d,\\a_3-a_2&=d,\\a_4-a_3&=d,\\&\vdots\\a_{n-1}-a_{n-2}&=d,\\a_n-a_{n-1}&=d,\end{aligned}$$

将上面 $(n-1)$ 个式子左右两边分别相加,得

$$(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1})=(n-1)d,$$

即
$$a_n-a_1=(n-1)d,$$

于是
$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

从而
$$\begin{aligned}a_1&=a_1\\a_2&=a_1+d,\\a_3&=a_1+2d,\\a_4&=a_1+3d,\\&\vdots\\a_{n-1}&=a_1+(n-2)d,\\a_n&=a_1+(n-1)d.\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{n-1}+a_n\\&=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)+\cdots+\\&\quad[a_1+(n-2)d]+[a_1+(n-1)d]\\&=na_1+[d+2d+3d+\cdots+(n-2)d+(n-1)d],\end{aligned}$$

即
$$S_n=na_1+[1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)]d.$$

这样,问题便转化为求 $1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)$ 的和.联想到高斯求和所用的倒序相加的方法,这里同样适用.

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l|l}
1 & +2 & +3 & +\ \cdots & +(n-2) & +(n-1) & \\
+(n-1) & +(n-2) & +(n-3) & +\ \cdots & +\ \ 2 & +\ \ 1 & \\
\hline
n & +\ \ n & +\ \ n & +\ \cdots & +\ \ n & +\ \ n & =n(n-1)
\end{array}$$

即 $$1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1).$$

所以 $$S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d.$$

解法 1 原式 $=1\times202+(10+20+30+\cdots+2010)$

$=202+(10+2010)\times201\div2=202+203010$

$=203212.$

解法 2 原式 $=(1+2011)\times202\div2=203212.$

例 8 $100-98+96-94+92-90+\cdots+4-2=$ ______.

第 8 届(2010 年)四年级培训题

分析·解 算式中有加号也有减号,且相邻两数的差均是 2,不妨考虑将这些数重新组合一下,或将加法运算与减法运算分开,同样可解决问题.

解法 1 原式 $=(100-98)+(96-94)+\cdots+(4-2)$

$=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{25个2}=2\times25=50.$

解法 2 原式 $=(100+96+92+\cdots+4)-(98+94+90+\cdots+2)$

$=25\times(100+4)\div2-25\times(98+2)\div2$

$=25\times(104-100)\div2$

$=25\times4\div2=50.$

例 9 $(569+672\times428)\div(429\times672-103)=$ ______.

第 6 届(2008 年)四年级培训题

分析·解 初看此题,无捷径可走.若按部就班运算,则运算量很大,但若注意到 $428=429-1$,且 $672-103=569$,于是简捷的解题方法便出现了:

原式 $=(569+672\times428)\div[(428+1)\times672-103]$

$=(569+672\times428)\div(428\times672+672-103)$

$=(569+672\times428)\div(428\times672+569)$

$=(569+672\times428)\div(569+672\times428)$

$=1.$

例 10 100 减 25,加 22,又减 25,又加 22……这样算下去,直到结果为 0,这时,共减了______个 25,加了______个 22.

第 6 届(2008 年)四年级培训题

分析·解 本题要求在理解题意的基础上列出算式：

$$100-25+22-25+22-\cdots=0.$$

100是偶数，25是奇数，22是偶数，要使最后结果为0，须使减去的25的个数为偶数，且比加22的个数多1.而每次减25再加22后的结果减少3.于是上式变为：

$$100-25+(22-25)+(22-25)+\cdots+(22-25)=0,$$

即

$$100-25=3\times25.$$

于是 共减了26个25，加了25个22.

例11 数20092009×2008与数20082008×2009相差______.

第6届(2008年)四年级第2试

分析·解 八位数乘以四位数，其结果很大，不宜去硬算，可以拆分成容易比较的数.20092009与20082008相差10001，且都是形如$\overline{abcdabcd}$的数，而$\overline{abcdabcd}=\overline{abcd}\times10001$，所以

$$\begin{aligned}&20092009\times2008-20082008\times2009\\=&2009\times10001\times2008-2008\times10001\times2009\\=&2008\times2009\times10001-2008\times2009\times10001\\=&0.\end{aligned}$$

注 $\overline{ab}\times101=\overline{abab}$,

$\overline{abc}\times1001=\overline{abcabc}$,

$\overline{abcd}\times10001=\overline{abcdabcd},\cdots$.

例12 $7+97+997+9997+99997=$______.

第9届(2011年)四年级培训题

分析·解 观察发现式中每个加数的末位数字都是7，非末位数字都是9，考虑恒等变形，可化繁为易.

$$\begin{aligned}&7+97+997+9997+99997\\=&(10-3)+(100-3)+(1000-3)+(10000-3)+(100000-3)\\=&(10+100+1000+10000+100000)-3\times5\\=&111110-15\\=&111000+(110-15)\\=&111095.\end{aligned}$$

例13 如果$A=\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3\times3}_{30个3}$,

$B=\underbrace{5\times5\times5\times\cdots\times5\times5}_{20个5}$,

那么 A ______ B.(填"$>$"、"$<$"或"$=$")

第 3 届(2005 年)四年级培训题

分析·解　比较 A,B 的大小并不一定要知道 A,B 的具体数值,可将它们分别分解,将问题转化为比较乘数的大小.

$$\begin{aligned}A &= \underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3\times3}_{30个3}\\ &= \underbrace{(3\times3\times3)\times(3\times3\times3)\times\cdots\times(3\times3\times3)}_{10个(3\times3\times3)}\\ &= \underbrace{27\times27\times27\times\cdots\times27}_{10个27},\\ B &= \underbrace{5\times5\times5\times\cdots\times5\times5}_{20个3}\\ &= \underbrace{(5\times5)\times(5\times5)\times\cdots\times(5\times5)}_{10个(5\times5)}\\ &= \underbrace{25\times25\times25\times\cdots\times25}_{10个25}.\end{aligned}$$

因为　$27>25$,

所以　$A>B$.

三、习　题

1. $1-3+5-7+9-11+13-\cdots-39+41=$ ______.

第 7 届(2009 年)四年级第 2 试

2. $898+9898+99898+999898=$ ______.

第 9 届(2011 年)四年级第 2 试

3. $8+88+888+8888+88888+888888=$ ______.

第 6 届(2008 年)四年级培训题

4. $(100+99\times1)+(99+99\times2)+(98+99\times3)+\cdots+(2+99\times99)+(1+99\times100)=$ ______.

第 7 届(2009 年)四年级培训题

5. $1\div(2\div3)\div(3\div4)\div\cdots\div(99\div100)=$ ______.

第 2 届(2004 年)四年级培训题