21世纪高等学校规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

主编 曾金平 张忠志

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21世纪高等学校规划教材

线性代数

主　编　曾金平　张忠志

副主编　关　力　刘能东　余晋昌

北京邮电大学出版社

·北京·

内 容 简 介

本书为大学本科的线性代数教材.全书共分 3 章:矩阵、线性方程组和二次型.内容包括矩阵、行列式、向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型及其标准形等.本书以矩阵为主线,在不失教材的系统性的基础上简化了数学基础理论,而突出了实际运算.每章都提供 1～2 篇阅读材料,通过阅读这部分内容,可进一步加强对学生的逻辑思维能力、实际应用能力以及创新性能力的培养.此外,每章后面均有小结,方便学生对各章的学习内容进行归纳和总结.习题按基本要求和较高要求分为 A、B 两组,方便各类学校的教师和学生根据自身的要求进行取舍.

本书可作为高等学校理工科类(非数学专业)以及经管类各专业的线性代数课程的教材,也可供相关专业人员和广大教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/曾金平,张忠志主编.--北京:北京邮电大学出版社,2010.8

ISBN 978-7-5635-2327-6

Ⅰ.①线… Ⅱ.①曾… ②张… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 147706 号

书　　名 线性代数

主　　编 曾金平　张忠志

责任编辑 苏文刚

出版发行 北京邮电大学出版社

社　　址 北京市海淀区西土城路 10 号(100876)

电话传真 010-62282185(发行部)　010-62283578(传真)

电子信箱 ctrd@buptpress.com

经　　销 各地新华书店

印　　刷 北京忠信诚胶印厂

开　　本 787 mm×960 mm　1/16

印　　张 9

字　　数 179 千字

版　　次 2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2327-6　　　　定价:18.00 元

前　言

本书是在现有线性代数教科书内容的基础上，根据作者多年来在教学实践和教学研究中积累的经验，认真调查研究国内外数学教育的改革动态，力求化枯燥为生动，化繁难为容易，理论和数学概念与实际背景相结合，在内容编排上既保持线性代数课程逻辑性强的特点又加强计算能力的训练，使学生的数学能力（抽象思维、理论推理、计算技能等）得到培养和提高.

线性代数作为一门数学基础课，其本身理论性强，计算繁杂，知识枯燥而抽象. 为了使学生易学好懂，笔者对线性代数的基本内容作了部分整合. 全书在内容编排上，以矩阵为中心，矩阵的初等变换突出行变换（在实际计算时基本上不讲初等列变换，便于学生理解和计算），如用矩阵的初等行变换化矩阵为行标准形、求矩阵的秩和可逆方阵的逆矩阵等. 行列式的定义采用 Laplace 展开递推定义，其计算结合方阵的行列式以及行列式的性质，在潜移默化中使学生熟悉通过计算机计算行列式的数值方法. 因此内容显得新颖、简洁而有条理. 此外，本书将克莱姆法则作为逆矩阵的一个应用，使得其理论证明较易理解和掌握. 带 * 内容有一定难度，可以根据需要选学. 本书在结构上具有以下特点：

1. 结构合理，条理清晰，由浅入深，简单明了，实例丰富；

2. 适当减少一些烦琐的定理证明和公式推导，代以较多的例题；

3. 每章配有小结和阅读材料，便于学生在掌握各章的基本概念、基本理论和计算方法的基础上，进行知识总结和创新性思考；

4. 习题分 A、B 两类，方便各类学校的教师和学生根据自身的要求进行取舍.

本书使用面广，除可作为大学理工科类各专业（非数学类）和经管类各专业线性代数教材和教学参考书外，也可供相关专业人员和广大教师参考.

由于作者水平所限，书中难免有不妥之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

目　　录

第1章 矩　阵

矩阵是线性代数中的一个极其重要的概念，它贯穿于线性代数的各个分支，同时矩阵也是高等数学及其他学科不可缺少的基本数学工具. 本章主要介绍矩阵的概念及其基本运算和性质以及行列式的概念和基本性质.

