高中数学拓展性研究性学习丛书

主编 吴长江

# 高中数学综合性问题

——强化·思想·结构·技巧 （第二版）

主编 梁开华

编著 吴长江 任升录 王国江 郝晓刚

上海大学出版社

高中数学拓展性研究性学习丛书
主编 吴长江

# 高中数学综合性问题

——强化·思想·结构·技巧

（第二版）

主　编　梁开华
编　著　吴长江　任升录　王国江　郝晓刚

上海大学出版社
·上海·

## 内容提要

本书以提高学生分析问题和解决问题的能力为主线，分为“强化篇”、“思想篇”、“结构篇”和“技巧篇”四个部分.其中，“强化篇”集中分析了高中数学中相对更为重要更为典型的一系列基本问题，以中等难度为主略偏上择取具有代表意义的例题进行剖析；“思想篇”不单单对应于方程与函数、分类讨论、数形结合、变换、转化、代换等大项，还细化为具体的解题方法与策略；“结构篇”与“技巧篇”着重对数学的题型结构、知识结构、图形结构作了集中分析，并用可行的且相对来讲却是比较优异、比较理想的解法加以解决.此外，每篇末精选了部分综合训练题，“结构篇”和“技巧篇”配有综合实践作业，以加强对相关内容的理解与应用.

本书适用于作高三学生的复习用书，更可用作高一至高三学生的拓展性研究性学习用书，也可用作中学数学教师的培训资料和教学参考用书.

**图书在版编目(CIP)数据**

高中数学综合性问题：强化·思想·结构·技巧/梁开华主编；吴长江等编著.—2版.—上海：上海大学出版社，2012.1
(高中数学拓展性研究性学习丛书/吴长江主编)
ISBN 978-7-81118-952-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①梁…②吴… Ⅲ.①中学数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第255193号

责任编辑 王悦生
技术编辑 柯国富

**高中数学综合性问题**——强化·思想·结构·技巧
主编 梁开华
上海大学出版社出版发行
(上海市上大路99号 邮政编码200444)
(http://www.shangdapress.com 发行热线021-66135112 传真021-66135112)
出版人：郭纯生
*
南京展望文化发展有限公司排版
叶大印务发展有限公司印刷 各地新华书店经销
开本787×1092 1/16 印张20 字数486000
2012年1月第2版 2012年1月第1次印刷
印数：1~5100
ISBN 978-7-81118-952-0/G·632 定价：35.00元

# 序

最近,花了几天工夫拜读了由梁开华主编的《高中数学综合性问题》一书,长了不少见识,从中学到了不少东西。

高中数学综合性问题,近几年已引起众多数学教育工作者的高度重视,综合性试题在近年的高考数学试卷中是重中之重。综合性问题也该属于探究性问题的一种。该类问题的探究过程通常要从多角度、多方位去思考,学会举一反三,对综合性问题探究的不同途径和方法加以甄选,最后使问题获得认知层次较高的、比较完善的解决。因此,综合性问题更能培养学生的发散性思维和探究创新能力,有助于培养学生自主学习、自主探究的科学精神,激发学生的学习热情和兴趣,养成独立思考的良好习惯。这也正是二期课改的理念,对实现《教育规划纲要》中“提高科技创新能力、培养创新型人才”的国家战略具有积极的现实意义。

《高中数学综合性问题》一书凝聚了作者多年的心血,是作者多年研究、探索、实践的结晶。该书以强化篇、思想篇、结构篇和技巧篇架构,对提高学生对综合性问题的认识、提高解决综合性问题的能力以及数学创新能力具有很好的作用。

作者对综合性问题精心筛选、改编创新,策略性地分析系列问题的共性与解决问题的关键与着眼点,不仅给出了问题的解决方案,更详尽地给出了解决问题的探究过程,展示了解决问题的思维方式和解决策略。将解决问题、思考问题的全过程详尽地展示出来,远比只给出问题的解决方案重要,这对培养学生的能力(思考能力、想象能力和创新能力)大有裨益!作者还通过如何对问题进行演变与引申,给予学生联想和自由发展的空间。本人认为,此书对学生提高数学问题的认识、提高应用数学知识解决问题的意识以及提高解决问题的能力具有很好的指导作用。

靳全勤

2012年元月10日

于同济大学志远楼

# 前　言

为提高整个中华民族的文化素质，中学教育必须进行重大改革已为世人所共识．教育部在《基础教育课程改革纲要(试行)》中明确提出："改变课程内容'难、繁、偏、旧'和过于注重书本知识的现状，加强课程内容与学生生活以及现代社会和科技发展的联系，关注学生的学习兴趣和经验，精选终身学习必备的基础知识和技能．改变课程实施过于强调接受学习、死记硬背、机械训练的现状，倡导学生主动参与、乐于探究、勤于动手，培养学生处理信息的能力、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力以及交流与合作的能力．"同时，教育部还倡导推行研究性学习，并在《普通高中'研究性学习'实施指南(试行)》中将目标定位于：(学生)获得亲自参与研究探索的积极体验；提高发现问题和解决问题的能力；学会分享与合作；培养科学态度和科学道德；培养对社会的责任心和使命感；激活各科学习中的知识储存，尝试相关知识的综合运用．上海市则在推行研究性学习的同时，积极倡导拓展性学习．我们认为，拓展性学习是研究性学习的先导，研究性学习是拓展性学习的更高形式．因而如何开展拓展性研究性学习已成为中学教育界共同关注的问题．作为一个尝试，我们编写了"高中数学拓展性研究性学习丛书"．

