



总主编◎李朝东



修订版

教材

解析

JIAOCAIJIEXI

人教A版

高中数学

必修3



YZLI0890144310



读者出版集团
D P G C . L
甘肃少年儿童出版社



总主编◎李朝东

教材

JIAOCAIJIEXI

解析

本册主编：辛志利 刘文治



高中数学

必修 3



YZLI0890144310



读者出版集团

D P G C . L

甘肃少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

教材解析:人教版·高中数学.3:必修/李朝东

主编.——兰州:甘肃少年儿童出版社,2011.5

ISBN 978-7-5422-2947-2

I. ①教… II. ①李… III. ①中学数学课—高中—教
学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 075006 号

责任编辑:伏文东

封面设计:杭永鸿

教材解析·高中数学

必修3 人教A版

李朝东 主编

甘肃少年儿童出版社出版发行

(730030 兰州市读者大道568号)

0931-8773255

山东方正印务有限公司

开本 880 毫米×1230 毫米 1/16 印张 9.25 字数 185 千

2011 年 5 月第 1 版 2011 年 5 月第 1 次印刷

印数:1~5 000

ISBN 978-7-5422-2947-2 定价:19.00 元



当一道道疑似难题摆在你面前时，是胸有成竹，还是找不着头绪？如果是前者，那恭喜你，你已经跨越了教材与考试之间的差距；如果是后者，那你也别急，《经纶学典·教材解析》在教材与考试间为你搭建一个沟通平台。

不少同学有这样的感觉：教材都熟悉了，课堂上也听懂了，但考试却取不到好成绩。原因在于教材内容与考试要求有差距，课堂教学与选拔性考试有差别。这就需要在教材之上、课堂之外能够得到补充、提升，直至达到高考的选拔要求。本书就是从以下两个方面填补这种差距。

首先是对教材的深度挖掘。教材内容通俗易懂，但里面包含着丰富的信息，我们把教材所包含的信息挖掘出来，并进行系统整理，让知识内涵和外延、知识间的联系充分展现。

第二是对课堂教学的补充和拓展。本书不是对课堂教学的重复，而是在课堂教学基础上，对课堂教学进行补充、提高，挖掘那些学生难以理解、难以掌握的内容，进行归纳和总结，为学生穿起一条规律性的“线”。数学侧重解题方法、解题技巧、解题思路的整理，注重方法的拓展，找出最优的解题方法，对本节内容与其他小专题内容进行归纳总结。这些由于课堂教学时间限制或教师水平发挥的问题，在课堂上并没有全部传授给学生，而这些恰恰就是考试中要考查的，学生拉开差距的所在。

正是本着上述编写理念，本丛书以学生为中心，用最易理解的表现形式呈现学习中难以理解的部分。希望本书为你的成长助力，有更好的想法和意见请登录：www.jing-lun.cn。



读者反馈表

尊敬的读者：

您好！感谢您使用《经纶学典·教材解析》！

为了不断提高图书质量，恳请您写下使用本书的体会与感受，我们将真诚地吸纳。在修订时将刊登您的意见，并予以一定的奖励，以表达我们诚挚的谢意。

读者简介	姓 名		性 别		出生年月	
	所在学校			通讯地址		
	联系方式	(H): 手机:		(O): E-mail:		
本 书 情 况	学 科		版 本		年 级	
您对本书栏目的评价： 1. 教材梳理： 全面 ☐ 一般 ☐ 不全面 ☐ 2. 教材拓展： 难 ☐ 合理 ☐ 易 ☐ 3. 典型题解： 全面 ☐ 不全面 ☐ 4. 针对性练习： 难 ☐ 合理 ☐ 易 ☐ 5. 拓展阅读： 需要 ☐ 不需要 ☐ 6. 五年高考回放： 需要 ☐ 不需要 ☐		您对本书体例形式的评价： 1. 栏目设置： 过多 ☐ 适中 ☐ 过 少 ☐ 2. 题空： 过大 ☐ 正好 ☐ 过 小 ☐ 3. 版式： 美观 ☐ 一般 ☐ 不美观 ☐ 4. 封面： 美观 ☐ 一般 ☐ 不美观 ☐		您的购买行为： 1. 您购买本书的途径： 广 告 ☐ 教师推荐 ☐ 家长购买 ☐ 学校统一购买 ☐ 自己购买 ☐ 同学推荐 ☐ 2. 您购买本书的主要原因(可多选)： 广告宣传 ☐ 包装形式 ☐ 内 容 ☐ 图书价格 ☐ 封面设计 ☐ 书 名 ☐		
您对本书的其他意见：						

欢迎登录：www.jing-lun.cn

通信地址：南京红狐教育传播研究所（南京市租用 16-02[#]信箱）

邮编：210016



目录

M U L U

第一章 算法初步

1.1	算法与程序框图	1
1.2	基本算法语句	16
1.2.1	输入语句、输出语句和赋值语句	16
1.2.2	条件语句	23
1.2.3	循环语句	32
1.3	算法案例	42
	本章总结	51

第二章 统计

2.1	随机抽样	63
2.2	用样本估计总体	75
2.3	变量间的相关关系	90
	本章总结	100

第三章 概率

3.1	随机事件的概率	105
3.2	古典概型	115
3.3	几何概型	126
	本章总结	137

第 1 章 算法初步

1.1 算法与程序框图

A 教材梳理

知识点一 算法的概念

算法是指可以用计算机来解决某一类问题的程序或步骤. 这些程序或步骤必须是明确和有效的, 而且能够在有限步之内完成.

注意: (1) 算法一般是机械的, 有时要进行大量重复的计算, 只要按部就班地去做, 总能算出结果, 通常把算法过程称为“数学机械化”, “数学机械化”的最大优点是它可以让计算机来完成. 本章主要以计算机能够实现的算法作为讨论的内容.