第1节 矩阵的概念

一、矩阵的定义

考虑产品调运问题. 设某产品有3个产地 A_1,A_2,A_3，4个销地 B_1,B_2,B_3,B_4，且从产地 A_i 到销地 B_j 调运该产品的数量为 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$. 则该产品的调运方案可用如下数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

表示. 再考虑线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-\ x_3=5, \\ 2x_1-3x_2+\ x_3=7, \\ -4x_1+\ x_2-5x_3=-1. \end{cases}$$

这个方程组的解可由各个方程中未知量 x_1,x_2,x_3 的系数及右边常数项唯一确定. 由此，上述方程组可用数表

克莱姆（Cramer,Gabriel,1704—1752），瑞士数学家. 主要著作是《代数曲线的分析引论》（1750），首先定义了正则、非正则、超越曲线和无理曲线等概念，第一次正式引入坐标系的纵轴（Y轴），然后讨论曲线变换，并依据曲线方程的阶数将曲线进行分类. 为了确定经过5个点的一般二次曲线的系数，应用了著名的“克莱姆法则”，即由线性方程组的系数确定方程组解的表达式. 该法则于1729年由英国数学家马克劳林得到，1748年发表，但克莱姆的优越符号使之流传.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 7 \\ -4 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

表示.由此,我们引入矩阵的概念.

定义 1.1.1 称由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为一个 $m\times n$ **型矩阵**,其中 a_{ij} 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素,下标 i 与 j 分别为元素 a_{ij} 的行标和列标.

上面矩阵可记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.一般地,矩阵可用大写黑体字母 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ 等来表示.

二、几类特殊的矩阵

● 所有元素都是 0 的 $m\times n$ 型矩阵称为**零矩阵**,记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$,即

$$\boldsymbol{O}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

● 称 $1\times n$ 型矩阵 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为**行矩阵**;$m\times 1$ 型矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

为**列矩阵**.

例如,矩阵 $(2,3,1,-1)$ 是一个 1×4 的行矩阵,而矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

是一个 4×1 的列矩阵.

● 称 $n\times n$ 型矩阵为 n 阶**方阵**. 对于 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

连接其左上角元素 a_{11} 和右下角元素 a_{nn} 的连线称为矩阵 A 的主对角线. 位于主对角线上的元素，即 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$，称为矩阵 A 的**对角元**.

● 矩阵 A 与 B 的行数与列数都相等，则称 A 与 B 为同型矩阵.

● 在逻辑上，1×1 矩阵 (a) 与数 a 不加分别.

● 对角元素都是 1，而其他元素全为 0 的 n 阶方阵，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n},$$

称为 n 阶**单位矩阵**，记为 E_n 或 I_n，在不引起混淆的情况下，简记为 E 或 I，即

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

● 除对角元以外，其余元素全为 0 的 n 阶方阵称为 n 阶**对角阵**，记为

$$D=\operatorname{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)\triangleq\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

显然，n 阶单位矩阵是对角阵，反之不然.

● 主对角线下（上）方的元素全为 0 的 n 阶方阵，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

称为**上（下）三角阵**. 例如，

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

分别是上三角阵和下三角阵. 显然,对角阵既是上三角阵也是下三角阵,反之不然.

● 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵,如果 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称矩阵 A 为**对称矩阵**. 例如矩阵

$$\begin{pmatrix}1&-2&3\\-2&5&-1\\3&-1&-4\end{pmatrix}$$

是一个 3 阶对称矩阵.

第 2 节　矩阵的运算

矩阵的运算是客观世界中数量关系的一种反映,是矩阵理论中最基本的内容. 构成矩阵的基本元素是数,从某种角度来说,我们可以运用数的运算来定义矩阵的运算,并利用数的运算性质来研究矩阵的运算性质. 为此,先给出两个矩阵相等的定义.

定义 1.2.1　称同型矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和矩阵 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ **相等**,如果对任何的 i 和 j $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,都有 $a_{ij}=b_{ij}$.

例如,给定矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5&13\\3&8\end{pmatrix}\quad 和\quad C=\begin{pmatrix}r&s&t\\u&v&w\end{pmatrix},$$

则矩阵 $A=B$ 的充分必要条件是:$a=5,b=13,c=3$ 和 $d=8$. 由定义 1.2.1 可知,不同型的两个矩阵不相等. 因此,在上面的例子中,无论是 A 还是 B,都不可能等于 C.

一、矩阵的加法

定义 1.2.2(矩阵的加法)　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵,规定 A 与 B 的和是由 A 与 B 的对应元素相加所得到的 $m\times n$ 型矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$,即

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

记为 $C=A+B$. 换句话说,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

由矩阵加法的定义不难证明,矩阵加法满足下列运算规律:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) 对任一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及同型零矩阵 $\boldsymbol{O}$,有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$.

