WEIJIFEN
ZHONGZHI DINGLI RUOGAN WENTI

微积分
中值定理若干问题

樊守芳◎编著

黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

微积分

中值定理若干问题

樊守芳◎编著

黑龍江大學出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分中值定理若干问题／樊守芳编著. --哈尔滨：
黑龙江大学出版社，2011.2
ISBN 978-7-81129-360-9
Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①樊… Ⅲ. ①微积分-中值定理
Ⅳ. ①O172
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 001267 号

书　　名	微积分中值定理若干问题
著作责任者	樊守芳 编著
出 版 人	李小娟
责任编辑	袁建平
出版发行	黑龙江大学出版社(哈尔滨市学府路 74 号　150080)
网　　址	http://www.hljupress.com
电子信箱	hljupress@163.com
电　　话	(0451)86608666
经　　销	新华书店
印　　刷	黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本	880×1230　1/32
印　　张	6.375
字　　数	138 千
版　　次	2011 年 7 月第 1 版　2011 年 7 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-81129-360-9
定　　价	24.00 元

目　录

第1章 微分中值定理

由于解决实际问题的需要,引进了微分学概念,并对它进行研究发展,使之成为一门系统化、全面化的理论,而且微分学也随之成为解决实际问题中重要的工具之一,其应用也越来越广泛.

1.1 微积分学的建立

从微积分成为一门学科来说,是在17世纪.但是,微分和积分的思想在古代就已产生.在中国公元前5世纪,战国时期名家的代表作《庄子·天下篇》中记载了惠施的一段话:"一尺之棰,日取其半,万世不竭",这是我国较早出现的极限思想.利用极限思想解决实际问题的典范是魏晋时期的数学家刘徽,他在割圆术中提到"割之弥细,所失弥少,割之又割以至于不可割,则与圆合体而无所失矣."按照这种思想,他从圆的内接正六边形面积一直算到内接正192边形面积,得到圆周率的近似值3.14.大约两个世纪之后,南北朝时期的著名科学家祖冲之(公元429—500年)父子推进和发展了刘徽的数学思想,首先算出了圆周率介于3.141 592 6与3.141 592 7之间,这是我国古代最

伟大的成就之一.

公元前3世纪,欧洲古希腊时期也有极限思想,并用极限方法解决了许多实际问题.阿基米德借助于“穷竭法”解决了一系列几何图形的面积、体积计算问题.这种方法体现了近代积分法的基本思想,是定积分概念的雏形.

微积分思想真正的迅速发展与成熟是在16世纪以后.1400年至1600年的欧洲文艺复兴,使得整个欧洲全面觉醒.一方面,社会生产力迅速提高,科学和技术得到迅猛发展;另一方面,社会需求的急剧增长,也为科学研究提出了大量的问题.这一时期,对运动与变化的研究已变成自然科学的中心问题,以常量为主要研究对象的古典数学已不能满足要求.科学家们开始由对以常量为主要研究对象的研究转移到以变量为主要研究对象的研究上来,自然科学开始迈入综合与突破的阶段.

到了17世纪,有许多科学问题需要解决,这些问题也就成了促使微积分产生的因素.归结起来,大约有四种主要类型问题:第一类是运动中速度与距离的互求问题,即已知物体移动的距离表示为时间的函数的公式,求物体在任意时刻的速度和加速度;反过来,已知物体的加速度表示为时间的函数的公式,求速度和距离;第二类是求曲线切线问题,透镜设计要考虑曲线的法线,实际上就是求切线,运动物体在任一点处的运动方向即该点的切线方向;第三类是求最大值和最小值问题,确定炮弹的最大射程以及求行星离开太阳的最远和最近距离等涉及的函数极大值、极小值问题也亟待解决;第四类问题是求曲线的弧长、曲线围成的平面图形的面积、曲面围成的立体体积、物体重心和引力等等.

在17世纪上半叶,几乎所有的科学大师都致力于寻求解决这些问题的数学工具.这里只简单介绍在微积分酝酿阶段最具代表性的几位科学大师的工作.