(2) 实际上, 处理任何问题都需要算法, 比如, 中国象棋有中国象棋的棋谱, 国际象棋有国际象棋的棋谱. 再比如, 邮寄物品有其相应的手续, 购买飞机票也有一系列的手续等等.

(3) 求解某个问题的算法不唯一.

知识点二 程序框图的概念、图形符号及作用

通常用一些通用的图形符号构成一张图来表示算法, 这种图叫做程序框图.

(1) 起止框“”是任何流程必不可少的, 表示算法的起始和结束, 如图中①⑨.

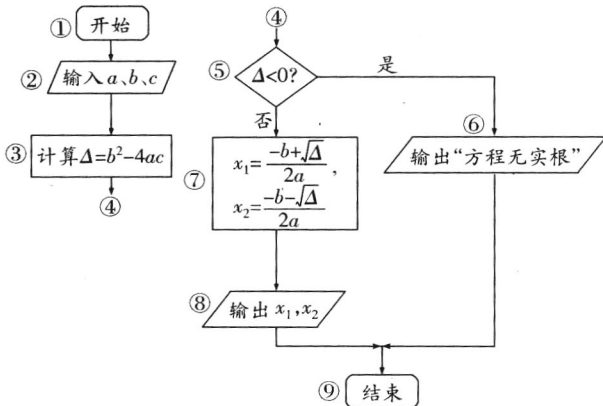
(2) 输入、输出框“”可用在算法中任何需要输入、输出的位置, 需要输入、输出的字母、符号、数据都填在框内, 如图中②⑥⑧.

(3) 处理框用“”表示, 算法中处理数据需要的公式、算式等可以分别写在不同的用以处理数据的处理框内, 另外, 对变量进行赋值时, 也用到处处理框. 如图中③⑦.

(4) 判断框用“”表示, 当算法中要求对两个不同的结果进行判断时, 需要将实现判断的条件写在判断框内, 如图中⑤所示.

(5) 一个算法步骤到另一个算法步骤用流程线连接, 如果一个程序框图需分开来画, 要在断开处画上连接点, 并标出

连接的号码, 如图中④.



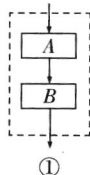
注意: (1) 算法可以用自然语言来描述, 但为了使算法的程序或步骤表达得更为直观形象, 我们经常用图形方式来表达它.

(2) 程序框图又称流程图, 是一种用规定的图形、指向线及文字说明来准确、直观地表示算法的图形.

知识点三 算法的三种基本逻辑结构及框图表示

1. 顺序结构

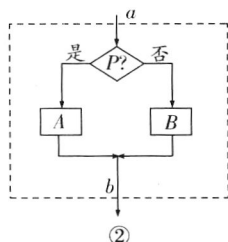
顺序结构是最简单的算法结构, 语句与语句之间, 框与框之间是按从上到下的顺序进行的, 它是由若干个依次执行的步骤组成的, 它也是任何一个算法都离不开的一种算法结构, 可以用图①表示顺序结构的示意图, 其中 A 和 B 两个框是依次执行的, 只有在执行完 A 框所指定的操作后, 才能接着执行 B 框所指定的操作.



2. 条件结构

一些简单的算法可以用顺序结构来表示, 但这些结构无法描述需要进行逻辑判断, 并根据判断结果进行不同处理的

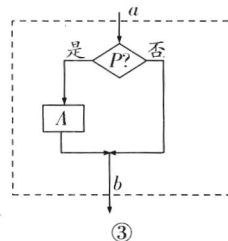
情况,因此需要另一种逻辑结构来处理这类问题.此种结构叫做条件结构.它是依据指定条件选择执行不同指令的控制结构.



如图②所示的虚线框内是一个条件结构,此结构中包含一个根据给定的条件 P 是否成立而执行 A 框或 B 框的判断框,其中条件 P 可以是“ $i < 10$ ”“ $n > 66$ ”等.

注意:(1)无论条件是否成立,只能执行 A 框或 B 框之一,不可能既执行 A 框,又执行 B 框,无论走哪条路径,在执行完 A 框或 B 框后都要经过 b 点,然后脱离此条件结构.

(2) A 或 B 两个框可以有一个是空的,即不进行任何操作,如图③所示.



3. 循环结构

如果一个计算过程要重复执行一系列步骤若干次,每次计算步骤完全相同,那么这种算法过程称为循环过程,循环过程非常适合计算机处理,因为计算机的运算速度非常快,执行成千上万次的重复计算,不过是一瞬间的事,且能保证每次的结果都正确.由此引出第三种结构——循环结构.

根据指定条件决定是否重复执行一条或多条指令的控制结构,称为循环结构.

从某处开始,按照一定条件反复执行某一处理步骤,反复执行的处理步骤称为循环体.

B 教材拓展

拓展点一 算法的五个特征

一个算法应该具有以下五个重要特征:

(1)概括性:写出的算法必须能解决一类问题,且能重复使用.

(2)逻辑性:即算法应具有正确性和顺序性.算法从初始步骤开始,分为若干明确的步骤,前一步是后一步的基础,只有执行完前一步才能执行下一步,并且每一步都具有确切的

含义,从而组成一个具有很强逻辑的序列.

(3)有穷性:一个算法必须保证执行有限步后结束.

(4)不唯一性:求解某个问题的算法不一定是唯一的,一个问题可以有不同的算法.

(5)普遍性:很多具体的问题,都可以设计合理的算法去解决.例如:心算、手算、计算器计算都是经过有限的,事先设计好的步骤加以解决.同样,一个工作计划,教学计划,生产流程都可称为“算法”.

拓展点二 设计算法的要求

算法是能解决一类问题的通用解法,它不同于求解一个具体问题的方法,它有如下要求:

(1)写出的算法必须能解决一类问题.

(2)算法过程要能一步一步执行,每一步执行的操作必须确切,不能含混不清,而且在有限步后,能得出结果.

注意:(1)算法从初始步骤开始,每一个步骤只能有一个后继步骤,从而组成一个步骤序列,序列的终止表示问题得到解答或指出问题没有得到解答.

