高中数学拓展性研究性学习丛书

主编 吴长江

高中数学专题性问题

——综述·范例·研究·展望（第二版）

主编 王 涛

编著 吴长江 任升录 王国江 沈子兴 邬炎锴

上海大学出版社

高中数学拓展性研究性学习丛书
主编　吴长江

高中数学专题性问题

——综述·范例·研究·展望

（第二版）

主　编　王　涛

编　著　吴长江　任升录　王国江

沈子兴　邬炎锆

上海大学出版社

·上海·

内容提要

本书是“高中数学拓展性研究性学习丛书”之一，以数学多知识点、多方法的交汇结点（也是高考的热点和亮点）为专题，分九个专题：函数与方程问题，函数最值问题，参变量取值范围问题，复数与三角问题，复数与几何问题，向量与空间角问题，直线与曲线、曲线与曲线的关系问题，点的轨迹问题，数列—函数—不等式问题，构筑了一个旨在进一步提升学生处理信息的能力、综合分析和解决问题的能力的方案.

书中每个专题分“问题综述”、“典型问题分析”、“高考预测”三个部分，“问题综述”对所述专题在高考中的地位、比例以及演变作了概括性的分析；“典型问题分析”从“题海”中整合了具有时代性、典型性和统领性的典例进行分析研究；在此基础上，“高考预测”针对数学教学改革的新变化对高考趋势作了展望. 此外，每个专题后配备了相应的“自我检测”及其参考答案.

本书既可作为高三学生高考第二、第三轮复习用书，更可作为高一、高二学生的拓展性学习用书，也可作为相关教师以及广大数学爱好者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高中数学专题性问题：综述·范例·研究·展望/王涛主编；吴长江等编著. —2 版. —上海：上海大学出版社，2012.1

（高中数学拓展性研究性学习丛书 / 吴长江主编）

ISBN 978-7-81118-951-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王…②吴… Ⅲ.①中学数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 255043 号

责任编辑 王悦生 封面设计 柯国富

技术编辑 金 鑫 章 斐

高中数学专题性问题——综述·范例·研究·展望

主编 王 涛

上海大学出版社出版发行

（上海市上大路 99 号 邮政编码 200444）

（http://www.shangdapress.com 发行热线 021-66135112 传真 021-66135112）

出版人：郭纯生

*

南京展望文化发展有限公司排版

上海叶大印务发展有限公司印刷 各地新华书店经销

开本 787×1092 1/16 印张 15 字数 365 000

2012 年 1 月第 2 版 2012 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81118-951-3/G·631 定价：28.00 元

序

最近，花了几天工夫拜读了由王涛老师主编的《高中数学专题性问题》一书，长了不少见识，从中学到了不少东西。

高中数学多知识点、多方法的交汇结点（也是高考的热点和亮点），其问题解决能力的养成，既是数学教与学的出发点，也是数学教与学的归宿。《教育规划纲要》提出“创新人才培养模式”，要大力培养应用型人才、复合型人才和拔尖创新人才。《高中数学专题性问题》一书，构筑了一个旨在提升学生处理信息的能力、综合分析和解决问题的能力的教与学方案，对培养和提高中学生的一般能力（思考能力、想象能力和创新能力），贯彻二期课改精神具有积极的现实意义，其中的问题探究，也有助于创新人才的培养。

《高中数学专题性问题》一书凝聚了作者多年的心血，是作者多年研究、探索和实践的结晶。该书以高中数学多知识点、多方法的交汇结点为专题，分九个专题，每个专题设“问题综述”、“典型问题分析”和“高考预测”三部分。“问题综述”突出问题解决，对所述专题的地位以及在高考中的比例及其演变等作了高屋建瓴的阐述。“典型问题分析”则从“题海”中精心筛选、改编创新，整合了具有时代性、典型性的问题，策略性地分析系列问题的共性和解决问题的关键与着眼点，不仅给出了专题性问题的解决方案，更详尽地给出了解决问题的探究过程，展示了解决问题的思维方式和解决策略。“高考预测”则对高考作了展望。

该书一个显著的特点是将思考问题、解决问题的全过程详尽地以专题性问题展示出来，这远比只给出问题的答案重要，对培养学生的能力大有裨益！作者还通过专题性问题的演变与引申，给予学生联想和自由发展的空间。本人认为，此书对提高学生对专题性问题的认识、提高应用数学知识解决问题的意识以及提高解决专题性问题的能力具有很好的作用。

