普通高等教育"十二五"规划教材

微积分

刘颖芬 肖运鸿 主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

微　积　分

刘颖芬　肖运鸿　主　编

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书是江西省高校精品课程“微积分”的配套教材. 本书主要包括了函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，二元函数微积分，微分方程与差分方程，无穷级数，微积分学中的数学实验，微积分学中的数学模型共10章内容. 每章有习题，书末附有考研模拟试题及答案. 本书结构清晰，逻辑关系清楚，内容由浅入深，语言表述流畅，过渡自然，例题丰富，可读性强.

本书可作为理工类及经管类专业的教材，也可供相关人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

微积分/刘颖芬，肖运鸿主编. —北京：科学出版社，2011
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-031593-9

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①刘…②肖… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 114398 号

责任编辑：胡云志 任俊红 房 阳 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：华路天然工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2011 年 6 月第一次印刷 印张：23 3/4
印数：1—4 000 字数：470 000

定价：42.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

本书编委会

主编　刘颖芬　肖运鸿

参编　曹　新　张　艳　马　丽

潘　坚　谢显华

前　言

本书是江西省高校精品课程“微积分”的建设成果之一，其主要特点是将数学实验及数学模型与微积分的相关内容有机结合；设置了部分带※号和★号的内容，以适应理工类及经管类分层教学的需要；配有两类共十套考研数学模拟试题，以满足不同层次的学生进行自测的需要.

本书主要包括一元函数、二元函数微积分，微分方程与差分方程，无穷级数，微积分学中的数学实验，共 10 章内容. 各章配有习题，书末附有考研模拟试题，全部习题和考研模拟试题的答案. 学时数 80～112.

本书结构清晰，逻辑关系清楚，内容由浅入深，行文流畅，过渡自然，例题丰富，便于自学. 可作为理工类及经管类专业的教材或教学参考书.

本书由江西省赣南师范学院数学与计算机科学学院刘颖芬教授、肖运鸿教授主编. 参加本书编写工作的还有赣南师范学院数学与计算机科学学院的曹新、张艳、马丽、潘坚、谢显华等老师.

本书在编写过程中，江西赣南师范学院刘福来教授、黄贤通教授给予了细心指导，科学出版社对本书的出版给予了热情支持和帮助，赣南师范学院教务处、数学与计算机科学学院也给予了大力支持，在此一并致谢！

限于编者水平，加之时间较为仓促，书中不妥之处在所难免，希望专家、同行、读者批评指正，使之在教学实践中不断得以完善.

编　者

2011 年 5 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章　函数、极限与连续

本章要点　本章以数列极限与函数极限定义为基础，讨论极限的一些重要性质以及运算法则，同时介绍与极限概念密切相关的另一个重要概念——连续，以及连续函数的重要性质.

1.1　函　　数

本节主要回顾函数的概念、性质及基本初等函数.

1.1.1　区间与邻域

本书中常用的集合有：$\mathbf{N}$ 为自然数集，$\mathbf{N}^+$ 为正整数集，$\mathbf{Z}$ 为整数集，$\mathbf{Q}$ 为有理数集，$\mathbf{R}$ 为实数集，$\mathbf{R}^+$ 为正实数集.

区间和一点的邻域是常用的实数集.

设 a,b 为实数，且 $a<b$.

(1) 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的开区间，记作 (a,b)，见图 1.1，即

$$(a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x<b\}.$$

(2) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的闭区间，记作 $[a,b]$，见图 1.2，即

$$[a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

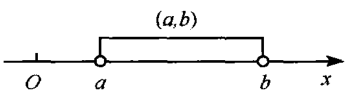


图 1.1

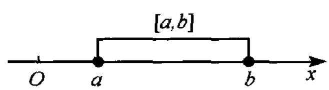
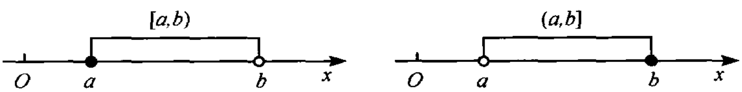


图 1.2

(3) 满足不等式 $a\leqslant x<b$ ($a<x\leqslant b$)的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的半开半闭区间，记作$[a,b)$(或$(a,b]$)，见图 1.3(a)(或见图 1.3(b))，即

$$[a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x<b\},\quad (a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\leqslant b\}).$$



(a)　　(b)

图 1.3

以上三类区间称为有限区间，a 称为区间的左端点，b 称为区间的右端点，$b-a$ 称为区间的长. 关于无限区间有以下几类：

(4) $(-\infty,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid x<b\}$；$(-\infty,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant b\}$.

(5) $(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid x>a\}$；$[a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant a\}$，如图 1.4 所示.

(6) $(-\infty,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\}$.