(2)我们过去学过的许多数学公式都是算法,加、减、乘、除运算法则以及多项式的运算法则也是算法.

拓展点三 框图的画法

1. 程序框图主要由程序框和流程线组成,基本的程序框有起止框,输入、输出框,处理框,判断框,其中起止框是任何流程图不可缺少的,而输入、输出框可以用在算法中任何需要输入、输出的位置.

2. 画流程图的规则

为了使大家彼此之间能够读懂各自画出的框图,必须遵守一些共同的规则,下面对一些常用的规则作简单的介绍:

(1)使用标准的框图符号.

(2)框图一般按从上到下、从左到右的方向画.

(3)除判断框外,大多数流程图符号只有一个进入点和一个退出点.判断框是具有超过一个退出点的唯一符号.

(4)一种判断是对“是”与“否”两个分支的判断,而且且仅有两个结果;另一种是多分支判断,有几种不同的结果.

(5)在图形符号内描述的语言要非常简练清楚.

3. 一个流程图包括几个部分:

(1)表示相应的操作的程序框.

(2)带箭头的流程线.

(3)框内外必要的文字说明.

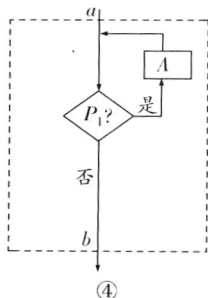
需要提醒的是流程线不要忘记画箭头,因为它是反映流程执行的先后顺序,所以如不画出箭头就难以判定各框的执行顺序了.

拓展点四 三种常见的循环结构**1. 计数型循环结构**

计数型循环一般用于预先知道重复的次数.

2. 当型循环结构

当型循环一般用于预先难以知道循环次数,通过设置某个条件,当条件满足时,就重复操作;当条件不满足时,就退出循环,如图④所示.

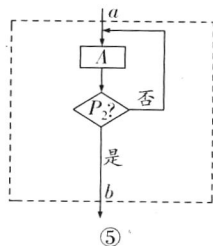


它的功能是当给定的条件 P_1 成立时,执行 A 框操作,执行完 A 框后,再判断 P_1 是否成立,如果仍然成立,那么再执行 A 框,如此反复执行 A 框,直到某一次条件 P_1 不成立为止,此时不再执行 A 框,而从 b 点脱离循环结构.

3. 直到型循环结构

直到型循环一般用于预先难以知道循环次数,通过设置某个条件,当条件不满足时,就重复操作;当条件满足时,退出循环.如图⑤所示.

它的功能是先执行 A 框,然后判断给定的条件 P_2 是否成立,如果条件 P_2 不成立,那么执行 A 框,然后再对条件 P_2 作出判断,如果条件 P_2 仍然不成立,再执行 A 框,如此反复执行 A 框,直到给定的条件 P_2 成立为止,此时不再执行 A 框,而从 b 点脱离循环结构.

**拓展点五 三种基本结构的共同特点**

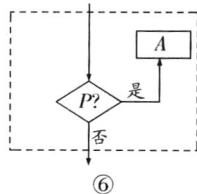
1. 只有一个入口,一个出口.

2. 一个判断框有两个出口,而一个基本结构只有一个出口.

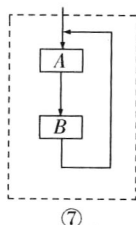
如图②③所示, a 为条件结构的入口, b 为条件结构的出口;如图④⑤所示, a 为循环结构的入口, b 为循环结构的出口.

3. 结构中的每一部分都有机会被执行到,即对于每一个

框来说都应当有一条从入口到出口的路径通过它.如图⑥中无一条从入口到出口的路径通过 A 框,则不存在这样的结构.



4. 结构内不能存在死循环,即无终止的循环.如图⑦是一个死循环.

**C 典型题解****► 问题一 算法概念题**

例题 1 我们已经学过的算法有求解一元二次方程的求根公式,加减消元法求二元一次方程组的解,二分法求出函数的零点等,对算法的描述有:①对一类问题都有效;②算法可执行的步骤必须是有限的;③算法可以一步一步地进行,每一步都有确切的含义;④是一种通法,只要按部就班地做,总能得到结果.以上算法的描述正确的有 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

[解析] 本题为算法的概念辨析题,解答有关算法的概念判断题应根据算法的五大特点.由算法的概念可知①②③④都正确,故选 D.

[答案] D

[点评] 算法的特点有:①有限性;②确定性;③顺序性与正确性;④不唯一性;⑤普遍性.

► 问题二 数值性问题算法的描述

例题 2 设计一个判断直线 $Ax + By + C = 0$ 与圆 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ 的位置关系的算法.

[解析] 熟练运用点到直线的距离公式,然后判断 d 与 r 的大小关系.

[答案] 算法如下:第一步,输入圆心坐标 (x_0, y_0) ,直线方程的系数 A, B, C 和半径 r .

第二步,计算 $z_1 = Ax_0 + By_0 + C$.



第三步, 计算 $z_2 = \sqrt{A^2 + B^2}$.

第四步, 计算 $d = \frac{|z_1|}{z_2}$.

第五步, 若 $d > r$, 则输出“相离”; 若 $d = r$, 则输出“相切”; 若 $d < r$, 则输出“相交”.

[点评] 本题可将第二、三、四步合并为一步计算: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

例题 3 某铁路客运部门规定甲、乙两地之间旅客托运行李的费用为:

$$C = \begin{cases} 0.53W & (0 < W \leq 50), \\ 50 \times 0.53 + (W - 50) \times 0.85 & (W > 50), \end{cases}$$

其中 $W(\text{kg})$ 为行李的质量, 如何设计计算费用 $C(\text{元})$ 的算法?

[解析] 本题为实际应用问题的算法设计, 为计算行李的托运费, 应先判断行李的质量是否大于 50 kg , 然后选用相应的公式进行计算.