靳全勤

2012年元月10日

于同济大学致远楼

前　言

为提高整个中华民族的文化素质，中学教育必须进行重大改革已为世人共识．教育部在《基础教育课程改革纲要(试行)》中明确提出："改变课程内容'难、繁、偏、旧'和过于注重书本知识的现状，加强课程内容与学生生活以及现代社会和科技发展的联系，关注学生的学习兴趣和经验，精选终身学习必备的基础知识和技能．改变课程实施过于强调接受学习、死记硬背、机械训练的现状，倡导学生主动参与、乐于探究、勤于动手，培养学生处理信息的能力、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力以及交流与合作的能力．"同时，教育部还倡导推行研究性学习，并在《普通高中"研究性学习"实施指南(试行)》中将目标定位于：(学生)获得亲自参与研究探索的积极体验；提高发现问题和解决问题的能力；学会分享与合作；培养科学态度和科学道德；培养对社会的责任心和使命感；激活各科学习中的知识储存，尝试相关知识的综合运用．上海市则在推行研究性学习的同时，积极倡导拓展性学习．我们认为，拓展性学习是研究性学习的先导，研究性学习是拓展性学习的更高形式．因而如何开展拓展性研究性学习，成为中学教育界共同关注的问题．作为一个尝试，我们编写了"高中数学拓展性研究性学习丛书"．

本书是"高中数学拓展性研究性学习丛书"之一，针对教育改革的热点与亮点——加强一般能力(学习能力、探索能力、应用能力、创新能力)的培养，以数学知识点(包括方法)间的交汇结点为专题，构筑了一个旨在提升学生处理信息的能力、综合分析和解决问题的能力的方案．本书是几位具有丰富教学经验的高三把关教师长期教学实践和教学研究的结晶．具有以下鲜明特点：

1．本书分九个专题，每个专题分"问题综述"、"典型问题分析"、"高考预测"三个部分，它们是多层面的．其一，突出问题解决，对所述专题在高考中的地位、比例及其演变等作了高屋建瓴的阐述；其二，针对所述专题综合性(包括知识点，思想方法，能力要求)强的特点，作了较系统的综合分析；其三，既有对高考考情的点拨，又有数学问题解决能力的拓展．

2．本书从"题海"中整合了具有时代性、典型性、精练性和统领性的典型问题，并对问题的解决作了较为详尽的剖析．

3．本书以认知规律为前提，对问题作进一步的研究与拓展．包括如何切入问题、怎

样分析等思维方式训练，思想方法合理性的选择，新情境、新问题、新题型等的处理策略等.

4. 本书借助于针对性强、前瞻性和实效性好的每个专题后的“自我检测”来实现作者对高考的进一步展望.

本书既可作为高三学生的高考第二、第三轮的复习用书，更可作为高一、高二学生的拓展性研究性学习用书，也可作为相关教师以及广大数学爱好者的参考书.

本书作为作者多年高考复习经验的浓缩与升华，我们希望莘莘学子能从中得到启发和帮助，越过“题海”，抵达成功的彼岸. 当然书中尚有许多不足，随着教育改革的深入，其内容也将需要作进一步的补充和调整，需要更深入地动态地关注中学数学教育改革，关注高考，我们真诚地希望得到读者的意见和建议.

作　者

2012 年 1 月 8 日

目　　录

专题 1　函数与方程问题

1.1 问题综述

用函数观点来研究方程问题，用方程思想来解决函数问题是历年高考的热点之一. 一般说来，方程 $F(x, y)=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$. 例如，由方程 $x+2y-1=0$ 可解得函数 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，由方程 $x^2-xy=1$ 可解得函数 $y=x-\frac{1}{x}$，等等. 有时，由方程 $F(x, y)=0$ 解得的显函数不唯一. 例如，由方程 $y^2=2px\ (p>0)$ 可解出函数 $y=\sqrt{2px}$ 或 $y=-\sqrt{2px}$；由方程 $2x^2=3y^2$ 解得 $y=\frac{\sqrt{6}}{3}x$ 或 $y=-\frac{\sqrt{6}}{3}x$.

