



高等学校“十一五”规划教材

结构力学

下册

Jiegou Lixue

主 编 吕恒林
副主编 王 来 闫安志 鲁彩凤

中国矿业大学出版社

China University of Mining and Technology Press

高等学校“十一五”规划教材

结 构 力 学

(下册)

主 编 吕恒林

副主编 王 来 闫安志 鲁彩凤

中国矿业大学出版社

内 容 简 介

本书是高等学校“十一五”规划教材。全书分上、下两册,共十四章。下册为专题部分,共四章内容,其主要内容为:矩阵位移法、结构的极限荷载、结构的稳定计算、结构的动力计算。与本书配套的《结构力学习题集》同时由中国矿业大学出版社出版。

本书可作为高等学校土木工程各专业方向的本科教材,也可供土建工程技术人员及其他相关专业人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学.下册/吕恒林主编. —徐州:中国矿业大学出版社,2010.8

ISBN 978 - 7 - 5646 - 0742 - 5

I. ①结… II. ①吕… III. ①结构力学—高等学校—教材 IV. ①O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 163578 号

书 名 结构力学(下册)

主 编 吕恒林

责任编辑 杨传良 杨 洋

责任校对 何晓惠 王美柱

出版发行 中国矿业大学出版社

(江苏省徐州市解放南路 邮编 221008)

营销热线 (0516)83885307 83884995

网 址 <http://www.cumtp.com> E-mail: cumtpvip@cumtp.com

排 版 中国矿业大学出版社排版中心

印 刷 徐州中矿大印发科技有限公司

经 销 新华书店

开 本 787×1092 1/16 印张 14.5 字数 358 千字

版次印次 2010 年 8 月第 1 版 2010 年 8 月第 1 次印刷

定 价 26.00 元

(图书出现印装质量问题,本社负责调换)

前 言

根据国家力学基础课程教学指导委员会制订的“结构力学”课程教学基本要求(A类),“结构力学”课程是土木工程、水利水电工程等专业的一门主要专业基础课,其主要任务是让学生在学习理论力学和材料力学等课程的基础上进一步掌握平面杆件结构分析计算的基本概念、基本原理和基本方法,了解各类结构的受力性能,为学习有关专业课程以及进行结构设计和科学研究打好力学基础,培养结构分析与计算等方面的能力。

本教材正是依据该课程的性质和任务,以及在各位编者多年来教学改革经验的基础上编写而成的,该教材是高等学校“十一五”规划教材之一。

本书分上、下两册,共十四章。上册是基础内容,共十章,其主要内容分别为:绪论、平面杆件体系的几何组成分析、静定梁和静定刚架、静定拱和悬索结构、静定桁架和组合结构、虚功原理和杆件结构的位移计算、力法、位移法、渐近法、影响线及其应用。下册是专题部分,包括矩阵位移法、结构的极限荷载、结构的稳定计算及结构的动力计算等内容。考虑到本课程注重实践性教学环节,要有一定的课堂练习和讨论的时间,因此与本书配套出版了《结构力学习题集》。本教材和配套的习题集可作为高等学校土木工程各专业方向的本科教学用书,也可供土建工程技术人员及其他相关专业人员参考。

本书由吕恒林任主编,王来、闫安志和鲁彩凤任副主编。本书编写分工如下:中国矿业大学吕恒林(第一章、第二章、第十一章)、鲁彩凤(第三章、第十章)、姬永生和周淑春(第五章、第九章)、丁北斗(第十三章)、舒前进(第十二章)、吴元周(附录),山东科技大学王来(第六章)、邹筱林(第七章),河南理工大学闫安志(第四章、第十四章)、秦本东(第八章)。