本书为丛书之一，既立足于上海教材的基本思想，也参照了全国教材的重要理念．题目取自于相当广泛的相关资料，我们也改编、自编了小部分题目(一般不作特别说明)．因其涉及的面广泛而综合，故定义为综合性问题．分为"强化篇"、"思想篇"、"结构篇"、"技巧篇"四个部分．基点靠拢高考又不拘泥于高考，着眼于素质能力与创新思维的训练．其中，强化篇集中了高中数学相对更为重要更为典型的一系列基本问题，择取以中等难度为主略偏上、有代表意义的例题进行剖析；思想篇不单单对应于方程与函数，分类讨论，数形结合，变换、转化、代换等大项，还细化为具体的解题方法与策略；结构篇与技巧篇着重对数学的题型结构、知识结构、图形结构作了集中分析，同时用可行的而又相对来讲比较优异、比较理想的解法加以解决，其中融合了作者很多的新思想、新理念、新解法．此外，每篇末精选了部分综合训练题，结构篇和技巧篇还配有综合实践作业，以加强对相关内容的理解与应用．

虽然本书起点较高，但其实用性却是显然的，尤其是对高三学生；对于高一、高二学生，不妨从高一、高二起就开始学其中的相关同步内容甚至不妨钻进去，两三年佐学一定得益匪浅．本书对于数学的解题思想以及方法技巧，并不是停留于理性的或局部的认知与理解上，而是尽可能感性地、较全面地分析与解决数学问题，以通过融会贯通转化为自身的潜在能力．因此，不要生搬硬套，要灵活运用，举一反三，要学会针对问题具体

地分析题目的条件，恰当地采取较好的解决对策.

“熟读精思，循序渐进.”阅读本书的一个较好的方法就是先做例题，再与书中的解法类比，在耐心中长进功力.本书的各篇各节是无序的，读者可以随便“读”、“思”某一节，认为需要了解哪一节，就研读哪一节，且搞得透一点.本书例题往往都有解题分析，有解后简评，每节前后有概述，后面有小结，这些都是比较重要的导向资料，不要忽视.打“*”的内容看自身学习状况取舍.总之，这是一本“以学生为本”教育理念指导下的、“个性化”的教学参考书.不仅适用于上海，也普适于各地用于高中数学的拓展性研究性学习.建议结合教学与本书内容融合，一定有助于训练和提高自学能力与解题能力.如果你希望找一些较为理想的拓展性研究性例、习题或资料，也许本书中有；如果你希望找一些特殊问题解决的较好思路、方法、解法，也许本书中有.有些可以说是在同类其他书中不易出现或找到的.

本书第一版曾列入上海市普陀区“十五”课程设置教材，用于教师职务培训.

本书在成书过程中，蔡廷、程晓颖、董震、陆宇峰、潘虹、平龙璇、沈少俊、王彦、席颖伟、赵谭、朱敏杰等参与了稿件誊写、复印及部分习题的提供与整理等工作，在此一并致谢.

作为探索，书中一定有不少不足之处，我们热忱地期望读者提出宝贵意见，也特别欢迎交流讨论.

作　者

2012年1月8日

# 目　　录


1　强化篇 …… 1

1.1　集合、函数中的解不等式 …… 1
1.2　向量及其应用 …… 6
1.3　三角公式学用的几个着力点 …… 15
1.4　正弦型曲线 …… 23
1.5　算法、统计与图形计算 …… 28
1.6　排列组合与概率中的解题方法 …… 35
1.7　直线与圆锥曲线 …… 49
1.8　数列中的函数问题 …… 57
1.9　最值 …… 64
1.10　解析几何中的中点、距离、面积 …… 71
1.11　两解问题 …… 85
1.12　轨迹 …… 92
1.13　“想当然”致错剖析 …… 100
强化篇综合训练 …… 107
强化篇综合训练参考答案 …… 121

2　思想篇 …… 124

2.1　目标性解题 …… 124
2.2　直感判断与整体意识 …… 129
2.3　缺什么,设什么——解法策略种种 …… 137
2.4　对应 …… 147
2.5　从递推到化归 …… 155
2.6　数形结合 …… 166
2.7　分类讨论 …… 173
2.8　动起来 …… 181
2.9　模式运算与数据、信息处理 …… 187
思想篇综合训练 …… 198
思想篇综合训练参考答案 …… 204

