

萬 有 文 庫

第 二 集 七 百 種

王 雲 五 主 編

數 理 精 蘊

(三)

清 聖 祖 敕 編

商 務 印 書 館 發 行

數理精蘊

(三)

清聖祖編

國學基本叢書

萬有文庫

第二集七百種

總編纂者

王雲五

商務印書館發行

數理精蘊下編卷三

線部一

比例

凡物彼此相形。並之而用加。較之而用減。聚之而用乘。散之而用除。觀之不過兩率。然乘除之間四率之理。已默寓其中。如因乘法曰。人幾何。每人得物幾何。求總物幾何。則是每一人得物幾何。與幾何人共得物幾何。相比而成四率。乃自小而得大者也。如歸除法曰。有物幾何。命幾何人分之。每人得物幾何。則是共人幾何。共物幾何。與每一人得物幾何。相比而成四率。乃自大而得小者也。蓋因命數以一人爲法。故乘與除各省其率耳。是雖名爲乘除。而實爲相比之四率也。至於比例正法。則所該甚廣。大而推步七政天行。測量高深廣遠。小而量功命事。度大移小。無一非由比例而得。蓋以兩數爲比例。用今有之數。即可以得未有之數也。比例之理。雖分相連相當二種。而相當比例之中。實又兼相連比例相當比例。一率比二率。如三率比四率。而相連比例首率比中率。若中率比末率者。卽是中率爲二率而又爲三率也。盡人皆知線有線之比例。面有面之比例。體有體之比例。殊不知差分盈朒方程借衰疊借之類。正皆比例之屬也。然此類中有合數之比例。分數之比例。均數之比例。借數之比例。非條分縷析。各項專論。則不備。故仍舊各自爲類。而獨於比例中最切者。詳明其理。以列法焉。其法一名異乘同除。或名爲準測。或名爲

順單。以原有之兩件相除。故爲同除。以今有之一件乘之。故爲異乘。如先乘而後除亦同。而今則質言之曰正比例。蓋以原有之兩件爲一率二率。以今有之一件爲三率。而所求之一件則爲四率也。一名爲同乘異除。或名爲變測。或名爲互視。或名爲逆單。以原有之兩件相乘。故爲同乘。以今有之一件除之。故爲異除。而今則質言之曰轉比例。蓋以原有之兩件爲二率三率。以今有之一件爲一率。而所求之一件則爲四率也。然論其乘除之名雖異。究其比例之理則一而已。今以數明之。如原有之兩數爲二與四。今有之一數爲八。以原有之二作一率。原有之四作二率。今有之八作三率。即得今所求之四率爲十六。而一率二與二率四之比。即三率八與四率十六之比。爲相當之比例也。如原有之兩數爲八與四。今有之一數爲十六。以原有之八作二率。原有之四作三率。今有之十六作一率。即得今所求之四率爲二。而一率十六與二率八之比。即三率四與四率二之比。或以一率十六與三率四之比。即同於二率八與四率二之比。皆爲相當之比例也。總之乘除之名有異。同四率之列有更換。而既成比例之後。其理無不歸於大同。由此引伸觸類。推而廣之。有合幾四率而爲一四率者。則名爲同乘同除。或名爲重測。或名爲順較逆較。而今則質言之曰合率比例。蓋其理亦不過合幾乘而爲一乘。合幾除而爲一除。各按四率。參互錯綜。豈能出於比例之外哉。凡此各種比例。俱設數例於後。以明立法之根。加之解說。以廣用法之意。

正比例

設如有銀買米。每米一石。銀八錢。今買米二百四十石。問共該銀若干。

法以米一石爲一率。銀八錢爲二率。今買米二百四十石爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率一百九十二兩。卽共銀數也。蓋一石與二百四十石。爲加二百四十倍。而八錢與一百九十二兩。亦爲加二百四十倍。見幾何原本六卷第十五節。故一石與八錢之比。卽同於二百四十石與一百九十二兩之比也。此法一率是一。止用八錢乘二百四十石亦得。但爲明正比例之理。