德国天文学家、数学家开普勒,在1615年发表的《测量酒桶的新立体几何》中,论述了其利用无限小元求旋转体体积的积分法.他的无限小元法的要旨是用无数个同维无限小元素之和来确定曲边形的面积和旋转体的体积,他认为球的体积是无数个顶点在球心底面在球上的小圆锥的体积的和.

意大利数学家卡瓦列里,在其著作《用新方法推进的连续的不可分量的几何学》中系统地拓展了不可分量法.他认为点运动形成线,线运动形成面,体则是由无穷多个平行平面组成,并分别把这些元素叫做线、面和体的不可分量.他建立了一条关于这些不可分量的一般原理(后称卡瓦列里原理,即是我国的祖氏原理):如果在等高处的横截面有相同的面积,两个等高的立体有相同的体积.利用这个原理他解决了开普勒的旋转体体积的问题.

英国的数学家巴罗,在1669年出版的著作《几何讲义》中,利用微分三角形(也称特征三角形)求出了曲线的斜率.他的方法的实质是把切线看做割线的极限位置,并利用忽略高阶无限小来取极限.巴罗是牛顿的老师,英国剑桥大学的第一任“卢卡斯数学教授”,也是英国皇家学会的首批会员.当他发现和认识到牛顿的杰出才能时,便于1669年辞去卢卡斯教授的职位,举荐自己的学生当时才27岁的牛顿来担任.巴罗让贤已成为科学史上的佳话.

法国的数学家笛卡尔和费马是将坐标方法引进微分学问题

研究的前锋. 笛卡尔在《几何学》中提出的求切线的"圆法"以及费马手稿中给出的求极大值与极小值的方法,实质上都是代数的方法. 代数方法对推动微积分的早期发展起了很大的作用,牛顿就是以笛卡尔的圆法为起点而踏上微积分的研究道路的.

英国的数学家沃利斯是在牛顿和莱布尼兹之前,将分析方法引入微积分贡献最突出的数学家. 在其著作《无穷算术》中,他利用算术不可分量方法获得了一系列重要结果. 其中就有将卡瓦列里的幂函数积分公式推广到分数幂情形以及计算 1/4 圆的面积等. 17 世纪上半叶一系列先驱性的工作,沿着不同的方向向微积分的大门逼近,但所有这些努力还不足以标志微积分作为一门独立科学的诞生. 前驱者对于求解各类微积分问题确实作出了宝贵的贡献,但他们的方法仍缺乏足够的一般性. 虽然有人注意到这些问题之间的某些联系,但没有人将这些联系作为一般规律明确提出来,作为微积分基本特征的积分和微分的互逆关系也没有引起足够的重视. 因此,在更高的高度将以往个别的贡献和分散的努力综合为统一的理论,成为 17 世纪中叶数学家面临的艰巨任务.

17 世纪下半叶,在前人工作的基础上,英国科学家牛顿和德国数学家莱布尼兹分别在自己的国度里独自研究和完成了微积分的创立工作. 虽然这只是十分初步的工作,他们的最大功绩是把两个貌似毫不相关的问题联系在一起,一个是切线问题(微分学的中心问题),一个是求积问题(积分学的中心问题).

牛顿和莱布尼兹建立微积分的出发点是直观的无穷小量,因此这门学科早期也称为无穷小分析,这正是现在数学中分析学这一大分支名称的来源. 牛顿研究微积分着重于从运动学来

考虑,莱布尼兹却是侧重从几何学来考虑的.

牛顿担任数学教授之前,即在 1666 年,他已经开始了关于微积分的研究,他受沃利斯的《无穷算术》的启发,第一次把代数学扩展到分析学. 牛顿起初的研究是静态的无穷小量方法,像费尔马那样把变量看成是无穷小元素的集合. 1669 年,他完成了第一篇有关微积分的论文. 当时在他的朋友中间散发传阅,直到 42 年后的 1711 年才正式出版. 牛顿在论文中不仅给出了求瞬时变化率的一般方法,而且证明了面积可由求变化率的逆过程得到,这一事实是牛顿创立微积分的标志. 接着牛顿研究变量流动生成法,认为变量是由点、线或面的连续运动产生的,因此,他把变量叫做流量,把变量的变化率叫做流数. 牛顿第二阶段的工作,主要体现在 1671 年的一本论著《流数法和无穷级数》中. 书中叙述了微积分基本定理,并对微积分思想作了广泛而更明确的说明. 但这篇论著直到 1736 年才公开发表. 牛顿微积分研究的第三阶段用的是最初比和最后比的方法,否定了以前自己认为的变量是无穷小元素的静止集合. 不再强调数学量是由不可分割的最小单元构成,而认为它是由几何元素经过连续运动生成的. 不再认为流数是两个实无限小量的比,而是初生量的最初比或消失量的最后比. 这是他对初期微积分研究的修正和完善. 牛顿在流数术中所提出的中心问题是:已知连续运动的路径,求给定时刻的速度(微分法);已知运动的速度求给定时间内经过的路程(积分法).