热忱欢迎读者对本书中所存在的错误或不妥之处提出批评和指正。

编者

2010年1月

主要符号表

A	面积, 振幅
$\mathbf{A}$	振幅向量
A_w	图形面积
c	支座反力位移, 黏滞阻尼系数
C	弯矩传递系数
c_{cr}	临界阻尼系数
d	结间长度
D	侧移刚度
E	弹性模量
E_p	结构总势能
E	荷载势能
f	拱高, 工程频率
F	集中荷载
$\mathbf{F}$	节点荷载向量, 综合节点荷载向量
$\mathbf{F}_D$	直接节点荷载向量
$\mathbf{F}_E$	等效节点荷载向量
F_H	水平推力
F_{Ax}, F_{Ay}	A 支座沿 x, y 方向的反力
F_{AH}, F_{AV}	A 支座沿水平, 竖直方向的反力
F_N	轴力
F_N^L, F_N^R	截面左、右轴力
F_P	荷载, 作用力
$\mathbf{F}_P$	结构荷载向量
F_{Pe}	欧拉临界荷载
F_{Pcr}	临界荷载
F_{Pa}	极限荷载
F_P^+	可破坏荷载
F_P^-	可接受荷载
F_e	弹性力
F_i	惯性力
F_R	阻尼力, 广义反力, 力系合力
F_S	剪力

F_S^L, F_S^R	截面左、右剪力
F_S^F	固端剪力
F_T	悬索张力
F_u	极限荷载
F_v	悬索张力竖直分量
$\bar{F}^e$	单元(局部)坐标系下单元杆端力分量
F^e	结构(整体)坐标系下单元杆端力分量
$\bar{F}^{Fe}$	单元(局部)坐标系下单元固端力分量
F^{Fe}	结构(整体)坐标系下单元固端力分量
G	切变模量
h	杆件截面高度
i	线刚度
I	惯性矩, 冲量
$\mathbf{I}$	单位矩阵
k	刚度系数、截面剪力分布不均匀系数
K	结构刚度矩阵
$\bar{K}^e$	单元(局部)坐标系下单元刚度矩阵
K^e	结构(整体)坐标系下单元刚度矩阵
l	长度, 跨度
m	质量
$\mathbf{M}$	质量矩阵
M	力矩、力偶矩、弯矩
M^F	固端弯矩
M_u	极限弯矩
M_e	弹性极限弯矩
P	广义力、广义荷载
$\mathbf{P}_e$	单元结点荷载向量
$\mathbf{P}$	结构结点荷载向量
p	轴向均布荷载集度
q	横向均布荷载集度
r	半径, 反力影响系数, 单位位移引起的广义反力
R	半径, 广义反力
S	劲度系数(转动刚度), 截面静矩, 影响线量值
t	温度, 时间
T	周期, 动能
$\mathbf{T}$	坐标变(转)换矩阵
U	虚应变能
u	水平位移
v	竖向位移, 挠度, 速度

主要符号表

V	外力势能
V_e	应变能
W	功,体系的外力虚功,抗弯模量,平面体系自由度,弯曲截面系数
W_i	体系的内力虚功
X	广义未知力,广义多余未知力
Y	位移幅值向量,主振型向量,主振型矩阵
y	位移
Z	影响线量值,广义未知位移
α	线膨胀系数,初相角
δ	柔度系数,位移影响系数,单位荷载引起的广义位移
β	动力系数,频比,杆件的旋转角
γ_0	切应变
γ	平均切应变
ϵ	线应变
ζ	阻尼比
θ	角位移,干扰力频率
μ	力矩分配系数
ν	剪力分配系数
σ_b	强度极限
σ_s	屈服应力
σ_u	极限应力
φ	振型矩阵
ω	圆频率
ξ	等效集中质量系数
κ	曲率
Δ	广义位移
Δ	结构位移向量
$\overline{\Delta}^e$	单元(局部)坐标系下单元杆端位移向量
Δ^e	结构(整体)坐标系下单元杆端位移向量
λ^e	单元定位向量
φ	截面转角(如“拱结构”)

目 录

第十一章 矩阵位移法	1
第一节 概述	1
第二节 矩阵位移法的基本概念	2
第三节 单元分析	15
第四节 整体分析	20
第五节 等效结点荷载	25
第六节 计算步骤及算例	28
第十二章 结构的极限荷载	32
第一节 概述	32
第二节 几个基本概念	33
第三节 静定梁的极限荷载	35
第四节 单跨超静定梁的极限荷载	36
第五节 连续梁的极限荷载	41
第六节 比例加载时判定极限荷载的一般定理	42
第七节 计算极限荷载的机构法和试算法	43
第八节 简单刚架的极限荷载	45
第九节 超静定结构考虑内力重分布的工程实用设计方法	48
第十三章 结构的稳定计算	52
第一节 概述	52
第二节 确定临界荷载的静力法	55
第三节 确定临界荷载的能量法	59
第四节 剪力对临界荷载的影响	66
第五节 组合压杆	68
第六节 具有弹性支座压杆的稳定	72
第七节 变截面杆的稳定问题	75
第八节 圆环及拱的稳定	78
第九节 窄条梁	85
第十节 矩阵位移法解决刚架的稳定问题	87