故首設一二易法。使人好推尋也。

設如有銀買米。每銀一兩。買米一石三斗。今有銀三百二十兩。問

共買米若干。

法以銀一兩爲一率。米一石三斗爲二率。今銀三百二十兩爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率四百一十六石。卽共米數也。蓋一兩與一石三斗之比。卽同於三百二十兩與四百一十六石之比也。

設如有銀賞人。每三人賞銀一兩八錢。今有二百四十人。問共該銀若干。

一率	一石
二率	八錢
三率	二百四十石
四率	一百九十二兩

一率	一兩
二率	一石三斗
三率	三百二十兩
四率	四百一十六石

法以三人爲一率。一兩八錢爲二率。今有二百四十人爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率一百四十四兩。卽共銀數也。蓋三人與一兩八錢之比。卽同於二百四十人與一百四十四兩之比也。

設如有穀換米。每穀一石四斗換米八斗四升。今有穀三十二石六斗八升。問換米若干。

法以穀一石四斗爲一率。米八斗四升爲二率。今有穀三十二石六斗八升爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率一十九石六斗零八合。卽所換共米數也。蓋穀一石四斗與米八斗四升之比。卽同於穀三十二石六斗八升與米一十九石六斗零八合之比也。

設如天上二度。當地面四百里。今七度。該里數若干。

法以原有之二度爲一率。四百里爲二率。今有之七度爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率一千四百里。卽七度之里數也。蓋一率二與二率四之比。爲加一倍。而三率七與四率十四之比。亦爲加一倍。故二率得一率中之幾分之幾。則四率亦得三率中之幾分之幾。而爲相當比例四率也。

一率	三人
二率	一兩八錢
三率	二百四十人
四率	一百四十四兩

一率	穀一石四斗
二率	米八斗四升
三率	穀三十二石六斗八升
四率	米一十九石六斗零八合

一率	二度
二率	四百里
三率	七度
四率	一千四百里

設如一星一日內行一度三十分。今問八刻內應行若干。

法以原數一日變作九十六刻爲一率。一度三十分變作九十分。一度作六十分。加入三十分。共九十分。爲二率。今星行八刻爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率七分半。卽八刻內所行之數。蓋九十六刻與九十分之比。卽同於八刻與七分半之比也。然將日變爲刻者。因每日九十六刻。不以十進位。又今所有者爲八刻。故以刻數與刻數相比也。度變爲分者。因每度六十分。亦不以十進位。而今八刻內所行者必爲分。故以分數與分數相比也。

設如驗時儀算砲聲。自烟起至聞聲。計七秒。得五里。今得十四秒。問里數若干。

法以七秒爲一率。五里爲二率。今得十四秒爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率十里。卽十四秒之里數也。蓋七秒與五里之比。卽同於十四秒與十里之比也。

設如有羊四百六十隻。共賣銀八十二兩八錢。問每羊一隻。價銀幾何。法以羊四百六十隻爲一率。銀八十二兩八錢爲二率。羊一隻爲三率。推得四率一錢八分。卽每羊一隻之價也。此法三率是一。止用羊四百六十

一率	九十六刻
二率	九十分
三率	八刻
四率	七分半

一率	七秒
二率	五里
三率	十四秒
四率	十里

一率	四百六十隻
二率	八十二兩八錢
三率	一隻
四率	一錢八分

隻歸除八十二兩八錢亦得。但列四率法中。不得不備其一體也。

設如有羊一羣。共二百四十隻。又生羔七十二隻。問加羊羣內十分之幾。

法以羊二百四十隻爲一率。十分爲二率。今生羔七十二隻爲三率。推得四率三分。卽爲加羊羣內十分之三也。蓋二百四十與十分之比。卽同於七十二與三分之比。若將二百四十作十分。每分得二十四。將羊羔七十二作三分。每分亦得二十四。總而約之。故爲十分之三也。