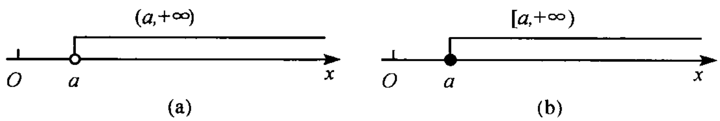


图 1.4

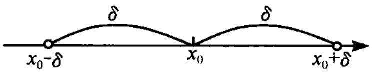


图 1.5

邻域：设 $x_0,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$，称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\in\mathbf{R}\mid |x-x_0|<\delta\}$ 为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，点 x_0 称为邻域的中心，δ 为邻域的半径，如图 1.5 所示.

若将邻域 $U(x_0,\delta)$ 的中心 x_0 去掉，则称其为点 x_0 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x\in\mathbf{R}\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

注　对于开区间 (a,b)，$\forall$（任意）$x_0\in(a,b)$，$\exists$（存在）$\delta>0$，满足 $U(x_0,\delta)\subset(a,b)$. 但是对于 $(a,b]$ 中的点 b（$[a,b)$ 中的点 a）却没有这个性质，请读者自己验证.

1.1.2　函数

函数是微积分研究的主要对象，它反映了变量之间的一种对应关系.

1. 函数的定义

先来看一个例子：在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，假定开始下落的时刻为 $t=0$，落地的时刻为 $t=T$，则由物理知识可知

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad t\in[0,T]\quad (g\ 为重力加速度).$$

在这个关系中，距离 s 随着时间 t 的变化而变化，当下落的时间 t 在 $[0,T]$ 内取定一个值时，对应的 s 也就随之确定.

若抽去所考察变量的具体意义，则 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 表达了两个变量之间的一种对应关系. 当一个变量在某一个范围内每取一个数值时，另一个变量就有唯一确定的一个值与之对应，两个变量之间的这种对应关系就是**函数**概念的实质.

定义 1.1.1　如果 X 是一非空实数集合，设有一个对应法则 f，使对每一个 $x\in X$，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在 X 上的一个**函数关系**，或称变量 y 为变量 x 的**函数**，记作 $y=f(x),x\in X$. 称 X 为**定义域**，x 为**自变量**，y 为**因变量**.

2. 对函数定义的注记

(1) 由定义可知，若定义域和对应法则确定，则函数确定，而与用什么符号表示无关，故定义域和对应法则是函数最本质的两要素. 若两个函数相等，则要求两个函数的这两要素分别相同，缺一不可.

(2) 当 x 取遍 X 中的每个数值时，对应的函数值的全体组成的数集 $Y=\{y \mid y=f(x), x\in X\}$ 称为函数 f 的值域.

(3) 以后一般用小写字母 f, g 或 φ, ψ 等表示函数的记号，定义域 X 也常用 D 或 D_f 表示.

3. 函数的表示法

函数的表示法有很多，常用的有三种：解析法、列表法、图像法.

例 1.1.1　$y=\sqrt{3x-1}$.

这是用解析式表达 y 与 x 之间的函数关系. 其定义域为 $X=\left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$.

例 1.1.2　某城市 2009 年各月甲型 H1N1 流感确诊病例数(单位：人)如表 1.1 所示.

表 1.1

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
确诊数 s	3	5	10	11	5	7	8	5	19	120	134	67

表 1.1 表示了某城市 2009 年各月甲型 H1N1 流感确诊病例数 s 随月份 t 而变化的函数关系. 这个函数是用列表表示的，它的定义域 $X=\{1,2,3,\cdots,12\}$.

例 1.1.3　某河道的一个断面图形如图 1.6 所示，其深度与一岸边 O 到测量点的距离 x 之间的对应关系由图 1.6 中曲线所示.

这里深度 y 与测距 x 之间的函数关系是用图形表示的，它的定义域 $X=[0,b]$.

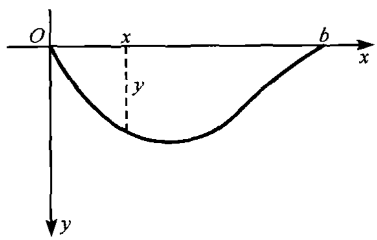


图 1.6

4. 函数定义域的求法

对于用解析式表达的函数，其定义域就是使解析式有意义的 x 的集合(如例 1.1.1). 下面再给出几个求定义域的例子：

例 1.1.4　求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ 的定义域.

分析　要使 $\sqrt{2-x^2}$ 有意义须使 $2-x^2\geqslant 0$，又 $\sqrt{2-x^2}$ 作分母故须使 $2-x^2>0$.

解　由 $2-x^2>0$，得 $x^2<2$，故 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$，故函数的定义域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

例 1.1.5　求函数 $y=\dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$的定义域.