[答案] 算法如下: 第一步, 输入行李的质量 W .

第二步, 若 $0 < W \leq 50$, 则 $C = 0.53W$; 否则 $C = 50 \times 0.53 + (W - 50) \times 0.85$.

第三步, 输出运输费 C 与行李的质量 W .

[点评] 因为分段函数的变量在不同范围内的函数关系式不同, 所以当给出一个自变量 W 的值, 要求它对应的函数值时, 必须先判断 W 的范围, 然后确定用该范围内的函数关系式计算相应的函数值.

►问题三 非数值性问题算法的描述

非数值性问题主要是指排序、查找最值、变量的交换、文字处理等问题, 求解此类问题需建立过程模型.

例题 4 将三个数 a, b, c 中最大数输出.

[解析] 求 a, b, c 中的最大数, 先比较 a, b , 若 $a > b$, 则再比较 a, c , 若 $a > c$, 则 a 为最大者, 否则 c 为最大者; 若 $a < b$, 则再比较 b, c , 若 $b > c$, 则 b 为最大者, 否则 c 为最大者.

[答案] 解法一: 第一步, 将 a 的值赋给 $\max$.

第二步, 若 $b > \max$ 成立, 用 b 的值替换 $\max$ 的值; 否则直接执行下一步.

第三步, 若 $c > \max$ 成立, 用 c 的值替换 $\max$ 的值; 否则直接执行下一步.

第四步, 输出 $\max$ 的值.

解法二: 第一步, 若 $a > b$ 成立, 则执行第二步; 否则执行第三步.

第二步, 若 $a > c$ 成立, 则输出 a , 并结束; 否则输出 c , 并结束.

第三步, 若 $b > c$ 成立, 则输出 b , 并结束; 否则输出 c , 并结束.

[点评] 解法一首先定义 $\max = a$, 依次与 b, c 比较大小; 而解法二是直接比较 a 与 b , 然后分两种情况比较大小.

例题 5 现有有限个正整数, 试设计一个求这些正整数中的最大数的算法.

[解析] 如果让我们从 10 个、8 个正整数中找出最大数, 那么也许是一件很简单的事, 我们一眼就能看出结果, 但如果给我们 100 个、1 000 个, 甚至更多的数, 那么找出其中最大的数就是一件很困难的事了, 我们必须依靠算法来解决这个问题. 我们可以设想有一个基础数 (如第一个数) 让它作为其中的最大的数, 然后将第二个数与这个基础数比较, 将这两者中的较大者再作为基础数与第三个数比较, 找出其中的较大者, 将其作为基础数再与第四个数比较, 依此类推, 直到与最后一个数比较完毕, 就能确定出有限个正整数中的最大数.

[答案] 算法步骤用自然语言叙述如下:

第一步, 先假定这些正整数中的第一个数为“最大数”.

第二步, 将这些整数中的下一个数与“最大数”比较. 如果它大于此“最大数”, 那么假定它是“最大数”.

第三步, 如果还有其他正整数, 那么重复第二步.

第四步, 一直到没有可比较的数为止, 这时假定的“最大数”就是这有限个正整数中的最大数.

[点评] 一个算法, 就是要求我们去按部就班地做, 每做一步都有唯一的结果, 并且在有限步之后, 总能得出结果.

►问题四 程序框图的概念

例题 6 下列关于程序框图的说法正确的是 ()

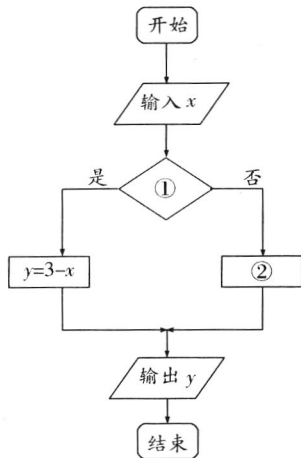
- A. 程序框图是描述算法的语言
- B. 在程序框图中, 一个判断框最多只能有一个退出点
- C. 程序框图虽可以描述算法, 但不如用自然语言描述算法直观
- D. 程序框图和流程图不是同一个概念

[解析] 本题是程序框图概念方面的辨析题. 一个判断框可以有多个退出点, 所以 B 不正确; 程序框图就是流程图, 所以 D 不正确; 程序框图要比自然语言直观、形象, 所以 C 不正确, 故选 A.

[答案] A

[点评] 程序框图是算法的一种表达形式, 通常是先写算法步骤, 然后再化为对应的程序框图.

例题 7 已知 $y = |x - 3|$, 下列程序框图表示的是给定 x 值, 求其相应函数值的算法. 请将该程序框图补充完整, 其中①处应填 _____; ②处应填 _____.

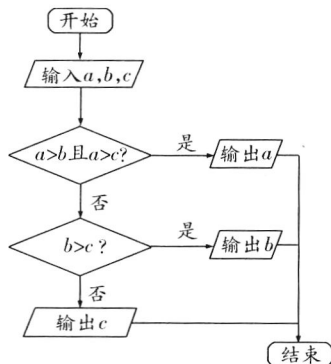


[解析] 本题考查程序框图中各图形符号的功能以及对框图所表示算法的理解. 因为 $y = |x - 3|$, 所以需对 $x - 3$ 的正负进行判断. 故判断框内应为 $x < 3$? 因为“是”时, 为 $y = 3 - x$, 所以“否”时, 即 $x \geq 3$ 时, 为 $y = x - 3$.

[答案] $x < 3$? $y = x - 3$

[点评] 理清题目中框图所表达的算法是解决问题的关键.

例题 8 如图所示的程序框图是将一系列指令和问题用框图的形式排列而成的, 箭头将告诉你下一步到哪一个程序框. 阅读下面的程序框图, 并回答下面的问题.



(1) 程序框图表示了怎样的算法?

(2) 若 $a > b > c$, 则输出的数是 _____; 若 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = \log_3 2$, 则输出的数是 _____.