**3 结构篇** …… 206

3.1 对偶 …… 206
3.2 $a+b$与$a \cdot b$ …… 211
3.3 对称、平行与垂直 …… 216
3.4 $t>f(x)$或$t<f(x)$ …… 225
3.5 二次函数的对称轴 …… 229
3.6 任何抛物线都是相似的 …… 239
结构篇综合训练 …… 241
结构篇综合实践 …… 244
结构篇综合训练参考答案 …… 247

**4 技巧篇** …… 248

4.1 比的性质的应用 …… 248
4.2 关于移项 …… 253
4.3 两边取…… …… 256
4.4 代换 …… 260
4.5 分步解题 …… 267
4.6 利用方程与函数的思想 …… 278
4.7 “1”的参与 …… 284
4.8 补形法 …… 291
4.9 设(消)参数的方法 …… 297
技巧篇综合训练 …… 307
技巧篇综合实践 …… 310
技巧篇综合训练参考答案 …… 311

# 1 强 化 篇

## 1.1 集合、函数中的解不等式

### 1.1.1 概述

根据中学数学的教学要求，不太强调不等式的证明，因此解不等式的重要性便突出了，更何况解不等式的问题与集合、函数关联紧密，在其他知识点中也有所辐射. 此外，由于解无理不等式、解绝对值不等式要求很低，因此集合、函数中的解不等式问题更要重视. 由于最值问题、求(参)变量取值范围问题往往也与解不等式相关，更扩大了这一问题的范畴. 事实上，这方面的问题恰恰是学生解题的弱点之一. 主要体现在解题过程易错，考虑问题不周，结果不会综合，动态分析困难，含参数时分类讨论不够清晰，与根的分布相关的概念模糊，基本不等式、函数增减性讨论不规范等.

教学中需加强问题归类，强调特点、要领、解法、原理等.

至于单纯最值问题、与函数相关的特殊技巧问题等，本节不专门分析.

### 1.1.2 内容举例

**例 1** $a>0$, $a\neq 1$，解不等式组$\begin{cases}\log_a 2<\log_a x,\\ x^2-(a+3)x+2a+2>0.\end{cases}$

**【分析】** (1) 先确定定义域.

(2) $a$ 为对数的底数，因此应分 $a>1$、$0<a<1$ 两种情况讨论.

(3) 对于 $(x-x_1)(x-x_2)>0$，某一 $x$ 固定，对另一 $x$ 也需讨论.

**解** 定义域 $x>0$.

(1) $a>1$, $\log_a 2<\log_a x\Rightarrow x>2$.

$$x^2-(a+3)x+2a+2>0\Rightarrow(x-2)[x-(a+1)]>0, \tag{*}$$

所以，$x>a+1$ 或 $x<2\Rightarrow x>a+1$.

(2) $0<a<1$，则 $x<2$；对于(*)，$x>2$ 或 $x<a+1\Rightarrow 0<x<a+1$.

综合得，$x\in(a+1,+\infty)$ ($a>1$ 时) 或 $x\in(0,a+1)$ ($0<a<1$ 时).

【简评】 此为最常规的解不等式问题，但解答结果做正确也不容易. 定义域、增减性、解的表示都易出错.

【注意】 本例的结论还应按 $a>1$, $0<a<1$ 分类表示.

**例 2** $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x \mid \alpha<x<\beta\}$，$\beta>\alpha>0$. 求不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集.

【分析】 利用倒数关系让所求不等式与已知不等式从形式上对应起来. 另外，从解的结构上来说，$x_1<x_2$ 时，$(x-x_1)(x-x_2)>0$，$x>x_2$ 或 $x<x_1$；$(x-x_1)(x-x_2)<0$，$x_1<x<x_2$.

当二次式结构比较复杂时，解的形式都应严格对应，遇到字母讨论分析要仔细，有时尽管结果是对的，实际解题过程却可能隐含错误.

**解** $ax^2+bx+c>0$，由解 $\alpha<x<\beta$ 知 $a<0$. $cx^2+bx+a<0$.

(1) $x=0$ 是解.

(2) $x\neq 0$ 时，$a\left(\frac{1}{x}\right)^2+b\left(\frac{1}{x}\right)+c<0$，但 $a<0$，因此，$\frac{1}{x}>\beta$，则 $x>0$ 且 $x<\frac{1}{\beta}$.

$\frac{1}{x}<\alpha$，$x<0$ 是解；$x>0$，$x>\frac{1}{\alpha}$.

综合得 $x\in\left\{x \mid x>\frac{1}{\alpha}\text{ 或 }x<\frac{1}{\beta}\right\}$.