反过来，方程 $f(x)=0$，它的解可以看作函数 $y=f(x)$ 的值为零时 x 的值. 例如，方程 $\frac{3}{5}x+6=0$ 的解可看作函数 $y=\frac{3}{5}x+6$ 在 $y=0$ 时 x 的值；方程 $2x^2+3x-1=0$ 的解，可看作函数 $y=2x^2+3x-1$ 在 $y=0$ 时 x 的值.

这样，对于给定的方程 $f(x)=0$，在转化成相应的函数 $y=f(x)$ 后，就可以用函数的观点来研究方程. 同样，对于给定的函数 $y=f(x)$，若可以较方便地找到方程 $F(x, y)=0$，使得满足 $\{(x, y) \mid y=f(x)\} \subseteq \{(x, y) \mid F(x, y)=0\}$，那么就可以用方程思想来研究函数问题. 例如函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$，就可以通过抛物线 $y^2=x$ 去研究.

1.2 典型问题分析

问题 1　m 为何值时，方程 $2x^2+(m-2)x+m-5=0$ 的一个根大于 2，另一个根小于 2?

【分析与解】 可利用函数观点去研究方程根的分布，关键是写出符合条件的与方程相应的二次函数.

设 $f(x)=2x^2+(m-2)x+m-5$，其图像是开口向上的抛物线(图 1-1). 一个根小于 2，另一个根大于 2 的充要条件是 $f(2)<0$，即 $8+2(m-2)+m-5<0$.

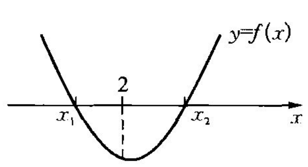

图 1-1

所以，$m<\frac{1}{3}$.

问题 2 已知 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ 为实系数二次方程，而方程 $f(x)+t(x-k)=0$ 对于任何实数 t 都有实数根，试求 k 与方程 $f(x)=0$ 的根的关系.

【分析与解】 由 $\left.\begin{array}{l}f(x)+t(x-k)=0\\ f(x)=ax^2+bx+c\end{array}\right\}\Rightarrow ax^2+(b+t)x+(c-kt)=0.$ （Ⅰ）

因为方程（Ⅰ）有实根，所以 $\Delta\geqslant 0$，即

$$t^2+2(b+2ak)t+b^2-4ac\geqslant 0. \tag{Ⅱ}$$

设

$$p(t)=t^2+2(b+2ak)t+b^2-4ac, \tag{Ⅲ}$$

则 $p(t)$ 是 t 的二次函数，其图像是开口向上的抛物线.

由已知，对任何实数 t 方程（Ⅰ）都有实数根，即不等式（Ⅱ）对任何 t 都成立，所以二次函数 $p(t)\geqslant 0$. 其图像或在 x 轴上方，或与 x 轴相切.

所以，$\Delta'=4(b+2ak)^2-4(b^2-4ac)\leqslant 0$

$\Rightarrow abk+a^2k^2+ac\leqslant 0.$ （Ⅳ）

当 $t=0$ 时，方程（Ⅰ）就是 $f(x)=0$，所以 $f(x)=0$ 必有两实根.

设两实根为 x_1、x_2，且 $x_1\leqslant x_2$.

若 $a>0$，由（Ⅳ）得 $ak^2+bk+c\leqslant 0$，所以

$$x_1\leqslant k\leqslant x_2;$$

若 $a<0$，由（Ⅳ）得 $ak^2+bk+c\geqslant 0$，所以

$$k\leqslant x_1 \text{ 或 } k\geqslant x_2.$$

问题 3 已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为 a，且不等式 $f(x)>-2x$ 的解集为 $(1,3)$.

(1) 若方程 $f(x)+6a=0$ 有两个相等的根，求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若 $f(x)$ 的最大值为正数，求 a 的取值范围.

【分析与解】 (1) 因为 $f(x)+2x>0$ 的解集为 $(1,3)$，所以 $f(x)+2x=a(x-1)(x-3)$，且 $a<0$. 因而

$$f(x)=a(x-1)(x-3)-2x=ax^2-(2+4a)x+3a. \tag{Ⅰ}$$

由方程 $f(x)+6a=0$ 得

$$ax^2-(2+4a)x+9a=0. \tag{Ⅱ}$$

因为方程（Ⅱ）有两个相等的根，所以

$$\Delta=[-(2+4a)]^2-4a\cdot 9a=0,$$

即 $5a^2-4a-1=0$. 解得 $a=1$ 或 $a=-\frac{1}{5}$.