分析　要使 $y=\dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$有意义,必须使其分子、分母同时有意义,故须使 $3-x>0$ 和 $|x|-1>0$ 同时成立.

解　由$\begin{cases}3-x>0,\\ |x|-1>0,\end{cases}$得 $x<-1$ 或 $1<x<3$,故函数的定义域为$(-\infty,-1)$或$(1,3)$.

1.1.3　函数的特性

1. 函数的奇偶性

由函数 $y=x^2$(图 1.7)和 $y=|x|$的图像可知其关于 y 轴对称,而 $y=x^3$ 和 $y=\sin x$ 的图像关于原点对称,这些对称性对于函数而言便是奇偶性.

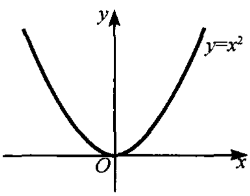


图 1.7

定义 1.1.2　设函数 $y=f(x)$的定义域 X 关于原点对称,若对任意 $x\in X$,都有 $f(x)=f(-x)$,则称 $y=f(x)$为**偶函数**;若对任意 $x\in X$,都有 $f(x)=-f(-x)$,则称 $y=f(x)$为**奇函数**,既不是偶函数也不是奇函数的函数称为**非奇非偶函数**.

由定义可知,奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.

例 1.1.6　判断 $y=f(x)=\sin x\log_a(x+\sqrt{x^2+1})(a>0$ 且 $a\neq1)$的奇偶性.

解　由于

$$\sqrt{x^2+1}+x>\sqrt{x^2}+x=|x|+x\geqslant0,$$

故 $y=f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$关于原点对称.

又

$$\begin{aligned}f(-x)&=\sin(-x)\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})\\&=-\sin x\log_a\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=-\sin x\log_a\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=-\sin x(-\log_a(x+\sqrt{x^2+1}))\\&=f(x),\end{aligned}$$

故 $y=f(x)=\sin x\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$为偶函数.

2. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 X,如果存在一个正数 l,使得对一切 $x\in X$ 有 $f(x\pm l)=f(x)$,则称 f 为**周期函数**,l 为 f 的一个**周期**. 显然,若 l 为 f 的一个周期,则

nl(n 为正整数)也是 f 的一个周期. 若在周期函数 f 的所有周期中有一个最小的正周期,则称此最小正周期为 f 的**基本周期**,或简称**周期**. 我们通常所称的周期即为基本周期.

从图形上看,设 $y=f(x)$ 是以 l 为周期的一个周期函数,在每个长度为 l 的区间上,函数图形有相同的形状(图 1.8).

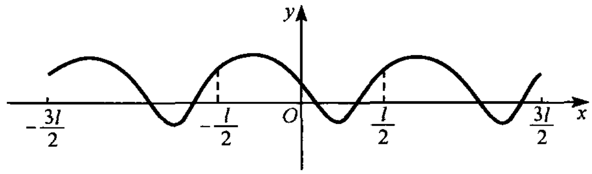


图 1.8

例 1.1.7　设函数 $y=f(x)$ 为以 ω 为周期的周期函数,试证函数 $y=f(ax)$ $(a>0)$ 是以 $\frac{\omega}{a}$ 为周期的周期函数.

分析　要证 $y=f(ax)$ 为以 $\frac{\omega}{a}$ 为周期的函数,即要证

$$y=f(ax)=f\left(a\left(x+\frac{\omega}{a}\right)\right)=f(ax+\omega).$$

证明　由于 $y=f(x)$ 以 ω 为周期,故

$$f(ax)=f(ax+\omega)=f\left(a\left(x+\frac{\omega}{a}\right)\right),$$

故 $y=f(ax)$ 是以 $\frac{\omega}{a}$ 为周期的周期函数.

由例 1.1.7 知,$\sin ax$ $(a>0)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{a}$.

3. 函数的单调性

对于函数 $y=kx$ 的图像,我们知道当 $k>0$ 是一条沿 x 轴正向上升的直线,当 $k<0$ 是一条沿 x 轴正向下降的直线,这种性质反映在函数上就是函数的**单调性**.

定义 1.1.3　设 $f(x)$ 为定义在 X 上的一个函数,区间 $I\subseteq X$,若对任意 $x_1,x_2\in I$,如果当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称此函数在 I 内是**单调增加**(或称**单调递增**)的;如果当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称此函数在 I 内是**单调减少**(或称**单调递减**)的.

特别地,若对任意 $x_1,x_2\in I$,如果当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)<f(x_2)$ 严格成立,则称此函数在 I 内是严格单调增加(或称严格单调递增)的;如果当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称此函数在 I 内是严格单调减少(或称严格单调递减)的.

从图形上看,单调递增函数的图像是沿 x 轴正向上升的曲线(图 1.9),单调递减函数的图像是沿 x 轴正向下降的曲线(图 1.10).

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com