第十四章 结构的动力计算	96
第一节 概述	96
第二节 单自由度体系的运动方程	99
第三节 单自由度体系的自由振动	103
第四节 单自由度体系的强迫振动	109
第五节 阻尼对振动的影响	118
第六节 多自由度体系的自由振动	122
第七节 主振型的正交性	137
第八节 多自由度体系在简谐荷载下的受迫振动	139
第九节 多自由度体系在任意荷载下的受迫振动	145
第十节 无限自由度体系的自由振动	150
第十一节 近似法计算自振频率	153
 附录 连续梁和平面杆件结构程序的框图设计和源程序	160
第一节 连续梁程序的框图设计	160
第二节 连续梁源程序和算例	163
第三节 平面杆件结构程序设计的几个问题	167
第四节 平面杆件结构的框图设计	176
第五节 平面杆件结构源程序和算例	191
 参考文献	222

第十一章 矩阵位移法

第一节 概 述

电子计算机的出现给力学领域带来了变革,以矩阵位移法为代表的离散化数值方法的提出就是一个重要方面。传统的力学分析方法由于受到计算工具的限制,计算对象只能是一些小型问题。以平面刚架计算为例,用位移法解题时,结点位移的个数一般不宜超过 5 个,5~10 次的超静定结构用手工很难求解出精确的结果。20 世纪 30 年代出现力矩分配法之后,未知量的个数可以多一些,但最多也就一二十个。在结构分析中使用了电子计算机以后,不仅节约了大量的时间和人力,而且结构分析的深度、广度和精度都是前所未有的。

矩阵位移法是以电子计算机为工具的“电算”方法,以大型问题为研究对象,未知量的个数可以成千上万,因而为解决复杂的力学问题提供了有效的工具。掌握了这个工具,力学工作者如虎添翼,过去不敢碰的一些计算难题现在已变成常规问题,过去不得已才被采用的一些简单的计算模型已经被更加符合实际的复杂模型代替。最优化设计方法的发展使结构设计从单纯的验算过程变成真正的设计过程。

为了适应电算的特点,在矩阵位移法中广泛采用了数值计算的矩阵分析方法。矩阵分析方法不仅可以用紧凑且简洁的符号代替传统的数学表达式,而且矩阵运算的规律性和单一性便于编制计算机程序,从而实现自动的高速运算。可以说,矩阵位移法的发展借助于两个重要的工具:在理论推导中采用了矩阵分析方法;在实际计算中采用了电子计算机,矩阵位移法、矩阵、计算机是三位一体的。因此,矩阵位移法又称为结构力学的矩阵分析或结构力学的计算机方法。矩阵位移法是有限元法的雏形,因此矩阵位移法有时也被称为杆件结构的有限元法。

有限元法的要点是:把连续体分割成有限个单元,单元之间以结点相连接,即以单元集合体代替连续体(称作离散化);之后对每个单元应用几何、物理和平衡三个方面条件,建立单元的结点力与结点位移间的关系式(称单元分析);再根据变形协调和结点的平衡,建立结构的结点位移和结点荷载的关系式(称整体分析),从而求出结构的位移和内力。

同样,矩阵位移法的基本思路是:把平面杆件结构拆成许多杆件,对每个杆件进行力学分析,再将杆件综合成原结构。在“一分一合、拆了再搭”的过程中,把复杂平面杆件结构的计算问题转化为空中杆件结构的计算问题。

第二节 矩阵位移法的基本概念

本节将对连续梁进行讨论,对矩阵位移法的基本概念和计算步骤作简要介绍。

一、引例

首先用位移法计算一个简单的连续梁,从中引出矩阵位移法的一些基本概念。

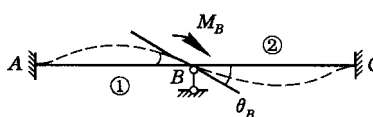


图 11-1 连续梁引例

图 11-1 所示连续梁,共有两个单元(杆件①和杆件②),三个结点(A,B,C),其中结点 A 和结点 C 是固定端,结点 B 承受力偶 M_B 。按位移法进行计算时,基本未知量是结点转角 θ_B ,基本方程是结点 B 的力矩平衡方程,计算分为两步:

(1) 单元分析

应用转角位移方程,将单元①和单元②的杆端弯矩用结点转角 θ_B 来表示:

$$\begin{cases} M_{BA} = 4i_1\theta_B & (\text{单元 ①}) \\ M_{BC} = 4i_2\theta_B & (\text{单元 ②}) \end{cases} \quad (11-1)$$

式中, i_1, i_2 是单元①和单元②的线刚度,杆端弯矩和结点转角以顺时针方向为正。

(2) 整体分析

为了求出 θ_B ,可写出结点 B 的力矩平衡方程: $\sum M_B = 0, M_{BA} + M_{BC} = M_B$ 。将式(11-1)代入,得:

$$(4i_1 + 4i_2)\theta_B = M_B \quad (11-2)$$

式(11-2)就是位移法的基本方程,由此可以解出基本未知量 θ_B :

$$\theta_B = \frac{M_B}{4i_1 + 4i_2}$$

上面的例子虽然很简单,却包括了矩阵位移法的许多基本思想。

1. 基本思路

矩阵位移法的基本思路是“先分后合”:先分——将连续梁分成单元进行分析,用结点位移 θ_B 表示单元内力 M_{BA} 和 M_{BC} ;后合——将单元重新组合成结构,进行整体分析,建立整体平衡条件 $\sum M_B = 0$,由此可求出结点位移 θ_B 。因此,矩阵位移法包括两个基本环节:单元分析和整体分析。

2. 单元刚度系数的概念

单元分析的目的是对每个单元建立杆端弯矩与结点转角之间的关系式,即转角位移方程[式(11-1)]:

$$\begin{cases} M_{BA} = k^{\textcircled{1}}\theta_B & (\text{单元 ①}) \\ M_{BC} = k^{\textcircled{2}}\theta_B & (\text{单元 ②}) \end{cases} \quad (11-3)$$

式中, $k^{\textcircled{1}} = 4i_1, k^{\textcircled{2}} = 4i_2$; $k^{\textcircled{1}}$ 和 $k^{\textcircled{2}}$ 称为单元①和单元②的刚度系数,即当结点 B 产生单位转

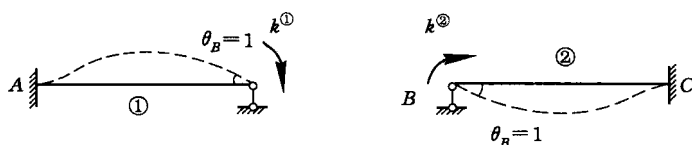


图 11-2 单元刚度系数

角 $\theta_B = 1$ 时,在单元①和单元②上所需施加的杆端弯矩(图 11-2)。单元分析的主要任务就是求出单元刚度系数。

3. 整体刚度系数的概念

整体分析的目的是对整个结构建立结点转角 θ_B 与结点力偶 M_B 之间的关系式,即基本方程[式(11-2)],可写成:

$$K\theta_B = M_B \quad (11-4)$$

式中, K 称为结构的整体刚度系数,即整个结构在结点 B 产生单位转角 $\theta_B = 1$ 时,在结点 B 所需施加的结点力偶(图 11-3)。

$$K = 4i_1 + 4i_2 = k^① + k^② \quad (11-5)$$

整体分析的主要任务就是求出整体刚度系数 K 。

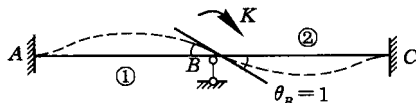


图 11-3 整体刚度系数

4. 刚度集成规则

由式(11-5)可以看出,整体刚度系数是由相关单元(杆件①和杆件②)的单元刚度系数 $k^①$ 和 $k^②$ 集成而得,利用这个集成规则可以简便地由单元刚度系数直接得出整体刚度系数。

上述矩阵位移法的基本思路和基本概念可以推广到连续梁的一般情形。

连续梁的计算简图如图 11-4 所示,连续梁共有 n 跨,各跨的长度为 $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$,各跨的线刚度 i 可以不同, $i = EI/l$,其中 E 为弹性模量, I 为惯性矩。连续梁的左端和右端可以是简支端,也可以是固定端,承受结点力偶。