由于 $a<0$，舍去 $a=1$. 将 $a=-\frac{1}{5}$ 代入（Ⅰ）得 $f(x)$ 的解析式：

$$f(x)=-\frac{1}{5}x^2-\frac{6}{5}x-\frac{3}{5}.$$

(2) 由 $f(x)=ax^2-2(1+2a)x+3a=a\left(x-\frac{1+2a}{a}\right)^2-\frac{a^2+4a+1}{a}$ 及 $a<0$，可得 $f(x)$ 的最大值为 $-\frac{a^2+4a+1}{a}$.

由 $\begin{cases}-\frac{a^2+4a+1}{a}>0,\\ a<0,\end{cases}$ 解得 $a<-2<-\sqrt{3}$ 或 $-2+\sqrt{3}<a<0$.

故当 $f(x)$ 的最大值为正数时，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,\ -2-\sqrt{3})\cup(-2+\sqrt{3},\ 0)$.

问题 4 已知函数 $f(x)=3^x$，$f(x)$ 的反函数记为 $f^{-1}(x)$，$f^{-1}(18)=a+2$，函数 $g(x)=3^{ax}-4^x$，求 $g(x)$ 的解析式.

【分析与解】 已知函数 $y=f(x)$ 求 $f^{-1}(a)$. 一般是先求出反函数 $f^{-1}(x)$，再令 $x=a$ 求出函数值. 其实这类问题可根据反函数性质把求 $f^{-1}(x)$ 的过程省掉，只要由 $f(x)=a$ 解出方程的解 x，则得 $f^{-1}(a)=x$.

因为 $f^{-1}(18)=a+2$，所以 $f(a+2)=18$.

又因为 $f(x)=3^x$，所以 $3^{a+2}=18$，所以 $a=\log_3 2$.

所以 $g(x)=2^x-4^x$.

问题 5 函数 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx$（$a$、$b$、$c$ 为常数，且均不为零，$a^2-b^2\neq 0$）. 求函数 $f(x)$ 的表达式.

【分析与解】 利用 f 下的变量间存在着互为倒数的关系，进行代换，构造方程组来求得函数解析式.

因为 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx$，

上式中用 $\frac{1}{x}$ 代换 x 得 $af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=c\cdot\frac{1}{x}$，

所以得方程组 $\begin{cases}af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx,\\ af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=c\cdot\frac{1}{x}.\end{cases}$

解得 $f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(acx-\frac{bc}{x}\right)$.

问题 6 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $mf(2x-3)+nf(3-2x)=2x$，其中 m、n 为常数，且 $|m|\neq|n|$，求 $f(x)$.

【分析与解】 解题关键是利用 f 下的变量间存在着互为相反数的关系，进行代换，构造方程组来求得函数解析式.

设 $u=2x-3$，则 $-u=3-2x$.

$$mf(2x-3)+nf(3-2x)=2x \Rightarrow mf(u)+nf(-u)=u+3. \qquad (\text{Ⅰ})$$

方程(Ⅰ)中用 $-u$ 代换 u，得 $\quad mf(-u)+nf(u)=-u+3. \qquad$ (Ⅱ)

$m\times$(Ⅰ)$-n\times$(Ⅱ)得 $\quad m^2f(u)-n^2f(u)=u(m+n)+3(m-n)$.

所以 $\quad (m^2-n^2)f(u)=u(m+n)+3(m-n)$.

因为 $|m|\neq|n|$，所以 $f(u)=\dfrac{u}{m-n}+\dfrac{3}{m+n}$.

所以，$f(x)=\dfrac{x}{m-n}+\dfrac{3}{m+n}$.

问题 7 设 $f(x)$ 是 x 的二次函数，$g(x)=2^x\cdot f(x)$，且 $g(x+1)-g(x)=2^{x+1}x^2$，求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式.

【分析与解】 可利用待定系数法，建立方程组求得 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式.

设 $f(x)=ax^2+bx+c$，则 $g(x)=2^x(ax^2+bx+c)$.

又因为 $g(x+1)-g(x)=2^{x+1}x^2$，

所以 $2^{x+1}[a(x+1)^2+b(x+1)+c]-2^x(ax^2+bx+c)=2^{x+1}\cdot x^2$，

即 $\quad ax^2+(4a+b)x+(2a+2b+c)=2x^2$.