[解析] 程序框图中有两处判断, 由框图中所示的文字和符号表示的操作内容可知: 此框图表示的是“找出 a, b, c 三个数中的最大值”的算法. 明确了算法, 问题(2)便可解决.

$$\therefore a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{2}{3} = b,$$

$$\therefore a > b.$$

$$\therefore 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9} > \sqrt[3]{8} = 2 = 3^{\log_3 2}.$$

$$\therefore b > c.$$

$$\therefore a > b > c.$$

[答案] (1) 此框图表示的算法是“找出 a, b, c 三个实数中的最大值”. (2) a

[点评] 程序框图主要包括三部分: ①表示相应操作的框; ②带箭头的流程线; ③框内外必要的文字说明. 读懂程序框图要从这三个方面着手, 流程线反映了流程执行的先后顺序, 主要看箭头方向, 框内外文字说明表明了操作内容. 以此题方式考查算法的理解与应用, 会成为新高考的命题趋势.

► 问题五 顺序结构

例题 9 半径为 r 的圆, 面积公式为 $S = \pi r^2$, 当 $r = 10$ 时, 写出计算圆面积的算法, 画出程序框图.

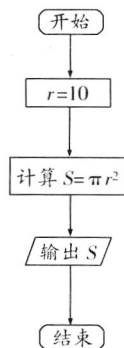
[解析] 本题主要考查算法结构中的顺序结构. 对套用公式型的问题, 关键是明确所给公式中变量的个数及数值, 以及输入、输出部分的设计.

[答案] 算法如下: 第一步, 输入 $r = 10$.

第二步, 计算 $S = \pi r^2$.

第三步, 输出 S .

程序框图如图所示:



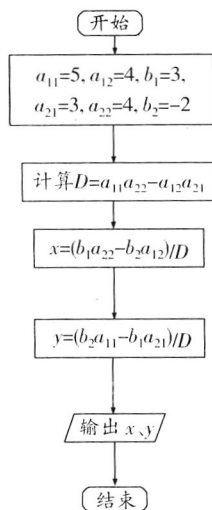
[点评] 对此类题型来讲, 算法其实就是将相关数值代入公式计算的过程.

例题 10 画出解下列方程组的程序框图.

$$\begin{cases} 5x + 4y - 3 = 0, \\ 3x + 4y + 2 = 0. \end{cases}$$

[解析] 本题考查的是我们都熟悉的解二元一次方程组的算法, 正确地运用图形符号表示这个过程即可.

[答案] 程序框图如图所示:



[点评] (1) 本题是根据高斯消去法设计的一个算法. 解决

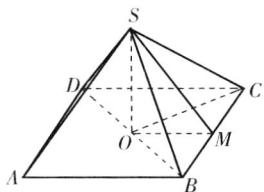
一般的二元一次方程组: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \text{①} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \text{②} \end{cases}$ 时, 求得 $D =$

$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. 若 $D \neq 0$, 则 $x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, x_2 =$

$\frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$; 若 $D = 0$, 则方程组无解或有无穷多组解.

(2) 本题只要用顺序结构就能表示算法. 但对高斯消去法可能要作对 $D = 0$ 或 $D \neq 0$ 作出判断, 从而用到条件结构.

例题 11 求底面边长为 4, 侧棱长为 5 的正四棱锥的侧面积及体积, 为该问题设计算法, 并画出程序框图.



[解析] 本题是为立体几何中的求锥体体积、侧面积设计算法的题目. 首先要熟悉体积及侧面积的公式, 再弄清题目中的已知量和未知量.

根据公式 $V = \frac{1}{3}S_{\text{底}}h$. 由题意知 $S_{\text{底}} = AB^2$,

$h = SO = \sqrt{SC^2 - OC^2}$, 欲求 h 可先求 OC , 易知 $OC = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$.

要求侧面积先求斜高 SM , 而 $SM = \sqrt{SB^2 - \frac{1}{4}BC^2}$, 从而得侧面积 $S_{\text{侧}} = 4 \times \frac{1}{2} \times BC \times SM$, 由于题中字母较多, 可在计算时用大写字母表示线段的长.

也可考虑先推导出求体积和侧面积的公式, 转化为套用公式型的算法, 然后代入数据求解.

[答案] 解法一: 第一步, $a = 4, c = 5$.

第二步, $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

第三步, $h = \sqrt{c^2 - R^2}, S = a^2$.

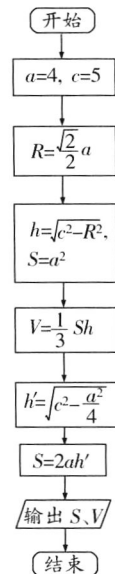
第四步, $V = \frac{1}{3}Sh$.

第五步, $h' = \sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}}$.

第六步, $S = 2ah'$.

第七步, 输出 S, V .

程序框图如图所示:



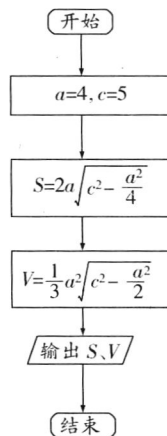
解法二: 第一步, $a = 4, c = 5$.

第二步, $S = 2a\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}}$.

第三步, $V = \frac{1}{3}a^2\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{2}}$.

第四步, 输出 S, V .

程序框图如图所示:



[点评] 比较以上两种解法,解法一思路清晰,但步骤多,程序框图也比较复杂,解法二尽管步骤简单,但要先推导公式,一旦公式有误,就会满盘皆输,两种算法各有优缺点.解决此类问题时要根据情况灵活选择算法.

►问题六 条件结构

例题 12 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & (x>0), \\ 0 & (x=0), \\ x^2+3 & (x<0), \end{cases}$ 试设计算法及程序框图,要求输入自变量 x 的值,输出函数值.

[解析] 该函数是分段函数,当 x 取不同范围的值时,函数的表达式不同,因此当给出一个自变量 x 的值时,需先判断 x 的范围,然后确定利用哪一段解析式求函数值,因为函数解析式分三段,所以判断框需两个,即进行两次判断.