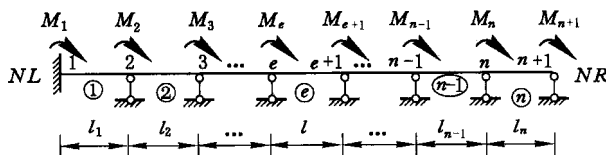


图 11-4 刚度集成规则举例

在矩阵位移法中,第一个基本环节是单元分析,因此首先把连续梁拆成多个单元,对于图 11-4 所示连续梁,可离散成 n 个单元,单元编码为①,②,⋯,②,结构上的结点统一编码为 $1, 2, 3, \dots, n, n+1$,再从中取出一个典型单元②。建立单元刚度方程,导出单元刚度

矩阵。

任取一个典型单元 $\textcircled{e}$,如图 11-5 所示,单元中的两个结点重新编码为 $\bar{1}$ 和 $\bar{2}$,称为结点局部码,在单元分析中使用;整体结构中的统一编码称为结点总码,在整体分析中使用。

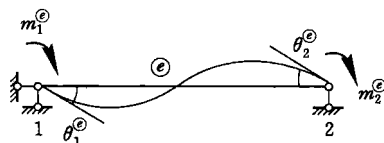


图 11-5 典型单元 $\textcircled{e}$

结点 1 的杆端力矩为 $m_1^{\textcircled{e}}$,转角为 $\theta_1^{\textcircled{e}}$,结点 2 的杆端力矩为 $m_2^{\textcircled{e}}$,转角为 $\theta_2^{\textcircled{e}}$,单元分析的任务就是建立单元杆端力矩与杆端转角之间的关系式,这正是结构力学的转角位移方程。

$$\begin{cases} m_1^{\textcircled{e}} = k_{11}^{\textcircled{e}} \theta_1^{\textcircled{e}} + k_{12}^{\textcircled{e}} \theta_2^{\textcircled{e}} \\ m_2^{\textcircled{e}} = k_{21}^{\textcircled{e}} \theta_1^{\textcircled{e}} + k_{22}^{\textcircled{e}} \theta_2^{\textcircled{e}} \end{cases} \quad (11-6)$$

$$\begin{cases} k_{11}^{\textcircled{e}} = k_{22}^{\textcircled{e}} = 4i_e \\ k_{12}^{\textcircled{e}} = k_{21}^{\textcircled{e}} = 2i_e \end{cases} \quad (11-7)$$

系数 $k_{ij}^{\textcircled{e}}$ 的物理含义可参照图 11-6 来说明: $k_{11}^{\textcircled{e}}$ ——使 $\bar{1}$ 点产生单位转角 $\theta_1^{\textcircled{e}} = 1$ (远端 $\bar{2}$ 点无转角)时在 $\bar{1}$ 点需施加的力偶; $k_{21}^{\textcircled{e}}$ ——使 $\bar{1}$ 点产生单位转角 $\theta_1^{\textcircled{e}} = 1$ (远端 $\bar{2}$ 点无转角)时在 $\bar{2}$ 点需施加的力偶。这些系数称为单元 $\textcircled{e}$ 的刚度系数。

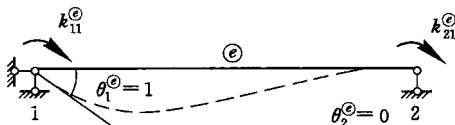


图 11-6 单元刚度系数

式(11-6)用矩阵方法表示如下:

$$\begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix}^{\textcircled{e}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}^{\textcircled{e}} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^{\textcircled{e}} \quad (11-8a)$$

其中, $\begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix}^{\textcircled{e}} = \{m\}^{\textcircled{e}}$, 称为单元 $\textcircled{e}$ 的杆端力矩向量; $\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^{\textcircled{e}} = \{\theta\}^{\textcircled{e}}$, 称为单元 $\textcircled{e}$ 的杆端转角向量; $\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}^{\textcircled{e}} = [k]^{\textcircled{e}}$, 称为单元 $\textcircled{e}$ 的刚度系数。则:

$$\{m\}^{\textcircled{e}} = [k]^{\textcircled{e}} \{\theta\}^{\textcircled{e}} \quad (11-8b)$$