所以 $\begin{cases} a=2 \\ 4a+b=0 \\ 2a+2b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2, \\ b=-8, \\ c=12. \end{cases}$

所以 $f(x)=2x^2-8x+12$，$g(x)=2^{x+1}(x^2-4x+6)$.

问题 8 设 $f(x)=3ax^2+2bx+c$. 若 $a+b+c=0$，$f(0)>0$，$f(1)>0$，求证：

(1) $a>0$ 且 $-2<\dfrac{a}{b}<-1$；

(2) 方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有两个实根.

【证明】 (1) 因为 $f(0)>0$，$f(1)>0$，所以 $c>0$，$3a+2b+c>0$.

由条件 $a+b+c=0$，消去 b，得 $a>c>0$；

由条件 $a+b+c=0$，消去 c，得 $a+b<0$，$2a+b>0$.

故 $-2<\dfrac{b}{a}<-1$.

(2) 抛物线 $f(x)=3ax^2+2bx+c$ 的顶点坐标为 $\left(-\dfrac{b}{3a},\dfrac{3ac-b^2}{3a}\right)$，

在 $-2<\dfrac{b}{a}<-1$ 的两边乘以 $-\dfrac{1}{3}$，得 $\dfrac{1}{3}<-\dfrac{b}{3a}<\dfrac{2}{3}$.

又因为 $f(0)>0$，$f(1)>0$，而 $f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)=-\dfrac{a^2+c^2-ac}{3a}<0$，

所以方程 $f(x)=0$ 在区间 $\left(0,-\dfrac{b}{3a}\right)$ 与 $\left(-\dfrac{b}{3a},1\right)$ 内分别有一实根.

故方程 $f(x)=0$ 在$(0,1)$内有两个实根.

问题 9 设 a 为实数,设函数 $f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值为 $g(a)$.

(1) 设 $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$,求 t 的取值范围,并把 $f(x)$表示为 t 的函数 $m(t)$;

(2) 求 $g(a)$;

(3) 试求满足 $g(a)=g\left(\dfrac{1}{a}\right)$ 的所有实数 a.

【分析与解】 (1) 令 $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$,

要使有 t 意义,必须 $1+x\geqslant 0$ 且 $1-x\geqslant 0$,即 $-1\leqslant x\leqslant 1$,

所以 $t^2=2+2\sqrt{1-x^2}\in[2,4]$, $t\geqslant 0$. (*)

从而,t 的取值范围是$[\sqrt{2},2]$.

由(*)得$\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{2}t^2-1$,

所以 $m(t)=a\left(\dfrac{1}{2}t^2-1\right)+t=\dfrac{1}{2}at^2+t-a$, $t\in[\sqrt{2},2]$.

(2) 由题意知 $g(a)$即为函数 $m(t)=\dfrac{1}{2}at^2+t-a$, $t\in[\sqrt{2},2]$ 的最大值.

注意到直线 $t=-\dfrac{1}{a}$ 是抛物线 $m(t)=\dfrac{1}{2}at^2+t-a$ 的对称轴,分以下几种情况讨论.

① 当 $a>0$ 时,函数 $y=m(t)$, $t\in[\sqrt{2},2]$ 的图像是开口向上的抛物线的一段,

由 $t=-\dfrac{1}{a}<0$ 知 $m(t)$在$[\sqrt{2},2]$上单调递增,所以 $g(a)=m(2)=a+2$.

② 当 $a=0$ 时,$m(t)=t$, $t\in[\sqrt{2},2]$,所以 $g(a)=2$.

③ 当 $a<0$ 时,函数 $y=m(t)$, $t\in[\sqrt{2},2]$ 的图像是开口向下的抛物线的一段,

若 $t=-\dfrac{1}{a}\in[0,\sqrt{2}]$,即 $a\leqslant-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,则 $g(a)=m(\sqrt{2})=\sqrt{2}$;

若 $t=-\dfrac{1}{a}\in(\sqrt{2},2]$,即 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\dfrac{1}{2}$,则 $g(a)=m\left(-\dfrac{1}{a}\right)=-a-\dfrac{1}{2a}$;

若 $t=-\dfrac{1}{a}\in(2,+\infty)$,即 $-\dfrac{1}{2}<a<0$,则 $g(a)=m(2)=a+2$.

$$综上有\ g(a)=\begin{cases}a+2, & a>-\dfrac{1}{2},\\ -a-\dfrac{1}{2a}, & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\dfrac{1}{2},\\ \sqrt{2}, & a\leqslant-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

(3) ① 当 $a<-2$ 时,$\dfrac{1}{a}>-\dfrac{1}{2}$,此时 $g(a)=\sqrt{2}$, $g\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{a}+2$.