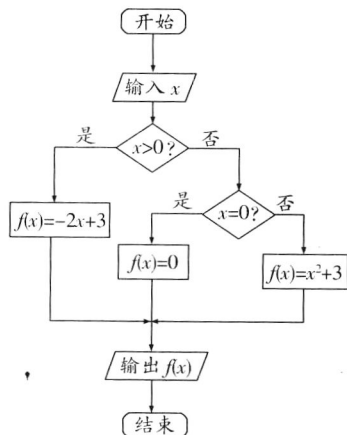
[答案] 算法如下:

第一步,输入 x .

第二步,如果 $x>0$,那么 $f(x) = -2x+3$;如果 $x=0$,那么 $f(x) = 0$;如果 $x<0$,那么 $f(x) = x^2+3$.

第三步,输出函数值 $f(x)$.

程序框图如图所示:



[点评] (1)求分段函数的函数值的程序框图的画法,如果是分两段的函数,那么只需引入一个判断框;如果是分三段的函数,那么只需引入两个判断框;如果是分四段的函数,那么需引入三个判断框,依此类推.

(2)判断框内的内容无顺序限制,如本题中两个判断框的内容可以交换,但对应的下一程序框中的内容和操作也必须相应地变化.

例题 13 在音乐唱片超市里,每张唱片售价 25 元.顾客若购买 5 张以上(含 5 张)唱片,则按九折收费;若顾客买 10 张以上(含 10 张)唱片,则按八五折收费,请设计一个完成计费工作的算法,画出程序框图.

[解析] 本题是一道实际应用问题,应先建立数学模型.假设用变量 a 表示顾客买的唱片数,用 c 表示顾客花的钱数,那么依题意有:

$$c = \begin{cases} 25a & (0 \leq a < 5), \\ 22.5a & (5 \leq a < 10), \\ 21.25a & (a \geq 10). \end{cases}$$

[答案] 算法如下:

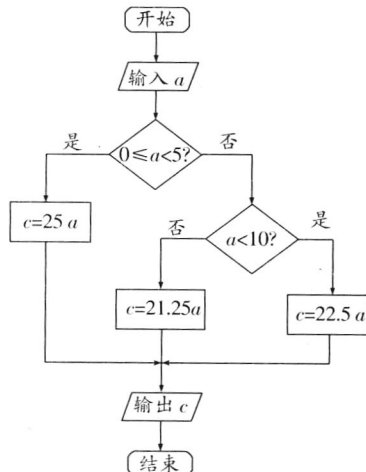
第一步,输入 a .

第二步,若 $0 \leq a < 5$,则 $c = 25a$,执行第四步,否则执行第三步.

第三步,若 $a < 10$,则 $c = 22.5a$,执行第四步,否则 $c = 21.25a$,执行第四步.

第四步,输出 c .

程序框图如图所示:



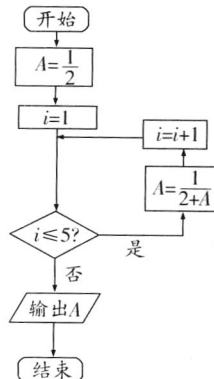
►问题七 循环结构

例题 14 画出一个求 $\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots \frac{1}{2}}}}$ (共 6 个 2) 的值的算法

的程序框图.

[解析] 关键是找出循环体.

[答案] 程序框图如图所示:



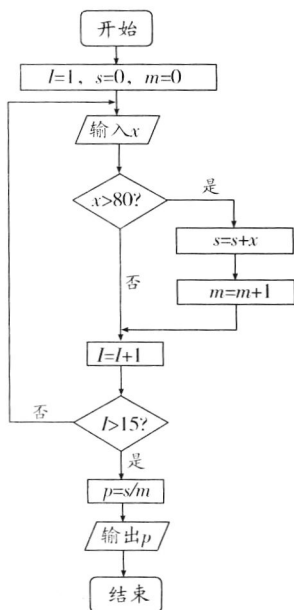


[点评] 本例的循环结构属于当型循环,也可改为直到型循环.类似地,可以设计求 $\sqrt{2 \sqrt{2 \sqrt{2 \cdots \sqrt{2}}}}$ 的值的算法的程序框图.

例题 15 以下是某次考试中某班 15 名同学的数学成绩(单位:分):72,91,58,63,84,88,90,55,61,73,64,77,82,94,60.要求将 80 分以上的同学的平均分求出来,画出该问题算法的程序框图.

[解析] 用条件结构来判断成绩是否高于 80 分,用循环结构控制输入的个数,同时引进两个累加变量,分别计算高于 80 分的成绩的总和和人数.

[答案] 程序框图如图所示:



[点评] 对于此类要求把所给的多个数据逐一检验看是否满足条件的问题,可采用条件结构和循环结构相结合的算法设计.

例题 16 设计一个算法:输出 1 000 以内能被 3 和 5 整除的所有正整数,画出程序框图.

[解析] 本题是计数型循环结构,凡被 3 和 5 整除的正整数都是 15 的倍数,而 $1\,000 = 15 \times 66 + 10$, 因此 1 000 以内一共有 66 个这样的正整数,引入变量 a 表示输出的数,引入计数变量 n , n 可以取 $1 \sim 66$, 反复输出 a , 就能输出 1 000 以内的所有能被 3 和 5 整除的正整数.

[答案] 算法如下:

第一步, $n=1$.

第二步,若 $n \leq 66$, 则执行第三步,否则,执行第六步.

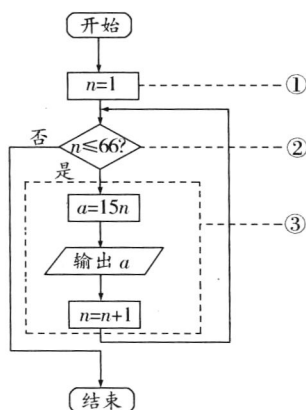
第三步, $a=15n$.