由此看出,单元分析的任务就是求出单元刚度矩阵 $[k]^{\textcircled{e}}$, $[k]^{\textcircled{e}}$ 的性质如下:

① $[k]^{\textcircled{e}}$ 是由杆端转角向量 $\{\theta\}^{\textcircled{e}}$ 求杆端力矩向量 $\{m\}^{\textcircled{e}}$ 时的转换矩阵。

② $[k]^{\textcircled{e}}$ 中的每一个元素是刚度系数。元素 $k_{ij}^{\textcircled{e}}$ 表示当 j 点产生单位转角 $\theta_j^{\textcircled{e}} = 1$ 时在 i 点产生的杆端力矩 $m_i^{\textcircled{e}}$ 。元素 $k_{ij}^{\textcircled{e}}$ 的列码 j 对应于单位转角 $\theta_j^{\textcircled{e}} = 1$ 时的号码,行码 i 对应于杆端力矩 $m_i^{\textcircled{e}}$ 的号码,三者之间的对应关系如下:

$$\begin{matrix} m_1^{\odot} \rightarrow \\ m_2^{\odot} \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} \theta_1^{\odot} = 1 & \theta_2^{\odot} = 1 \\ k_{11}^{\odot} & k_{12}^{\odot} \\ k_{21}^{\odot} & k_{22}^{\odot} \end{bmatrix}$$

③ 在 $[k]^{\odot}$ 中, 第一个列向量 $\begin{bmatrix} k_{11}^{\odot} \\ k_{21}^{\odot} \end{bmatrix}$ 的两个元素是当 $\bar{1}$ 点产生单位转角 $\theta_1^{\odot} = 1$ 时分别在两个杆端引起的力矩。

④ 在 $[k]^{\odot}$ 中, 第一个行向量 $[k_{11}^{\odot} \quad k_{12}^{\odot}]$ 的两个元素是当两个结点分别产生单位转角时在 $\bar{1}$ 点产生的杆端力矩 $m_1^{\odot}$ 。

⑤ $[k]^{\odot}$ 是一个对称矩阵, $k_{12}^{\odot} = k_{21}^{\odot}$ 。

二、整体刚度矩阵

通过单元分析得出单元刚度矩阵之后, 进行整体分析, 建立整体刚度方程, 导出整体刚度矩阵。图 11-7 所示连续梁中, 结点统一编码为 1, 2, 3, 单元编码为 ①, ②, 结点转角为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, 结点力偶为 M_1, M_2, M_3 。它们分别组成结点转角向量 $\{\theta\}$ 和结点力偶向量 $\{M\}$:

$$\{\theta\} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T, \quad \{M\} = [M_1 \quad M_2 \quad M_3]^T$$

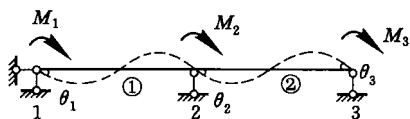


图 11-7 整体刚度矩阵

下面由转角 $\{\theta\}$ 来推算 $\{M\}$, 它们之间的转换关系为:

$$\{M\} = [K]\{\theta\} \quad (11-9a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (11-9b)$$

式中, $[K]$ 称为整体刚度矩阵; K_{ij} 称为整体刚度系数, 表示结点 j 产生单位转角 $\theta_j = 1$ 且其他结点无转角时, 在 i 点需施加力偶 M_i 。

式(11-9a)称为整体刚度方程, 可按位移法建立, 具体做法有两种: 传统位移法和单元集成法(也称为刚度集成法或直接刚度法)。前者概念浅显, 但运算繁琐, 不宜用于大型结构; 后者的优点是便于实现计算过程的程序化。现分述如下。

1. 传统位移法

先分别考虑三个结点单独转动时在各结点需施加的力偶。

① 结点 1 单独转动 θ_1 , 如图 11-8(a) 所示。

② 结点 2 单独转动 θ_2 , 如图 11-8(b) 所示。

③ 结点 3 单独转动 θ_3 , 如图 11-8(c) 所示。

叠加上述三种情况, 即得出各结点的总力偶:

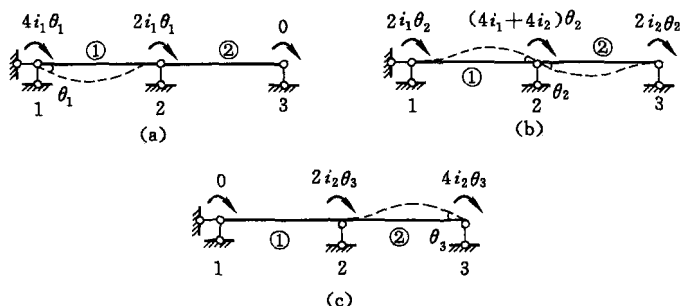


图 11-8 传统位移法

 (a) 结点 1 单独转动 θ_1 ; (b) 结点 2 单独转动 θ_2 ; (c) 结点 3 单独转动 θ_3

$$\begin{cases} M_1 = 4i_1\theta_1 + 2i_1\theta_2 \\ M_2 = 2i_1\theta_1 + (4i_1 + 4i_2)\theta_2 + 2i_2\theta_3 \\ M_3 = 2i_2\theta_2 + 4i_2\theta_3 \end{cases} \quad (11-10)$$

写成矩阵形式, 即得:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (11-11)$$

 式(11-11)中的转换矩阵即为所求的刚度矩阵 $[K]$ 。

2. 单元集成法

(1) 单元集成法的力学模型和基本概念

用传统位移法求结构的结点力 $\{M\}$ 时, 分别考虑每个结点转角对 $\{M\}$ 的单独贡献(采用图 11-8 中的力学模型), 然后进行叠加。用单元集成法求 $\{M\}$ 时, 分别考虑每个单元对 $\{M\}$ 的单独贡献, 然后进行叠加, 其特点就是从“单元直接集成”。

首先, 考虑单元①的贡献。既然只考虑单元①的单独贡献, 因此必须设法略去其他单元的贡献, 为此采用图 11-9 所示的力学模型, 令单元②的刚度为零(即令 $i_2 = 0$)。此时, 单元②虽有变形, 但不产生结点力, 因此整个结构的结点力是由单元①单独产生的, 记为 $\{M\}^\oplus = [M_1^\oplus \ M_2^\oplus \ M_3^\oplus]$, $\{M\}^\oplus$ 表示单元①对结构结点力 $\{M\}$ 的贡献。

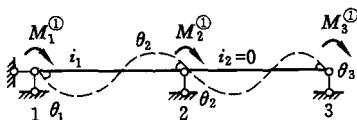


图 11-9 单元①的贡献矩阵

下面求此模型的结点力 $\{M\}^\oplus$ 。

由于 $i_2 = 0$, 因此可得:

$$M_3^\oplus = 0 \quad (11-12)$$

而 $M_1^\oplus$ 和 $M_2^\oplus$ 可由单元①的单元刚度矩阵 $[k]^\oplus$ 算出, 已知:

$$[k]^{\textcircled{1}} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 \\ 2i_1 & 4i_1 \end{bmatrix}^{\textcircled{1}}$$

故可得：

$$\begin{bmatrix} M_1^{\textcircled{1}} \\ M_2^{\textcircled{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 \\ 2i_1 & 4i_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (11-13)$$

式(11-12)和式(11-13)可合并写成：

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}^{\textcircled{1}} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (11-14)$$

记为：

$$\{M\}^{\textcircled{1}} = [K]^{\textcircled{1}} \{\theta\} \quad (11-15)$$

其中，

$$[K]^{\textcircled{1}} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11-16)$$

式中， $[K]^{\textcircled{1}}$ 表示单元①对整体刚度矩阵提供的贡献，称为单元①的贡献矩阵。

其次，考虑单元②的贡献。此时令 $i_1 = 0$ ，力学模型如图 11-10 所示，其中结点力 $M_1^{\textcircled{2}} = 0$ ，而 $M_2^{\textcircled{2}}$ 和 $M_3^{\textcircled{2}}$ 可由单元②的单元刚度矩阵 $[k]^{\textcircled{2}}$ 算出，已知 $[k]^{\textcircled{2}} = \begin{bmatrix} 4i_2 & 2i_2 \\ 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix}^{\textcircled{2}}$ ，故得：

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}^{\textcircled{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (11-17)$$