【简评】 写成区间，即 $x\in\left(\frac{1}{\alpha},+\infty\right)\cup\left(-\infty,\frac{1}{\beta}\right)$. 其中对解讨论时，$x=0$，$x<0$ 的情况必须相应表明，否则，直接 $\frac{1}{x}>\beta$，$x<\frac{1}{\beta}$；$\frac{1}{x}<\alpha$，$x>\frac{1}{\alpha}$ 是错误的. 因为 $\beta>0$，$\frac{1}{x}>\beta$ 表明 $0<x<\frac{1}{\beta}$，又 $\frac{1}{x}<\alpha$，$x>\frac{1}{\alpha}$ 不包括 $x<0$. 至于 $x=0$ 也是解，也无从反映.

**例 3** 关于 $x$ 的不等式组 $\begin{cases}x^2-x-2>0,\\2x^2+(2k+5)+5k<0\end{cases}$ 的整数解的集合为 $\{-2\}$，求实数 $k$ 的取值范围.

【分析】 本题在对第二个式子进行分析时，也就出现了不等式解的动态界定. 其特征与原理往往是，解的一端是确定的，另一端是变动的. 变动区间与问题的集只要不矛盾就行. 同时，还得最充分地表达，包括端点的值能否取到.

**解** 第一个式子的解为 $x>2$ 或 $x<-1$，$x\in\mathbf{Z}$；第二个式子的解：$(2x+5)(x+k)<0$，$-k<x<-\frac{5}{2}$，不包括 $x=-2$.

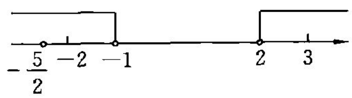


图 1.1-1

所以

$$-\frac{5}{2}<x<-k,\ x\in\mathbf{Z}. \qquad (*)$$

这样，$-k$ 就形成一个动态数据，如图 1.1-1，看做一个动点，这个点必须在 $-2$ 右边(这样才使($*$)包含 $-2$)，越过 $-1,0,1,2$ 直到 3. 但不能超过 3(否则($*$)又包含了 3).

因此，$-2<-k\leqslant 3$，即 $k\in[-3,2)$.

【简评】 $-k$ 的这种动态界定，一定要细致分析，分析准确.

**例 4**　已知集合 $A=\left\{x \middle| \frac{2x-1}{x+1}>0\right\}$，$B=\{x \mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$，且 $A\cap B=\left\{x \mid \frac{1}{2}<x\leqslant 3\right\}$，求实数 $a$、$b$ 的取值范围.

**【分析】** $B$ 的解的形式是确定的(二次项系数大于 0)：$x_1<x_2$，$x_1\leqslant x\leqslant x_2$，$A\cap B$ 恰好形成 $x_1$ 与 $x_2$，一端固定一端变动.

**解**　$A$：$x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-1$. 设 $B$：$x_1\leqslant x\leqslant x_2$，其中 $x_1\leqslant x_2$. 由 $A\cap B\in\left(\frac{1}{2},3\right]$知，$x_2=3$. 把 $x_1$ 看作动点，如图 1.1-2，这个点至少得从$\frac{1}{2}$起，向左移动过去，但不能越过$-1$，即 $-1\leqslant x_1\leqslant\frac{1}{2}$.

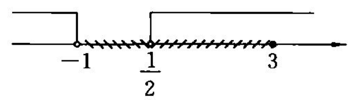

图 1.1-2

这样，把 $B$ 看作方程，则 $x_1+3=-a$，$a=-x_1-3$.

所以，由 $x_1\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]\Rightarrow a\in\left[-\frac{7}{2},-2\right]$；又 $3x_1=b\in\left[-3,\frac{3}{2}\right]$.

**【简评】** 本例相当于例 2、例 3 的解法原理的综合，一旦知道了怎么解，也就不难、不乱了.

**例 5**　关于 $x$ 的不等式 $[(k^2+6k+24)x-9][(k^2+28)x-2k^2-12k]<0$ 的解集 $M$ 与整数集 $\mathbf{Z}$ 满足 $M\cap\mathbf{Z}\in\{1\}$，求常数 $k$ 的取值范围.

**【分析】** 本题可转化为对二次函数根的分布的理解，由题目条件，不等式的解就是二次函数图像与 $x$ 轴相交以下的部分. 这就表明，把不等式理解为方程，两根应在[0,1)及(1,2]之间.

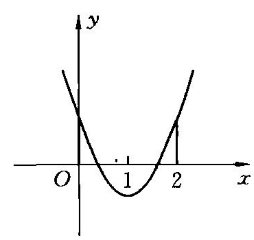

图 1.1-3

**解**　根据题意，对照图 1.1-3，得

$$\begin{cases}f(0)\geqslant 0\\ f(1)<0\\ f(2)\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-9)(-2k^2-12k)\geqslant 0\\ [(k^2+6k+14)-9][(k^2+28)-2k^2-12k]<0\\ [(k^2+6k+14)\cdot 2-9][(k^2+28)\cdot 2-2k^2-12k]\geqslant 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k(k+6)\geqslant 0\\ (k+1)(k+5)(k-2)(k+14)>0\\ (2k^2+12k+19)(3k-14)\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\geqslant 0\text{ 或 }k\leqslant -6,\\ k>2\text{ 或 }-5<k<-1\\ \quad\text{或 }k<-14,\\ k\leqslant\frac{14}{3}.\end{cases}$$

考察图 1.1-4，综合得　$2<k\leqslant\frac{14}{3}$ 或 $k<-14$.