第四步,输出 a .

第五步, $n=n+1$, 返回第二步.

第六步,结束.

程序框图如图所示:



[点评] (1) 本题中描述算法的结构中反复执行的第③部分,称为循环体.

(2) 变量 n 控制循环的开始和结束,称为循环变量.

(3) 第①部分是赋予循环变量的初始值,预示循环开始.

(4) 第②部分判断是否继续执行循环体,称为循环终止条件.

D 针对性练习

基础题

1. 下列关于算法的说法,正确的有 ()

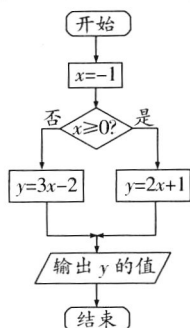
- ① 求解某一类问题的算法是唯一的;
- ② 算法必须在有限步操作之后停止;
- ③ 算法的每一步操作必须是明确的,不能有歧义或模糊;
- ④ 算法执行后一定产生确定的结果.

- A. ① B. ①③
C. ②③④ D. ①②③④

2. 以下给出对程序框图的几种说法:①任何一个程序框图都必须有起止框;②输入框只能放在开始框后,输出框只能放在结束框前;③判断框是唯一一个具有超过一个退出点的框图符号;④对于一个程序来说,判断框内的条件的表达方法是唯一的. 其中正确说法的个数有 ()

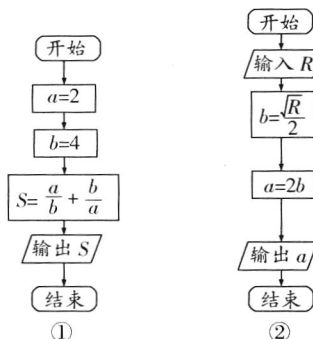
- A. 1 个 B. 2 个
C. 3 个 D. 4 个

3. 写出下列程序框图描述的算法的运行结果 ()



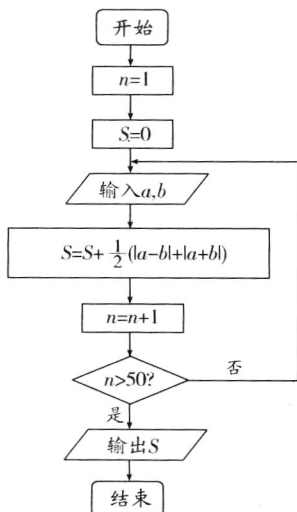
- A. -5
B. 5
C. -1
D. -2
4. 写出下列程序的运算结果.

- (1) 图①中输出 $S =$ _____;
(2) 图②中若输入 $R = 8$, 则输出 $a =$ _____.



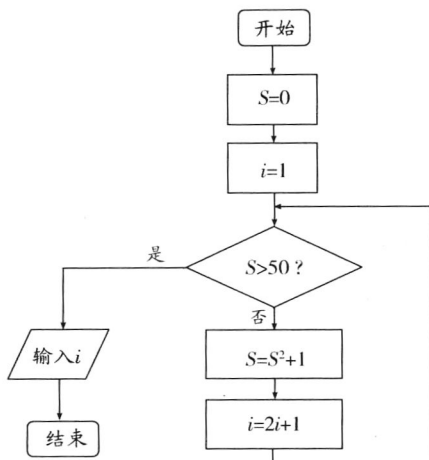
综合提升题

5. 将 $1, 2, 3, \dots, 100$ 这 100 个自然数任意分成 50 组, 每组两个数, 现将每组的两个数中任意一个数记为 a , 另一个数记为 b , 按框图所示进行运算 (注: 框图中每次“输入 a, b ”为同一组的 a, b 值, 且每组数据不重复输入), 则输出的 S 最大值为 ()

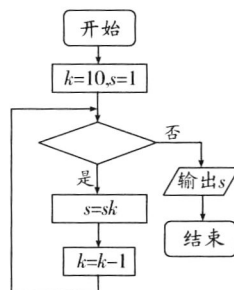


- A. 5 050
B. 3 775
C. 2 525
D. 3 885

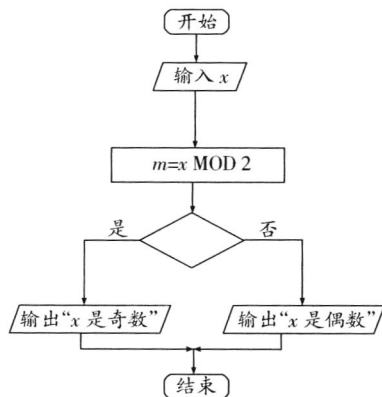
6. 某程序框图如图所示, 该程序运行后输出 i 的值是 ()



- A. 27
B. 31
C. 15
D. 63
7. 如图是一算法的程序框图, 若此程序运行结果为 $s = 720$, 则在判断框中应填入关于 k 的判断条件是 ()



- A. $k \geq 6$?
B. $k \geq 7$?
C. $k \geq 8$?
D. $k \geq 9$?
8. 下面程序框图能判断任意输入的数 x 的奇偶性, 其中判断框内的条件是_____.



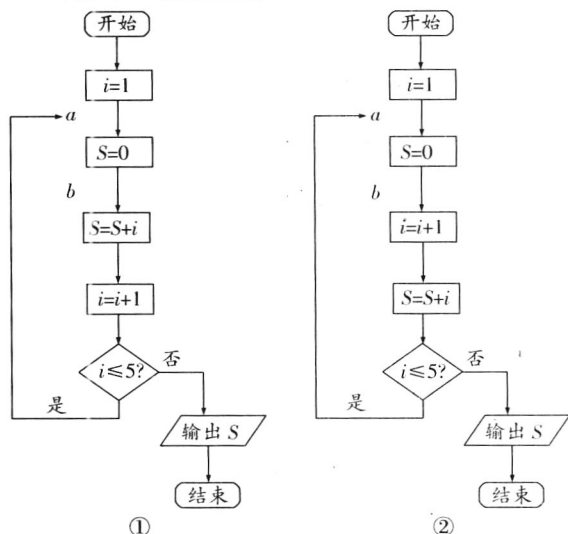
9. 根据不同条件写出程序框图的运行结果.