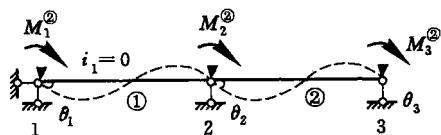


图 11-10 单元②的贡献矩阵

记为：

$$\{M\}^{\textcircled{2}} = [K]^{\textcircled{2}} \{\theta\} \quad (11-18)$$

其中，

$$[K]^{\textcircled{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \quad (11-19)$$

式中， $[K]^{\textcircled{2}}$ 称为单元②的贡献矩阵。可以看出， $[K]^{\textcircled{2}}$ 是由 $[k]^{\textcircled{2}}$ 的元素及零元素组成的矩阵。

最后，将式(11-15)和式(11-18)进行叠加，即得出结构的结点力 $\{M\}$ ：

$$\{M\} = \{M\}^{\textcircled{1}} + \{M\}^{\textcircled{2}} = ([K]^{\textcircled{1}} + [K]^{\textcircled{2}}) \{\theta\} \quad (11-20)$$

由此得出整体刚度矩阵 $[K]$:

$$[K] = [K]^{\text{①}} + [K]^{\text{②}} = \sum_{\text{②}} [K]^{\text{②}} \quad (11-21)$$

式(11-21)表明,整体刚度矩阵为各单元贡献矩阵之和。

将式(11-21)中的 $[K]^{\text{①}}$ 和 $[K]^{\text{②}}$ 代入后,得到的 $[K]$ 与式(11-11)中的 $[K]$ 相同,因此单元集成法与传统位移法是殊途同归。

从以上的讨论可以看出,单元集成法求整体刚度矩阵的步骤可表示为:

$$[k]^{\text{②}} \rightarrow [K]^{\text{②}} \rightarrow [K] \quad (11-22)$$

此处单元刚度矩阵 $[k]^{\text{②}}$ 与整体刚度矩阵之间增添了一个中间环节——单元贡献矩阵 $[K]^{\text{②}}$ 。单元集成法分解为两步:第一步由 $[k]^{\text{②}}$ 求 $[K]^{\text{②}}$;第二步由 $[K]^{\text{②}}$ 求 $[K]$ 。第二步按式(11-21)进行计算比较简单,因此下面将对第一步作进一步的讨论。

(2) 按照单元定位向量由 $[k]^{\text{②}}$ 求 $[K]^{\text{②}}$

前已指出, $[K]^{\text{②}}$ 是由 $[k]^{\text{②}}$ 的元素和零元素重新排列而成的矩阵。下面着重讨论 $[k]^{\text{②}}$ 的元素在 $[K]^{\text{②}}$ 中的定位问题。

首先,要注意结点位移(或结点力)有两种编码:在整体分析过程中,结点位移在结构中统一进行编码,称为总码。在图 11-11(a)中,连续梁的结点位移统一编码为 1,2,3;在单元分析中,每个单元的两个杆端位移各自的编码为 $\bar{1}$ 和 $\bar{2}$,称为局部码,如图 11-11(b)所示。

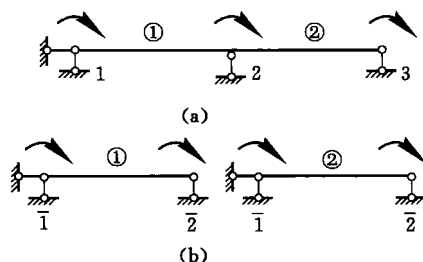


图 11-11 总码和局部码

(a) 总码;(b) 局部码

其次,要注意每个单元的结点位移分量两种编码之间的对应关系。对于图 11-11 中的单元①和单元②,其对应关系见表 11-1。

表 11-1 结点位移分量两种编码之间的对应关系

单 元	对应关系	单元定位向量 $\{\lambda\}^{\text{②}}$
	局部码 $\rightarrow$ 总码	
①	$\bar{1} \rightarrow 1$	$\{\lambda\}^{\text{①}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$
	$\bar{2} \rightarrow 2$	
②	$\bar{1} \rightarrow 2$	$\{\lambda\}^{\text{②}} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$
	$\bar{2} \rightarrow 3$	

由单元的结点位移总码组成的向量称为单元定位向量,记为 $\{\lambda\}^{\text{②}}$ 。单元两种编码的对应关系由单元定位向量来表示。因此,单元定位向量也称为“单元换码向量”。