二、矩阵数乘

定义 1.2.3(矩阵数乘) 设 λ 为实数,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 为 $m\times n$ 型矩阵,规定 λ 与 $\boldsymbol{A}$ 的数乘是一个 $m\times n$ 矩阵,其第 i 行第 j 列元素等于数 λ 乘以 $\boldsymbol{A}$ 的对应元素 a_{ij},记为 $\lambda\boldsymbol{A}$,即

$$\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

由矩阵加法和数乘运算的定义,两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差可定义为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-1)\boldsymbol{B}.$$

矩阵的加法和数乘运算统称为矩阵的线性运算.根据矩阵的线性运算的定义可以证明,矩阵的线性运算满足下列运算规律:

(1) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(2) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}=l(k\boldsymbol{A})$;

(3) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

(4) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

例 1.2.1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -7 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,求 $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

解 直接计算得

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B} &= 2\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 3 & 0 & -7 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 8 & -10 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & 0 & -21 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 & 8 & 11 \\ 7 & -3 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

三、矩阵的乘法

我们先来举例说明矩阵乘法的实际意义.

设甲、乙、丙 3 个商店某年销售同样 3 种商品的数量(单位:万件)分别为:4,6,8;5,4,3 和 5,9,7. 上述 3 种商品的单价分别为 20,50 和 70 万元 / 万件,纯利润分别为 1.9,4.8 和6.7 万元 / 万件,则这 3 个商店该年全年销售这 3 种商品的总销售额分别为

甲:$20\times 4+50\times 6+70\times 8=940$;

乙:$20\times 5+50\times 4+70\times 3=510$;

丙:$20\times 5+50\times 9+70\times 7=1\ 040$.

总的纯利润分别为

甲:$1.9\times 4+4.8\times 6+6.7\times 8=90$;

乙:$1.9\times 5+4.8\times 4+6.7\times 3=48.8$;

丙:$1.9\times 5+4.8\times 9+6.7\times 7=99.6$.

我们用矩阵来描述上面各数据. 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}20 & 50 & 70\\ 1.9 & 4.8 & 6.7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4 & 5 & 5\\ 6 & 4 & 9\\ 8 & 3 & 7\end{pmatrix},$$

则 3 个商店全年销售的总销售额、纯利润可用矩阵 $\boldsymbol{C}$(第 1 行为销售额,第 2 行为纯利润) 表示. 其中 $\boldsymbol{C}$ 可以写为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}20\times 4+50\times 6+70\times 8 & 20\times 5+50\times 4+70\times 3 & 20\times 5+50\times 9+70\times 7\\ 1.9\times 4+4.8\times 6+6.7\times 8 & 1.9\times 5+4.8\times 4+6.7\times 3 & 1.9\times 5+4.8\times 9+6.7\times 7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}940 & 510 & 1\ 040\\ 90 & 48.8 & 99.6\end{pmatrix}.$$

记

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}20 & 50 & 70\\ 1.9 & 4.8 & 6.7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 6 & 4 & 9\\ 8 & 3 & 7\end{pmatrix}.$$

可以看出,矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 1 行第 1 列元素 c_{11} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列对应元素乘积之和. 同样可知,矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积之和. 由此,我们定义矩阵的乘法运算.

定义 1.2.4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times p}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{p\times n}$,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积为一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$,记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$,其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n).$$

在矩阵的乘法定义中，要求前面矩阵的列数必须等于后面矩阵的行数. 否则，矩阵的乘法就无法进行.

例 1.2.2 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{AB} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\times 4 + 0\times(-1) + 3\times 2 & 1\times 1 + 0\times 1 + 3\times 0 \\ 2\times 4 + 1\times(-1) + 0\times 2 & 2\times 1 + 1\times 1 + 0\times 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{BA} &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4\times 1 + 1\times 2 & 4\times 0 + 1\times 1 & 4\times 3 + 1\times 0 \\ -1\times 1 + 1\times 2 & -1\times 0 + 1\times 1 & -1\times 3 + 1\times 0 \\ 2\times 1 + 0\times 2 & 2\times 0 + 0\times 1 & 2\times 3 + 0\times 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

由例 1.2.2 可知，一般地 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$，即矩阵的乘法一般不满足交换律. 因此通常把 $\boldsymbol{AB}$ 称为"$\boldsymbol{A}$ 右边乘以 $\boldsymbol{B}$"或"$\boldsymbol{A}$ 乘以 $\boldsymbol{B}$".

例 1.2.3 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

试证：(1) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$；(2) $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{AD}$.

证 (1)

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times(-2)+1\times 2 & 1\times 1+1\times(-1)\\ -1\times(-2)-1\times 2 & -1\times 1-1\times(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}.$$

(2) 由于

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times 2+1\times 1 & 1\times 3+1\times(-3)\\ -1\times 2-1\times 1 & -1\times 3-1\times(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AD}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times 1+1\times 2 & 1\times(-1)+1\times 1\\ -1\times 1-1\times 2 & -1\times(-1)-1\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{AD}$.