德国的莱布尼兹是一个博才多学的学者,1684 年发表了现在世界上认为是最早的微积分文献. 这篇文章有一个很长而且很古怪的名字《一种求极大极小和切线的新方法,它也适用于

分式和无理量,以及这种新方法的奇妙类型的计算》.就是这样一篇说理也颇含糊的文章,却有划时代的意义.它已含有现代的微分符号和基本微分法则.在1686年,莱布尼兹发表了第一篇积分学的文献.他是历史上最伟大的符号学者之一,他所创设的微积分符号,远远优于牛顿的符号,这对微积分的发展有极大的影响.现在所使用的微积分通用符号就是当时莱布尼兹精心选用的.

微积分学的创立,极大地推动了数学的发展.过去很多初等数学束手无策的问题,运用微积分,往往迎刃而解,显示出微积分学的非凡威力.前面已经提到,一门科学的创立决不是某一个人的业绩,他必定是经过多少人的努力后,在积累了大量成果的基础上,最后由某个人或几个人总结完成的,微积分也是这样.

牛顿和莱布尼兹都是时代的巨人,两位学者也从未怀疑过对方的科学才能.就微积分的创立而言,尽管二者在背景、方法和形式上存在差异、各有特色,但二者的功绩是相当的.他们都把微积分作为一种能应用于一般函数的普遍方法.所不同的是,牛顿更多关心的是创立微积分的体系和基本方法,而莱布尼兹似乎更关心运算公式的建立与推广.莱布尼兹的微积分思想虽然不如牛顿那样有条理,但却富于启发性.

1684年,莱布尼兹的第一篇微积分论文刚一发表,便在英国境内掀起了一场轩然大波.因为英国有不少数学家都知道牛顿已完成了微积分的创建工作,而莱布尼兹却抢先发表了这方面的成果.他们认为,1673年莱布尼兹曾访问伦敦,并和一些知道牛顿工作的人有接触并保持通信,因此,他有可能剽窃了牛顿的成果,于是他们向莱布尼兹发起了猛烈的攻击.欧洲其他国家

一些了解莱布尼兹工作细节的数学家们站出来，与英国数学家针锋相对，坚决维护莱布尼兹的利益.这场有关微积分优先发明权的争议持续了几十年，以致于使英国数学家与欧洲大陆数学界的思想交流隔绝了半个多世纪.英国数学在一个时期里闭关锁国，囿于民族偏见，过于拘泥在牛顿的“流数术”中停步不前，因而数学发展整整落后了 100 年.

其实，牛顿和莱布尼兹分别是自己独立研究，在大体上相近的时间里先后完成的.比较特殊的是牛顿创立微积分要比莱布尼兹早 10 年左右，但是公开发表微积分这一理论，莱布尼兹却要比牛顿早 3 年.他们的研究各有长处，也都各有短处.那时候，由于民族偏见，关于发明优先权的争论竟从 1699 年始延续了 100 多年.

应该指出，这和历史上任何一项重大理论的完成都要经历一段时间一样，牛顿和莱布尼兹的工作也都是很不完善的.他们在无穷和无穷小量这个问题上，其说不一，十分含糊.牛顿的无穷小量，有时候是零，有时候不是零而是有限的小量；莱布尼兹的也不能自圆其说.这些基础方面的缺陷，最终导致了第二次数学危机的产生.