**【简评】** 由于不等式不含等号，由"开关原理"表示解时，$f(0)$，$f(2)$可含等号. 另外给出解和综合解时，二次式 $\Delta<0$ 以及标出解的范围明显不合的部分，当时就可以舍去.

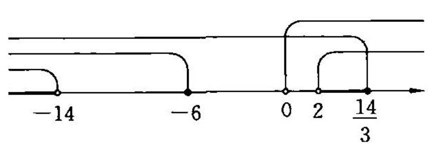

图 1.1-4

**例 6**　集合 $M=\{(x,y) \mid y=\sqrt{2x}\}$，$N=\{(x,$

$y)\mid |z-a|=1,\ z=x+y\mathrm{i},\ a\in\mathbf{R}\}$. $M\cap N\neq\varnothing$ 的充要条件是______.

**【分析】** 正面考虑比较困难,可求 $M\cap N=\varnothing$ 的补集.

**解** ① $M=\varnothing$ 时,$x<0$;② 一定 $N\neq\varnothing$,$N$:$(x-a)^2+y^2=1$. $M\cap N=\varnothing$,把 $y^2=2x$ 代入,$x^2+2(1-a)x+a^2-1=0$,$\Delta=4(1-a)^2-4(a^2-1)<0\Rightarrow a>1$;又$\Delta\geqslant 0$ 时,由 $x<0$,$x_1+x_2=-2(1-a)<0$,$x_1x_2=a^2-1>0$,必须$a<-1$. 综合为 $a>1$ 或 $a<-1$. 所以,$M\cap N\neq\varnothing$,$-1\leqslant a\leqslant 1$. 此为必要条件,同时也为充分条件. 所以 $M\cap N\neq\varnothing$ 的充要条件是$a\in[-1,1]$.

**【简评】** 空集是任何非空集的子集. 所谓解为$\varnothing$,对于二次方程,$\Delta<0$;对于二次不等式,即为不等号反向的解. 两正根、两负根的充要条件一定要清楚.

又比如两根都小于$-2$,即两根分别加 2 还是负的,则应$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\(x_1+2)+(x_2+2)<0,\\(x_1+2)(x_2+2)>0.\end{cases}$

其中$x_1+x_2$、$x_1\cdot x_2$ 还是原韦达定理.

本题也可用数形结合来解.

**例 7** 已知 ① $x^2-4x+3<0$;② $x^2-6x+8<0$;③ $2x^2-9x+m<0$. 同时满足①、②的 $x$ 也满足③,求实数 $m$ 的范围.

**【分析】** 简略地表达即 ① $\cap$ ② $\subseteq$ ③.

**解** ①:$1<x<3$. ②:$2<x<4$. 所以,① $\cap$ ②:$2<x<3$. 问题改变为,对于

$$x\in(2,3),\ f(x)=2x^2-9x+m<0$$

恒成立. 结合图形(图 1.1-5)考虑,$f(x)$在 $x$ 轴的下方部分,必须把$x\in(2,3)$全部囊括于内.

所以,$\begin{cases}f(2)\leqslant 0\\f(3)\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8-18+m\leqslant 0\\18-27+m\leqslant 0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}m\leqslant 10\\m\leqslant 9\end{cases}\Rightarrow m\leqslant 9.$

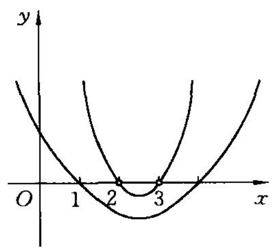


图 1.1-5

**例 8** 已知 $A$:$\{x\mid x^2-5x+4\leqslant 0\}$,$B$:$\{x\mid x^2-2ax+a+2\leqslant 0\}$,$B\subseteq A$,求实数 $a$ 的取值范围.

**【分析】** 本例因 $B$ 含有参变量,故须考虑$\varnothing$.

**解** $A$:$1\leqslant x\leqslant 4$.

(1) $B=\varnothing$,即转化为求 $x^2-2ax+a+2>0$ 的解. 此时 $\Delta=4a^2-4(a+2)<0\Rightarrow -1<a<2$.

(2) $B\neq\varnothing$,设 $x_1<x_2$,$x_1\leqslant x\leqslant x_2$.

结合图形(图 1.1-6),表明根的分布始终在[1,4]之间.