設如有田科糧。每三畝科糧八斗四升。今有四千六百三十五畝。問得糧若干。

法以三畝爲一率。八斗四升爲二率。今有四千六百三十五畝爲三率。推得四率一千二百九十七石八斗。卽所得共糧數也。蓋三畝與八斗四升之比。卽同於四千六百三十五畝與一千二百九十七石八斗之比也。

設如用古量法。豆區釜皆以四進。有八十豆。當二十區。有二十區。當釜若干。

法以八十豆爲一率。二十區爲二率。又爲三率。推得四率五釜。卽二十

一率	二百四十隻
二率	十分
三率	七十二隻
四率	三分

一率	三畝
二率	八斗四升
三率	四千六百三十五畝
四率	一千二百九十七石八斗

一率	八十豆
二率	二十區
三率	二十區
四率	五釜

區所當釜數也。此正比例中相連比例法也。蓋因二十區與二十區相乘得四百區。而八十豆與五釜相乘亦得四百區。二十區既爲二率。又爲三率。故謂相連比例。是以八十豆與二十區之比。即同於二十區與五釜之比也。

設如一商原有本銀三千兩。一年得利銀九百兩。今復將九百兩爲本。問一年得利若干。

法以三千兩爲一率。九百兩爲二率。又爲三率。推得四率二百七十兩。即九百兩所得之利也。此法以九百兩爲二率。又爲三率。蓋三千兩與九百兩之比。爲三與九之比例。而九百兩與二百七十兩之比。亦爲三與九之比例也。

一率	三千兩
二率	九百兩
三率	九百兩
四率	二百七十兩

轉比例

設如有田一畝。原闊八步。長三十步。今闊要十二步。問長得幾何。

法以今闊十二步爲一率。原長三十步爲二率。原闊八步爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率二十步。即今闊十二步之長也。此法以原有之兩數相乘。以今有之一數除之。

而得今所求之數者。因乘出兩數相同故也。在正比例。原有之兩件爲

一率二率。今有之一件爲三率。而今所求之一件爲四率。俱以原有之

一件與今有之一件相乘。其積相同。在轉比例。則原有之兩件爲二率

三率。今有之一件爲一率。而今所求之一件爲四率。是原有之兩件相

乘。今有之兩件相乘。其積相同。此兩法異同之故也。雖今闊比原闊多。

而今長卻比原長少。故原有之闊八步。與長三十步。相乘得二百四十步。而今有之闊十二步。與長二

十步。相乘亦得二百四十步。其積既同。是以轉而比之。自成比例。蓋今闊比原闊多三分之一。今長比原

長少三分之一。其比例相同。見幾何原本七卷第三節。故今闊十二步與原闊八步之比。即同於原長三十

步與今長二十步之比也。若借正比例論之。以原闊八步爲一率。原長三十步爲二率。今闊十二步爲三

率。二三率相乘。一率除之。得四率四十五步。則是今闊比原闊多。今長亦比原長多。所容積數亦多。而與

一畝之數不合矣。故轉以今闊十二步爲一率。原長三十步爲二率。原闊八步爲三率。而得四率二十步。

一率	今闊十二步
二率	原長三十步
三率	原闊八步
四率	今長二十步

是爲一率與三率之比同於二率與四率之比也

設如有地寬二十丈長一百二十丈今換地寬三十丈問長得幾何

法以今寬三十丈爲一率原長一百二十丈爲二率原寬二十丈爲三率二三率相乘一率除之得八十丈即今寬三十丈之長也此法原有之寬與長相乘得二千四百丈今有之寬與長相乘亦得二千四百丈其積既同故轉而比之自成比例以今寬比原寬以原長比今長俱三與二之比例是以今寬三十丈與原寬二十丈之比即同於原長一百二十丈與今長八十丈之比也設如傭工開渠八人開之二十日完今加倍用十六人開之問得幾日完

法以今十六人爲一率原二十日爲二率原八人爲三率二三率相乘一率除之得四率十日即十六人完工之日也此法因工少而用日多故加人使工多而用日少蓋今十六人與原八人之比即今之工加一倍而原二十日與今十日之比則今所得之日亦必減一倍故一率十六人與三率八人之比即同於二率二十日與四率十日之比也設如有地四百八十畝八人耕之十二日完今用六人耕之問得幾日完法以今六人爲一率原十二日爲二率原八人爲三率二三率相乘一率除之得四率十六日即六人耕