直到 19 世纪初，法国科学学院的科学家以柯西为首，对微积分的理论进行了认真研究，建立了极限理论.后来又经过德国数学家维尔斯特拉斯进一步的严格化，使极限理论成为了微积分的坚定基础，才使微积分进一步的发展开来.

任何新兴的、具有无量前途的科学成就都吸引着广大的科学工作者.在微积分的历史上也闪烁着这样的一些明星：瑞士的雅格布·贝努里和他的兄弟约翰·贝努里、欧拉、法国的拉格朗

日、柯西等.

欧氏几何也好,上古和中世纪的代数学也好,都是一种常量数学.而微积分才是真正的变量数学,是数学中的大革命.微积分是高等数学的主要分支,不只是局限在解决力学中的变速问题,它驰骋在近代和现代科学技术园地里,建立了数不清的丰功伟绩.

1.2 微分中值定理的历史演变

微分中值定理是罗尔中值定理、拉格朗日中值定理和柯西中值定理的总称.微分中值定理完整地出现经历了一个过程,是众多数学家共同研究的成果.从费马定理到柯西中值定理,是一个逐步完善、不断向前发展的过程,而且随着相关数学理论知识的不断完善,微分中值定理也随之得以完整起来,证明方法也出现了多样化.

微分中值定理,是微分学的核心定理,是研究函数的重要工具,是沟通函数与导数之间的桥梁,历来受到人们的重视.

微分中值定理有着明显的几何意义.以拉格朗日中值定理为例,它表明"一个可微函数的曲线段,必有一点的切线平行于曲线端点的弦."从这个意义上来说,人们对微分中值定理的认识可以上溯到公元前古希腊时代,古希腊数学家在几何研究中,得到如下结论:"过抛物线弓形的顶点的切线必平行于抛物线弓形的底".这正是拉格朗日中值定理的特殊情况,希腊著名数学家阿基米德(Archimedes,公元前287—前221)正是巧妙地利用这一结论,求出抛物线弓形的面积.意大利数学家卡瓦列里

(Cavalieri,1589—1674)在《不可分量几何学》(1635 年)中,给出处理平面和立体图形切线的有趣引理,其中引理 3 是基于几何观点的,它叙述了同样一个事实:曲线段上必有一点的切线平行于曲线的弦.这是几何形式的微分中值定理,被人们称为"卡瓦列里定理".

人们对微分中值定理的研究,从微积分建立之初就开始了.1637 年,著名法国数学家费马(Fermat,1601—1665)在《求最大值和最小值的方法》中给出了费马定理,在教科书中,人们通常将它作为微分中值定理的第一个定理.1691 年,法国数学家罗尔(Rolle,1652—1719)在《方程的解法》一文中,给出多项式形式的罗尔定理.1797 年,法国数学家拉格朗日(Largrange,1736—1813)在《解析函数论》一书中,给出拉格朗日定理,并给出最初的证明.对微分中值定理进行系统研究是法国数学家柯西(Cauchy,1789—1857).他是数学分析严格化运动的推动者,他的三部巨著《分析教程》(1821 年)、《无穷小计算教程概论》(1823 年)和《微分计算教程》(1829 年),以严格化为其主要目标,对微积分理论进行了重构.他首先赋予中值定理以重要作用,使其成为微分学的核心定理.在《无穷小计算教程概论》中,柯西首先严格地证明了拉格朗日定理.又在《微分计算教程》中,将其推广为广义中值定理——柯西定理.从而发现了最后一个微分中值定理.

1.3 微分中值定理简介

1.3.1 费马定理

费马在研究极大和极小问题的解法时,得到统一解法"虚拟等式法",从而得出原始形式的费马定理.

所谓的虚拟等式法,可以用如下方法加以说明. 一个长度为 b 的线段,如果划分为两个线段 $x,b-x$,要使它们的积为最大,费马采用以下方法:用 $x+e$ 代替 e,得到表达式

$$(x+e)(b-x-e)=bx+be-x^2-2ex-e^2,$$

并与表达式 $x(b-x)$ 进行比较,得到虚拟等式:

$$(x+e)(b-x-e)=bx+be-x^2-2ex-e^2\approx xb-x^2,$$

即
$$2ex+e^2\approx be.$$

再将所得各项除以 e,得到 $2x+e\approx b$. 然后去掉仍含 e 的项,再将虚拟等式化为真正的等式 $2x=b$. 从而得到 $x=\frac{b}{2}$,使 $x(b-x)$ 为最大.