也就等价于

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\1\leqslant\dfrac{-(-2a)}{2}\leqslant 4\\f(1)\geqslant 0\\f(4)\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\geqslant 2\text{ 或 }a\leqslant -1\\1\leqslant a\leqslant 4\\a\leqslant 3\\a\leqslant\dfrac{18}{7}\end{cases}\Rightarrow 2\leqslant a\leqslant\dfrac{18}{7}.$$

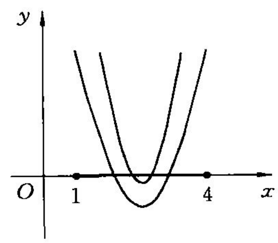


图 1.1-6

综合(1)、(2)，$a \in \left(-1, \frac{18}{7}\right]$.

**【简评】** $B \neq \varnothing$ 时，即 $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \leqslant 4$，但与上例一样，解法上仍结合图形联立不等式组求解，对照本例的图，与上例的图在解法上属两种类型.

对于二次式表示为 $(x-x_1)(x-x_2)$，$x_1 \leqslant x_2$ 很方便时，也可以按 $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \leqslant 4$ 来解.

下例可进一步加强对这样因果的理解.

**例 9** 方程 $k \cdot 9^x - 3k \cdot 3^x + 6(k-5) = 0$，在 $x \in [0,2]$ 时有解，求实数 $k$ 的取值范围.

**【分析】** 方程在$[0,2]$内有解与解在$[0,2]$内是不一样的. 上例即相当于解在$[1,4]$内，而$[1,4]$内有解，也许一解$\in[1,4]$，一解$\notin[1,4]$.

**解** 设 $3^x = y$，显然 $k \neq 0$.

所以配方得，$\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{30}{k} - \frac{15}{4}$, $x \in [0,2] \Rightarrow y \in [1,9]$.

所以，$y = \frac{3}{2}$ 时，$\frac{30}{k} - \frac{15}{4} \geqslant 0 \Rightarrow k \leqslant 8$.

又 $y = 9$ 时，$\frac{30}{k} - \frac{15}{4} \leqslant \left(9-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{225}{4} \Rightarrow k \geqslant \frac{1}{2}$.

所以，$k \in \left[\frac{1}{2}, 8\right]$.

**【简评】** 例 9 用例 8 的方法，例 8 用例 7 的方法，都会把问题做错. 本例由于本质上是讨论二次函数的最值，简单地把 $x=0$, $x=2$ 代入而确定 $k$ 的范围，肯定也是错误的.

**例 10** (1) $y = (a^2+4a-5)x^2 - 4(a-1)x + 3$ 的图像在 $x$ 轴的上方，则实数 $a$ 的取值范围是__________.

(2) 设 $s > 1$, $t > 1$, $x = \log_s t + \log_t s$, $y = \log_s^4 t + \log_t^4 s + m(\log_s^2 t + \log_t^2 s) > 0$，则实数 $m$ 的取值范围是________.

(3) $f(x) = 4x^2 + (4t-1)x + t^2 - 1 \geqslant 0$，在 $x \in [0,1]$ 时恒成立，则实数 $t$ 的范围是__________.

**【分析】** 本例(2)显然 $x \geqslant 2$，三个小题分别给出了系数含参变量的二次式 $f(x)$ 恒大于 0 时，在 $x \in \mathbf{R}$, $x \geqslant m$, $x \in [m,n]$ 三种不同情况下的求解方法.

**解** (1) ① 对于 $a^2+4a-5 = (a-1)(a+5) = 0$，$a=-5$ 时 $y$ 为一次式，$x \in \mathbf{R}$ 时，不能确保 $y > 0$；$a = 1$，$y = 3 > 0$，所以 $a = 1$ 是解.

② $a^2+4a-5 > 0$ 且 $\Delta < 0 \Rightarrow 1 < a < 19$. 综合得 $a \in [1, 19)$.

(2) $x = \log_s t + \log_t s \geqslant 2(\log_s t \cdot \log_t s = 1) \Rightarrow y = f(x) = x^4 + (m-4)x^2 + 2(1-m) > 0$, $x \in [2, +\infty)$.

令 $u = x^2$，再设 $y = g(u) \Rightarrow g(u) = u^2 + (m-4)u + 2(1-m) > 0$ $(u \in [4, +\infty))$.

① $\begin{cases} \frac{-(m-4)}{2} \geqslant 4, \\ \Delta < 0; \end{cases}$ ② $\begin{cases} \frac{-(m-4)}{2} < 4, \\ f(4) > 0. \end{cases}$ $\Rightarrow$ ① 无解；② $m > -1$.

综合得 $m \in (-1, +\infty)$.

(3) ① $\begin{cases} \frac{-(4t-1)}{8} < 0, \\ f(0) \geqslant 0; \end{cases}$ ② $\begin{cases} \frac{-(4t-1)}{8} > 1, \\ f(1) \geqslant 0; \end{cases}$

③ $\begin{cases} 0 \leqslant \dfrac{-(4t-1)}{8} \leqslant 1, \\ \Delta \leqslant 0. \end{cases}$

① $t \geqslant 1$；② $t \leqslant -2-\sqrt{2}$；③ $t$ 无解.

综合得 $x \in [1, +\infty) \cup (-\infty, -2-\sqrt{2}]$.