由 $2+\frac{1}{a}=\sqrt{2}$，解得 $a=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，与 $a<-2$ 矛盾.

② 当 $-2\leqslant a<-\sqrt{2}$ 时，$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{1}{a}\leqslant-\frac{1}{2}$，此时 $g(a)=\sqrt{2}$，$g\left(\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}-\frac{a}{2}$.

由 $\sqrt{2}=-\frac{1}{a}-\frac{a}{2}$，解得，$a=-\sqrt{2}$ 与 $a<-\sqrt{2}$ 矛盾.

③ 当 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$-\sqrt{2}\leqslant\frac{1}{a}\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时 $g(a)=\sqrt{2}=g\left(\frac{1}{a}\right)$.

所以 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

④ 当 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，$-2\leqslant\frac{1}{a}<-\sqrt{2}$，此时 $g(a)=-a-\frac{1}{2a}$，$g\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{2}$.

由 $-a-\frac{1}{2a}=\sqrt{2}$，解得 $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，与 $a>-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 矛盾.

⑤ 当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$\frac{1}{a}<-2$，此时 $g(a)=a+2$，$g\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{2}$.

由 $a+2=\sqrt{2}$，解得 $a=\sqrt{2}-2$，与 $a>-\frac{1}{2}$ 矛盾.

⑥ 当 $a>0$ 时，$\frac{1}{a}>0$，此时 $g(a)=a+2$，$g\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}+2$.

由 $a+2=\frac{1}{a}+2$，解得 $a=\pm1$，由于 $a>0$，得 $a=1$.

综上所述，满足 $g(a)=g\left(\frac{1}{a}\right)$的所有实数 a 为 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$，或 $a=1$.

问题 10 解方程：$3^x+4^x=5^x$.

【分析与解】 可根据指数函数的单调性，判别方程解的唯一性. 一般地，如果函数 $f(x)$ 是单调递增(或递减)，那么方程 $f(x)=0$ 至多有一个实数解.

因为 $3^x+4^x=5^x$，

显然当 $x=2$ 时，上式符合勾股定理. 所以 $x=2$ 是方程的一个解.

又原方程 $3^x+4^x=5^x$ 变形得 $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1=0$.

设 $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$，则 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的递减函数.

若 $x>2$，则 $f(x)<f(2)=0$，即$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1<0$.

所以方程没有比 2 大的解.

同理可得，$x<2$ 时，$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1>0$，方程没有比 2 小的解.

所以原方程只有唯一的实数解 $x=2$.

问题 11 当 a 为何值时，方程 $\lg(x+1)+\lg(4-x)=\lg(a-x)$ $(a\in\mathbf{R})$ 有不同两根？仅有一根？无根？

【分析与解】 可把方程转化为二次函数，然后根据二次函数图像与 x 轴相交的情况来解决问题.

因为方程 $\lg(x+1)+\lg(4-x)=\lg(a-x)$，

所以 $(x+1)(4-x)=a-x\Rightarrow -x^2+4x+4-a=0$ $(-1<x<4)$.

令 $f(x)=-x^2+4x+4-a$ $(-1<x<4)$.

若方程在区间$(-1,\ 4)$中有两根时，则

$$\begin{cases}\Delta=16+16-4a>0\\ f(4)=4-a<0\\ f(-1)=-1-a<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<8\\ a>4\\ a>-1\end{cases}\Rightarrow 4<a<8.$$

若方程在区间$(-1,\ 4)$中仅有一根，则

$$f(4)\cdot f(-1)=(4-a)(-1-a)<0\Rightarrow -1<a<4.$$

经检验，当 $a=8$ 时，$x=2$；当 $a=4$ 时，$x_1=0$，$x_2=4$；当 $a=-1$ 时，$x_1=-1$，$x_2=5$.