费马的"虚拟等式法"可能基于一种非常直观的想法:如果 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值,那么从直观上来看,$f(x)$ 在 x_0 附近值变化很小. 当 e 很小时,$f(x)$ 和 $f(x+e)$ 差很小. 用现代数学语言来说,对于函数 $f(x)$,让自变量从 x 变化到 $x+e$,当 $f(x)$ 为极值时,$f(x)$ 和 $f(x+e)$ 的差近似为 0,用 e 除以虚拟等式,$\frac{f(x+e)-f(x)}{e}\approx 0$ 就得到函数极值点的导数值为 0,这就得到费马定理:函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值,并且可导,则 $f'(x_0)=0$.

这里应特别指出：费马给出以上结论时，微积分还处于初创阶段，并没有明确导数、极限、连续等概念. 用现代观点来看，其论断是不严格的. 我们现在看到的费马定理是后人根据微积分理论和费马发现的实质重新创造的.

1.3.2 罗尔定理

罗尔在 1691 年发表的论著《方程的解法》中，给出了"在多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的两个相邻根中，方程 $na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 至少有一个实根". 这是定理"$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，并且$f(a)=f(b)$，则存在一点 $\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$"的特例. 也就是以上定理被称为罗尔定理的原因.

最初的罗尔定理和现代罗尔定理不仅内容有所不同，而且证明也大相径庭，它是罗尔利用纯代数理论方法加以证明的，与微积分并没有什么联系. 我们现在看到的罗尔定理，是后人根据微积分理论重新证明，并把它推广为一般函数. "罗尔定理"这一名称是由德罗比什在 1834 年给出，并由意大利数学家贝拉维蒂斯在 1846 年发表的论文中正式使用的.

1.3.3 拉格朗日定理

拉格朗日定理是微分中值定理中最主要的定理. 它是指："$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，则存在一点 $\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$". 这一定理是拉格朗日在《解析函数论》一书中首先给出的. 它最初的形式为："函数$f(x)$在 x_0 和 x 之间

连续，$f'(x)$的最大值为A，最小值为B，则$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$必取$A$，$B$中一个值.”

历史上拉格朗日定理证明，最初是拉格朗日在《解析函数论》中给出的. 这个证明很大程度上建立在直观基础上，依赖于这样的一个事实：当$f'(x)>0$，$f(x)$在$[a,b]$上单调增加. 所用的条件也比现在强，现代中值定理只须$f(x)$在(a,b)上可导，并存在连续导数. 并且他所用连续概念，也是直观的："假设变量连续地变化，那么函数将会产生相应变化，但是如果不经过一切中间值，它就不会从一个值过渡到另一个值.”

19世纪初，在以柯西等为代表的微积分严格化运动中，人们给出了极限、连续和导数的严格定义，也给出了拉格朗日定理新的证明，柯西在《无穷小计算概论》中给出了新的证明.

作为这个证明的出发点，柯西首先证明了："实数$b,b',b'',\cdots$和$a,a',a'',\cdots$保持同号，且n个实数$\frac{a}{b},\frac{a'}{b'},\frac{a''}{b''},\cdots$的最大值为$g$，最小值为$r$，则$\frac{a+a'+a''+\cdots}{b+b'+b''+\cdots}$必为$r$和$g$中间的一个值.”然后他从新的导数定义$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$出发，让$\delta,\varepsilon$为任意小的正数，让$\Delta x$的绝对值小于$\delta$，则对于$x\in[x_0,x]$，$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$必为$f'(x)-\varepsilon$和$f'(x)+\varepsilon$中间的一个值，然后在$x$和$x_0$之间插入$n-1$个$x$的值$x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$，则差$x-x_0$分为$n$个小部分$x_1-x_0,x_2-x_1,\cdots,x-x_n$且同号，并且使它们的绝对值小于$\delta$，设$f'(x)$的最大值为$A$，最小值为$B$. 柯西证明：