**【简评】** 系数含参变量的二次式中，抛物线开口向上，定义域 $x \in D$ 为不同范围，$f(x) > 0$，对于(2)、(3)，对称轴的位置改变为两段或三段，$x \in D$ 段仍有 $\Delta < 0$，否则 $f(m) > 0$ 或 $f(n) > 0$.

### 1.1.3 小结

本节内容例 1～5 为一种类型，例 6～9 为第二种类型，例 10 是第三种类型。第一种类型即解不等式，以参变量呈动态为主要特点；第二种类型与集合包含关系有关，注意条件的因果关系；第三种类型与 $f(x)$ 恒大于 0 有关.

解不等式的问题，所涉及的细节甚多，把上述例题的解法都搞清楚了，解其他题目往往也就比较顺利了.

## 1.2 向量及其应用

### 1.2.1 概述

自从向量的知识融入中学数学，其问题解决的工具性效能，解决问题的简洁明快，尤其是渗透于各相关知识环节的结合之方便，应用之广泛，越来越显现其独特的作用与功能. 越来越表明这一知识点的关键与重要. 掌握好向量的这一知识内容，重视它尤其是几何意义带来的知识辐射. 一方面学好它，一方面更有意识地用好它，可以说怎么多有所偏重，怎么多下些功夫都不为过.

### 1.2.2 内容举例

**例 1** 已知 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$，$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\dfrac{1}{2}$，如果 $|\vec{a}-\vec{c}|$ 与 $|\vec{b}-\vec{c}|$ 的夹角为 60°. 则 $|\vec{c}|$ 的最大值为(　　).

(A) 2　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) 1　　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**【分析】** 如果对已知条件的图形模式结构相当熟悉，无疑对解题是十分有利的；此外是 $\vec{c}$ 的设置. 怎样方便于构造出 $\vec{a}-\vec{c}$ 与 $\vec{b}-\vec{c}$.

**解法一(特殊值法)** 如图 1.2-1，构造正 $\triangle ABC$，$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ 符合题设条件. 构

造▱$BPQC$，不妨使 $\overrightarrow{BD}=\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$，则 $\overrightarrow{DP}=\vec{a}-\vec{c}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{b}-\vec{c}$. 其夹角 $\theta=\angle PDC$ 越大，$|\overrightarrow{BD}|=|\vec{c}|$ 越小. 易知 $\theta=60°$时，$|\vec{c}|_{\max}=2$. 选择(A).

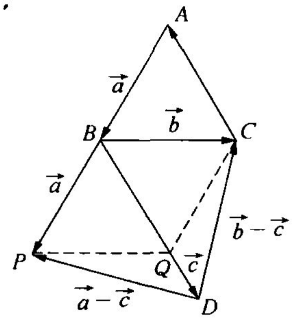


图 1.2－1

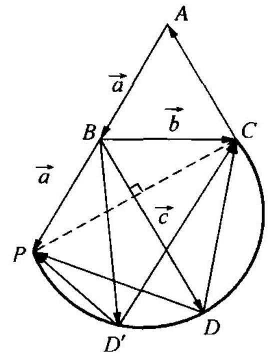


图 1.2－2

**解法二(动态法)**　如图 1.2－2，构造正△$ABC$，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ 符合题设条件，使 $\overrightarrow{BP}=\vec{a}$，$B$ 为同一始点，于是，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$. 以 $B$ 为始点，$\overrightarrow{BD}=\vec{c}$，则 $\overrightarrow{DP}=\vec{a}-\vec{c}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{b}-\vec{c}$. 当 $D$ 落在以 $PC$ 为公共弦的圆弧上，形成 $60°$ 的张角时，很显然，当且仅当 $BD\perp PC$，即 $BD$ 过圆心，$|\overrightarrow{BD}|=|\vec{c}|$ 最大. $|\vec{c}|_{\max}=2|BP|=2$.

**【简评】**　向量点积的运算的具有同一始点，向量加、减法的平行四边形法则以及三角形法则，这些概念的纯熟无疑是问题解决的最基本因素. 由此一旦$\vec{c}$以及$\vec{a}-\vec{c}$、$\vec{b}-\vec{c}$给出，正确得解水到渠成. 其实 $B$、$P$、$D$、$C$ 四点共圆.

**例 2**　下列命题中，是真命题的有________.

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，则$\vec{b}=\vec{c}$；

② $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 为任意向量，则$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$；

③ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$；

④ $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$；

⑤ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$ 或$\vec{b}=\vec{0}$；

⑥ $\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{b}\perp\vec{c}$，则$\vec{a}\parallel\vec{c}$.

⑦ $|\vec{a}|=|\vec{b}|\Leftrightarrow|\vec{a}\cdot\vec{c}|=|\vec{b}\cdot\vec{c}|$

⑧ 与向量$\vec{b}$ 垂直的单位向量最多有两个.