综上所述，当 $4<a<8$ 时，方程有两根；当 $-1<a\leqslant 4$ 或 $a=8$ 时，方程有一根；当 $a\leqslant -1$ 或 $a>8$ 时，方程无根.

问题 12 关于 x 的方程 $(x^2-1)^2-|x^2-1|+k=0$，给出下列四个命题：

① 存在实数 k，使得方程恰有 2 个不同的实根；

② 存在实数 k，使得方程恰有 4 个不同的实根；

③ 存在实数 k，使得方程恰有 5 个不同的实根；

④ 存在实数 k，使得方程恰有 8 个不同的实根；

其中假命题的个数是(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【分析与解】 关于 x 的方程 $(x^2-1)^2-|x^2-1|+k=0$ 可化为

$$(x^2-1)^2-(x^2-1)+k=0\ (x\geqslant 1 \text{ 或 } x\leqslant -1) \tag{Ⅰ}$$

或

$$(x^2-1)^2+(x^2-1)+k=0\ (-1<x<1) \tag{Ⅱ}$$

① 当 $k=-2$ 时，方程(Ⅰ)的解为 $\pm\sqrt{3}$，方程(Ⅱ)无解，原方程恰有 2 个不同的实根；

② 当 $k=\dfrac{1}{4}$ 时，方程(Ⅰ)有 2 个不同的实根 $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，方程(Ⅱ)有 2 个不同的实根 $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即原方程恰有 4 个不同的实根；

③ 当 $k=0$ 时，方程(Ⅰ)的解为 $-1,1,\pm\sqrt{2}$，方程(Ⅱ)的解为 $x=0$，原方程恰有 5 个不同的实根；

④ 当 $k=\dfrac{2}{9}$ 时，方程(Ⅰ)的解为 $\pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}$，$\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，方程(2)的解为 $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，即原方程恰有 8 个不同的实根.

故选 A.

问题 13 问方程 $\log_2(x+4)=3^x$ 的实数解的个数是几个?

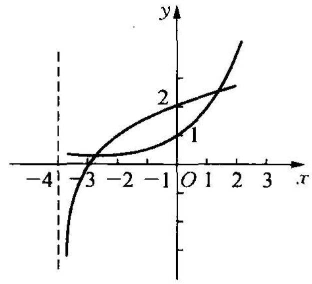

图 1-2

【分析与解】 求出方程的解,再数其方程的解的个数的方法这里是行不通的,应该把方程转化为函数,再利用数形结合的思想解决问题.

方程 $\log_2(x+4)=3^x \Leftrightarrow \begin{cases} y=\log_2(x+4), \\ y=3^x. \end{cases}$

在同一个直角坐标系中,作出 $\begin{cases} y=\log_2(x+4), \\ y=3^x \end{cases}$ 两个函数的图像(图 1-2). 由于两曲线有两个公共点,因此原方程有两个实数解.

问题 14 关于 x 的方程 $9^x+(a+2)\cdot 3^x+4=0$ 有实数解,求实数 a 的取值范围.

【分析与解】 设 $3^x=t\in(0,+\infty)$,则原方程等价变形为二次方程 $t^2+(a+2)t+4=0$ 有正根.

因为两根之积为正,原方程必有两个正根,得到

$$\begin{cases} \Delta=(a+2)^2-16\geqslant 0, \\ -(a+2)>0 \end{cases} \Rightarrow a\leqslant -6.$$

另解:设 $3^x=t\in(0,+\infty)$,则原方程等价变形为 $a+2=-\left(t+\dfrac{4}{t}\right)$.

设函数 $y=a+2=-\left(t+\dfrac{4}{t}\right)$,则“原方程有实根”等价于“两个函数图像有交点”,即常量函数与分式函数有交点,得到 $a+2\leqslant -4 \Rightarrow a\leqslant -6$.

【研究与拓展】

变式 1 关于 x 的方程 $(\log_3 x)^2+(a+2)\cdot\log_3 x+4=0$ 有正实数解,求实数 a 的取值范围.

【分析与解】 设 $\log_3 x=t\in\mathbf{R}$,则原方程等价变形为二次方程 $t^2+(a+2)t+4=0$ 有实根,则 $(a+2)^2-16\geqslant 0 \Rightarrow a\geqslant 2$ 或 $a\leqslant -6$.