由例 1.2.3 可知，两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵，且当 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{AD}$ 时，不一定有 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$，即矩阵乘法不满足消去律.

矩阵乘法虽然不满足交换律和消去律，但可以证明，它满足下列运算规律：

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})=\lambda(\boldsymbol{AB})$（其中 λ 为常数）.

利用递归方法可以定义方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 次幂运算，其定义如下：

(1) $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A}$；

(2) $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{n-1}$，$n=2,3,\cdots$.

显然

$$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{m+l},\quad (\boldsymbol{A}^m)^l=\boldsymbol{A}^{ml},$$

其中 m,l 均为正整数.

由于矩阵乘法不满足交换律，所以一般地 $(\boldsymbol{AB})^m\neq\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^m$.

例 1.2.4 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}^k$.

解 易知

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2 & 0 & 0\\ 0 & 1^2 & 0\\ 0 & 0 & (-3)^2\end{pmatrix},$$

$$A^3=\begin{pmatrix}2^2&0&0\\0&1^2&0\\0&0&(-3)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3&0&0\\0&1^3&0\\0&0&(-3)^3\end{pmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

不难导出

$$A^k=\begin{pmatrix}2^k&0&0\\0&1^k&0\\0&0&(-3)^k\end{pmatrix}.$$

利用矩阵的乘法，线性方程组可简单地用矩阵的形式表示. 事实上，设 n 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}\tag{1.2.1}$$

记

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},$$

则线性方程组(1.2.1)可表示为

$$Ax=b.\tag{1.2.2}$$

在线性方程组(1.2.1)中，常数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 称为第 i 个方程中第 j 个未知数的**系数**，$b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 称为第 i 个方程的**常数项**. 在(1.2.2)中，矩阵 A 和向量 x,b 分别称为线性方程组(1.2.1)的**系数矩阵**、**未知向量**和**常向量**.

当常数项 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 全为零时，线性方程组称为**齐次线性方程组**；否则，称其为**非齐次线性方程组**. 如果用一组数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 依次替代线性方程组(1.2.1)中的未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 时，线性方程组(1.2.1)中的每一个式子都成为恒等式，则称 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为线性方程组(1.2.1)的一个**解**.

例 1.2.5　将下面线性方程组表示成矩阵形式.

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1,\\4x_1-2x_2+5x_3=4,\\2x_1\qquad\;\;+2x_3=6.\end{cases}$$

解 记

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\4&-2&5\\2&0&2\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix},$$

则上述线性方程组可表示为

$$Ax=b.$$

四、矩阵的转置

定义 1.2.5 对于 $m\times n$ 型矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，如果将其行依次变成列，得到一个 $n\times m$ 型矩阵 $B=(a_{ji})_{n\times m}$，则矩阵 B 称为矩阵 A 的转置，记为 $B=A^{\mathrm{T}}$，或者 $B=A'$.

例如，设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$，则有

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}.$$

若将矩阵 A^{T} 转置，则有

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=A.$$

一般地，矩阵的转置满足下列运算规律：

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$；

(2) $(A\pm B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\pm B^{\mathrm{T}}$；

(3) $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$；

(4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

显然，矩阵 A 对称的充要条件是 $A^{\mathrm{T}}=A$.

例 1.2.6 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&1&3\\4&2&1\end{pmatrix},$$

求 $(AB)^{\mathrm{T}}$.

解 由于

$$AB=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&1&3\\4&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9 & 2 & -1\\ 8 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

故

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}9 & 8\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

也可用性质(4) 直接得

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9 & 8\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

第 3 节　分块矩阵及其运算

有时候，将矩阵进行分块处理，即将矩阵划分为若干块小矩阵，使大矩阵的运算转化为小矩阵的运算，会给运算带来方便. 这也是处理行数、列数较大的矩阵时常用的方法.

一、矩阵分块法

用若干条纵线和横线把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分为若干个小矩阵，每个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个子块或子阵，以这些子块为元素的矩阵称为**分块矩阵**. 例如，如下分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 2 & 4 & 1\\ \hdashline 3 & 0 & 5 & 7\\ -1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}=(1,2)$，$\boldsymbol{A}_{12}=(4,1)$，$\boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{22}=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 0 & 1\end{pmatrix}$为分块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的子块.

同一矩阵，根据其特点及不同的需要，可将其进行不同的分块. 例如，上面矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可按如下方式分块：