一率	今寬三十丈
二率	原長一百二十丈
三率	原寬二十丈
四率	今長八十丈

一率	今十六人
二率	原二十日
三率	原八人
四率	今十日

完之日也。此法人數日數不同。而所耕之田。則同爲四百八十畝。而所用之工。又同爲九十六。故以八人論。一日八工。十二日則用九十六工。以六人論。一日六工。十六日亦用九十六工也。故轉用四率自成比例。以一率六人與三率八人之比。卽同於二率十二日與四率十六日之比也。

設如衆軍支米。足用四年。則每人每月支米三斗。今欲將四年之米。足用十二年。問每人每月應支幾何。法以今欲用十二年爲一率。原支米三斗爲二率。足用四年爲三率。二率三率相乘。一率除之。得四率一斗。卽足用十二年每人每月應支之數也。此法支米多則足用年數少。今支米少則足用年數多。蓋四年與十二年之比。在年爲加三分之二。而三斗與一斗之比。在米又爲減三分之二。其比例固同也。

設如木星十二年一周天。每年行三十度。土星則二十八年一周天。問每年行幾度。

法以土星所行一周二十八年爲一率。木星每年所行三十度爲二率。木星所行一周十二年爲三率。二率三率相乘。一率除之。得四率十二度五十一分二十五秒有餘。卽土星每年所行之度數也。蓋木星

一率	今六人
二率	原十二日
三率	原八人
四率	今十六日

一率	今十二年
二率	原三斗
三率	原四年
四率	今一斗

一率	土一周二十八年
二率	木每年行三十度
三率	木一周十二年
四率	土每年行十二度餘

周天比土星年數少而行度卻多。土星周天比木星年數多而行度卻少。多得少而少反得多。故轉而比之。以二十八年與十二年之比。即同於三十度與十二度有餘之比也。設如一人借人之絹。寬三尺。長二十四丈。今還絹寬四尺。問長該若干。

法以今絹寬四尺爲一率。原絹長二十四丈爲二率。原絹寬三尺爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率十八丈。即爲今所還寬四尺絹之長也。蓋原絹寬三尺。長二十四丈。相乘得七百二十尺。今絹寬四尺。長十八丈。相乘亦得七百二十尺。因其積數相同。故今絹寬四尺。與原絹寬三尺之比。即同於原絹長二十四丈。與今絹長十八丈之比也。設如驗時儀墜子。其繩長四尺四寸八分一釐二毫八絲。四刻內來往共三千次。今造一墜。欲使來一秒往一秒。問繩長若干。

法以四刻化三千六百秒。爲今墜子往來次數。自乘得一千二百九十六萬次。爲一率。原墜繩長四尺四寸八分一釐二毫八絲。爲二率。以原墜往來三千次。自乘得九百萬次。爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率三尺一寸一分二釐。即今所求墜繩之長也。夫以四刻化秒者。蓋以所求之墜子。欲其來一秒往一秒也。故秒數即次數。四刻所化之秒。即今墜子在四刻內往來之次數也。其比例以次數自

一率 今一千二百九十六萬次
二率 原四尺四寸八分一釐二毫八絲
三率 原九百萬次
四率 今三尺一寸一分二釐

一率 今寬四尺
二率 原長二十四丈
三率 原寬三尺
四率 今長一十八丈

乘者。因墜子往來之際。已成平面形。故以往來之方數相比爲面比面。而原墜與今墜之長數相比爲線比線。務使其類相當。而後可以相比也。是以今墜往來次數自乘與原墜往來次數自乘之比。卽同於原墜長數與今墜長數之比也。然原墜於四刻內往來之次數少。而墜卻長。今墜於四刻內往來之次數多。而墜卻短。故以今墜之往來次數與原墜之往來次數爲比。卽同於原墜之長與今墜之長爲比。所以爲轉比例也。