变式 2 关于 x 的方程 $9^x+(a+2)\cdot 3^x+4=0$ 在 $[0, 1]$ 上有且仅有一解,求实数 a 的取值范围.

【分析与解】 设 $3^x=t\in[1, 3]$,则原方程等价变形为 $y=-(a+2)=t+\dfrac{4}{t}$,右边的函数在 $[1, 2]$ 上单减,在 $[2, 3]$ 上单增,方程有且仅有一解等价于右边的分式函数与常量函数有且仅有一个交点,得到 $-(a+2)\in\left(\dfrac{13}{3}, 5\right]\cup\{4\}$,即 $-7\leqslant a<-\dfrac{19}{3}$ 或 $a=-6$.

变式 3 关于 x 的不等式 $9^x+(a+2)\cdot 3^x+4<0$ 的解集为 $\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

【分析与解】 设 $3^x=t\in(0,+\infty)$,原不等式等价变形为 $y=-(a+2)>t+\dfrac{4}{t}$,当 $-(a+2)\leqslant 4$ 时,即 $a\geqslant -6$ 时,原不等式的解集为 $\varnothing$.

变式 4 关于 x 的方程 $\lg(x-1)+\lg(3-x)=\lg(a-2x)$ 有解，求实数 a 的取值范围.

【分析与解】 原方程等价于 $\begin{cases} x>1, \\ 3-x>0, \\ (x-1)(3-x)=a-2x \end{cases} \Rightarrow a=-(x-3)^2+6, x\in$ $(1,3)$，所以 $a\in(2,6)$，即 a 的取值范围是 $2<a<6$.

变式 5 设 $a>1$，若对于任意的 $x\in[a,2a]$，都有 $y\in[a,a^2]$ 满足方程 $\log_a x+\log_a y=3$，这时 a 的取值集合为(　　).

(A) $\{a\mid 1<a\leqslant 2\}$　　(B) $\{a\mid a\geqslant 2\}$

(C) $\{a\mid 2\leqslant a\leqslant 3\}$　　(D) $\{2,3\}$

【分析与解】 题设给出的对数方程实际上是函数 $y=\dfrac{a^3}{x}$，当 $x\in[a,2a]$ 时，函数的值域为 $\left[\dfrac{a^2}{2},a^2\right]$，由 $\left[\dfrac{a^2}{2},a^2\right]\subseteq[a,a^2]$，得到 $a\geqslant 2$，故选 B.

变式 6 已知函数 $f(x)=\log_2(2^x+1)-\dfrac{x}{2}$.

(1) 求证：对任意的 $b\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\log_2(2^x+1)-\dfrac{x}{2}$ 的图像与直线 $y=\dfrac{x}{2}+b$ 最多有一个交点；

(2) 设函数 $g(x)=\log_4(a-2^x)$，若函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图像至少有一个交点，求实数 a 的取值范围.

【分析与解】 (1) 原问题等价于方程 $\log_2(2^x+1)-\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{2}+b$ 解的讨论.

因为 $2^x+1=2^{x+b}\Rightarrow 2^x(2^b-1)=1$.

当 $b\leqslant 0$ 时，方程无解，即两图像无交点；

当 $b>0$ 时，方程有一解，即两图像有一个交点，得证.

(2) 由 $\begin{cases} y=\log_2(2^x+1)-\dfrac{x}{2}, \\ y=\log_4(a-2^x) \end{cases} \Rightarrow \log_2(2^x+1)-\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}\log_2(a-2^x)\Rightarrow(2^x+1)^2=$ $2^x(a-2^x)$，设 $2^x=t>0$，则原问题等价于方程 $2t^2+(2-a)t+1=0$ 至少有一个正解.

当 $\Delta=(a-2)^2-8=0\Rightarrow a=2\pm 2\sqrt{2}$，$a=2-2\sqrt{2}$ 不合，有一个交点；

当 $\begin{cases} \Delta=(a-2)^2-8>0, \\ a-2>0 \end{cases} \Rightarrow a>2+2\sqrt{2}$，有两个不同的交点.

综上，当 $a\geqslant 2+2\sqrt{2}$ 时，函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图像至少有一个交点.

1.3 高考预测

函数与方程这一类问题，高考考查的热点是方程解的讨论或方程有解的条件，通常以二次方程与对数方程等方程中含有参数的问题居多，而解题关键是如何把问题转化为熟悉的