- (1) 图①中, 箭头指向 a 时输出 $S =$ _____, 箭头指向 b

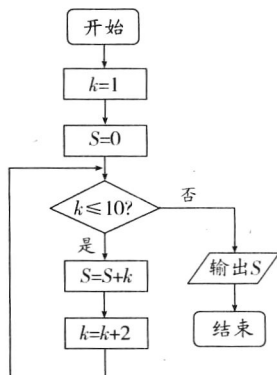


时输出 $S = \underline{\hspace{2cm}}$;

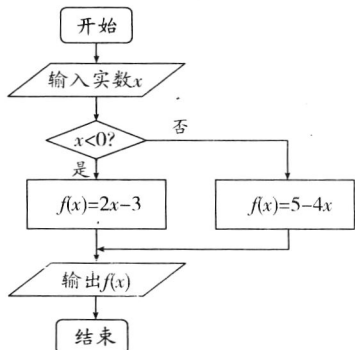
- (2) 图②中, 箭头指向 a 时输出 $S = \underline{\hspace{2cm}}$, 箭头指向 b 时输出 $S = \underline{\hspace{2cm}}$.



10. 某算法的程序框图如图所示, 则执行该程序后, 输出的结果 $S = \underline{\hspace{2cm}}$.



11. 如图是某个求函数值的程序框图, 则满足该程序的函数解析式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



12. 下面给出一个问题的算法:

第一步, 输入 x .

第二步, 若 $x \geq 4$, 则执行第三步, 否则执行第四步.

第三步, 输出 $2x - 1$.

第四步, 输出 $x^2 - 2x + 3$.

(1) 这个算法解决的问题是什么?

(2) 当输入的 x 为多大时, 输出的数值最小?

13. 在国内寄平信, 每封信的质量 x (g) 不超过 60 g 时的邮费

$$(\text{单位: 分}) \text{ 标准为 } y = \begin{cases} 80 & x \in (0, 20], \\ 160 & x \in (20, 40], \\ 240 & x \in (40, 60], \end{cases}$$

试画出计算邮费的程序框图.

14. 相传古代印度国王舍罕要褒赏他聪明能干的宰相达依尔(国际象棋的发明者),问他需要什么,达依尔说:“国王只要在国际象棋的棋盘第一个格子里放一粒小麦,第二个格子里放两粒,第三个格子里放四粒,以后按此比例每一格加一倍,一直放到第64格(国际象棋的棋盘有 $8 \times 8 = 64$ 格),我就感恩不尽,其他什么也不要了。”国王想:“这有多少,还不容易!”让人扛来一袋小麦,但不到一会儿就全用完了,再来一袋很快又没有了,结果全印度的粮食都用完还不够,国王很奇怪,怎么也算不清这笔账,一个国际象棋棋盘按这种方式一共能放多少粒小麦.试用程序框图表示其算法.

15. 电脑游戏中,“主角”的生命机会往往被预先设定.如果枪战游戏中,“主角”被设定生命机会5次,每次生命承受射击8枪(被击中8枪则失去一次生命机会).假设射击过程均为单发发射,试为“主角”耗用生命机会的过程设计一个算法程序框图.

[参考答案]

1. C

2. B

3. A 解析:根据判断框,若 $x < 0$,则 $y = 3x - 2$,当 $x = -1$ 时, $y = 3 \times (-1) - 2 = -5$,故选A.

4. (1) $\frac{5}{2}$ (2) $2\sqrt{2}$ 解析: $S = \frac{2}{4} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$; $b = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$, $a = 2b = 2\sqrt{2}$.

5. B 解析:此程序框图输出的 S 是50组数中较大数字之和,当这50个较大数字恰好为51、52、53、…、100时,输出的 S 最大,最大值为3775. 故选B.

6. D 解析:由程序框图可知: $S = 0, i = 1; S = 1, i = 3; S = 2, i = 7; S = 5, i = 15; S = 26, i = 31; S = 677 > 50, i = 63$,那么输出 $i = 63$.

7. C 解析: $s = 10 \times 9 \times 8, 10 \geq 8, 9 \geq 8, 8 \geq 8$,判断条件为“是”时进入循环体, $7 \geq 8$ 判断条件为“否”,跳出循环,输出 s ,故选C.

8. $m = 1$?

9. (1) 5 15 (2) 6 20 解析:(1)图①中当箭头指向 a 时,每次循环一开始 S 变为0,最后输出的 S 即 $S = 0 + 5 = 5$;而箭头指向 b 时表示 $S = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$;(2)图②中当箭头指向 a 时,同(1)中情况,每次循环一开始 S 变为0,最后输出 S 时, $i = 6, S = 0 + 6$,故 $S = 6$;而箭头指向 b 时表示 $S = 0 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$.

10. 25 解析:执行该程序,每次的循环结果依次为: $k = 1, S = 1; k = 3, S = 4; k = 5, S = 9; k = 7, S = 16; k = 9, S = 25; k = 11$,跳出循环,此时 S 被赋予的值是25.

11. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & (x < 0), \\ 5 - 4x & (x \geq 0). \end{cases}$ 解析:由程序框图可知,当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 5 - 4x$;当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2x - 3$,是一个分段函数.

12. (1) 这个算法解决的问题是求分段函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & (x \geq 4), \\ x^2 - 2x + 3 & (x < 4) \end{cases} \text{ 的函数值的问题.}$$

(2) 当 $x \geq 4$ 时, $f(x) = 2x - 1 \geq 7$;当 $x < 4$ 时, $f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2 \geq 2$, $\therefore$ 当输入 $x = 1$ 时, $f(x)_{\min} = 2$.