設如有正方池一面。每邊十二丈。今欲作寬八丈之池。使其池面積數與方池等。問長得幾何。

法以今池寬八丈爲一率。原池長十二丈爲二率。原池寬十二丈爲三率。推得四率十八丈。卽今欲作池之長也。此轉比例中相連比例法也。蓋原池方面每邊十二丈。其積一百四十四丈。卽二率三率相乘之數。今所得四率長十八丈。與一率寬八丈相乘。亦得一百四十四丈。兩數相等。故以一率今池寬八丈與三率原池寬十二丈之比。卽同於二率原池長十二丈與四率今池長十八丈之比也。

設如原用金九兩。係九成。今用八成金折還。當加幾兩。

法以今金八成爲一率。原金九兩爲二率。原金九成爲三率。推得四率十兩零一錢二分五釐。內減九兩。餘一兩一錢二分五釐。卽八成金當加之數也。此法二率三率爲體雖不同。而數則一。故亦爲相連

一率	今寬八丈
二率	原長十二丈
三率	原寬十二丈
四率	今長十八丈

一率	今八成
二率	原九兩
三率	原九成
四率	今十兩零一錢二分五釐

比例。蓋以原金九兩。又係九成。相乘得十成金八兩一錢。以今之八成與所得十兩零一錢二分五釐相乘。亦得十成金八兩一錢。是八成與九成之比。即同於九兩與十兩零一錢二分五釐之比也。

對三兩四錢五分

夏市四十五大文

公積銀市十大文

歸市銀銀十大文

三兩四錢五分

對三兩四錢五分

夏市四十五大文

公積銀市十大文

歸市銀銀十大文

三兩四錢五分

對三兩四錢五分

夏市四十五大文

公積銀市十大文

四率	對銀二十八文
三率	夏市四十五大文
二率	公積銀市十大文
一率	歸市銀銀十大文

四率	對銀三十三文
三率	夏市四十五大文
二率	公積銀市十大文
一率	歸市銀銀十大文

四率	對銀二十八文
三率	夏市四十五大文
二率	公積銀市十大文
一率	歸市銀銀十大文

四率	對銀二十八文
三率	夏市四十五大文
二率	公積銀市十大文
一率	歸市銀銀十大文

四率	對銀三十三文
三率	夏市四十五大文
二率	公積銀市十大文
一率	歸市銀銀十大文

四率	對銀二十八文
三率	夏市四十五大文
二率	公積銀市十大文
一率	歸市銀銀十大文

合率比例

設如以夏布換棉布。但知每夏布三丈。價銀二錢。每棉布七丈。價銀七錢五分。今有夏布四十五丈。問換棉布若干。

法以夏布三丈。與棉布價銀七錢五分相乘。得二兩二錢五分爲一率。夏布價銀二錢。與棉布七丈相乘。得一兩四錢爲二率。夏布四十五丈爲三率。推得四率二十八丈。卽夏布四十五丈所換之棉布數也。此法乃兩比例合爲一比例也。如分作兩比例明之。每夏布三丈價銀二錢。今夏布四十五丈。則價銀應得三兩。此一比例也。

棉布價銀七錢五分。得棉布七丈。今夏布四十五丈之價三兩。則應得棉布二十八丈。此又一比例也。

夫銀三兩原爲夏布四十五丈之價。則夏布四十五丈所換之棉布二十八丈。價銀亦應三兩可知矣。蓋兩比例中。一以三丈作一率。一以七錢五分作一率。故三丈與七錢五分相乘。得二兩二錢五分。而爲一率。是合兩一率而爲一一率也。一以二錢作二率。一以七丈作二率。故二錢與七丈相乘。得一

一率	二兩二錢五分
二率	一兩四錢
三率	夏布四十五丈
四率	棉布二十八丈

一率	夏布三丈
二率	銀二錢
三率	夏布四十五丈
四率	銀三兩

一率	銀七錢五分
二率	棉布七丈
三率	銀三兩
四率	棉布二十八丈