**【分析】**　对于众多小命题的判断，每善于举反例. 在数量关系中选反例，往往 0，1 等特殊值为首选；对于向量关系，当然关注$\vec{0}$. 此外，在概念、运算律等方面是否存在毛病也是针对向量问题不可忽略的.

**解**　①中，$\vec{a}=\vec{0}$ 时；⑥ 中，$\vec{b}=\vec{0}$ 时($\vec{0}$ 可与任意向量垂直)；⑦ 中，$\vec{c}=\vec{0}$ 时；⑧ 中，$\vec{b}=\vec{0}$ 时，相应命题都不是真命题.

②中，$\vec{a}\cdot\vec{b}$是数，等式左边是数乘向量$\vec{c}$；$\vec{b}\cdot\vec{c}$也是数，等式右边是数乘向量$\vec{a}$. 因此②不是真命题；

③中 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\Rightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$，但$\vec{a}\parallel\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$. 所以 ③ 也不是真命题. 但请注意，$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$ 倒是真命题.

⑤中 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 表明$\vec{a}\perp\vec{b}$. 可以 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 且$\vec{b}\neq\vec{0}$.

综上所述，真命题只有④，填入④. 其几何意义为，以$|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$为邻边的平行四边形，是矩形时对角线相等；对角线相等时是矩形(如图 1.2-3(a))同样，如图 1.2-3(b)，$|\vec{a}|=|\vec{b}|\Leftrightarrow(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$.

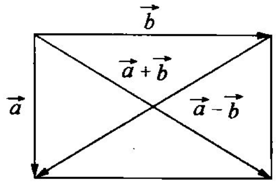


图 1.2-3(a)

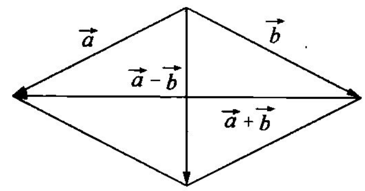


图 1.2-3(b)

**【简评】** 基础知识越是到位，小命题判断准确率越高；反之，小命题判断是巩固基础知识的很好举措.

**例 3** (1) 与向量$\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$垂直的单位向量是________.

(2) 在△$ABC$ 中，已知向量$\overrightarrow{AB}$与向量$\overrightarrow{AC}$满足$\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，且$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1}{2}$. 则△$ABC$ 为(　　).

(A) 三边互不相等的三角形　　(B) 直角三角形

(C) 等腰非等边三角形　　(D) 等边三角形

**【分析】** 单位向量是个很重要的概念. 模长是 1 容易理解. $\vec{t}\neq\vec{0}$，$\dfrac{\vec{t}}{|\vec{t}|}$是单位向量却不易理解. 其实道理很简单，数量$x=x\cdot 1$，当然$\dfrac{x}{x}=1$；$\vec{t}$的模为$|\vec{t}|$，$\dfrac{|\vec{t}|}{|\vec{t}|}=1$，当然$\dfrac{\vec{t}}{|\vec{t}|}$是单位向量.

**解** (1) 设$\vec{t}=(x, y)$是单位向量. 则$x^2+y^2=1$；又$\vec{t}\perp\vec{a}\Leftrightarrow 3x-4y=0$. $3x=4y$，即$9x^2=16y^2$. 代入$9x^2+9y^2=9$. 所以$25y^2=9$，$y=\pm\dfrac{3}{5}$.

所以$x=\dfrac{4}{3}y=\pm\dfrac{4}{5}$.

故与$\vec{a}$垂直的单位向量为$\vec{t}=\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$或$\left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$.

**【简评】** 在解题时注意$\vec{t}=(x, y)$一定有两解. 即与非零向量$\vec{a}$垂直有两个方向；同时要注意$x$与$y$是同号还是异号.

(2) (数形结合法)先看条件 2，如图 1.2-4(a)，设单位向量$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\vec{a}$，$\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$，以$|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$为边的三角形是正三角形；再看条件 1，如图

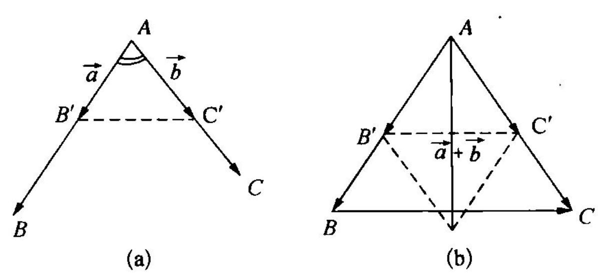


图 1.2-4

1.2-4(b),即 $(\vec{a}+\vec{b})\perp\overrightarrow{BC}$,又 $(\vec{a}+\vec{b})\perp\overrightarrow{B'C'}$. $BC \parallel B'C'$. 所以 $\triangle ABC$ 是正三角形. 故选择(D).

**【简评】** 如果对 $\dfrac{\vec{t}}{|\vec{t}|}$ 是单位向量很清楚. 这道高考题就显得很简单.

**例 4** 设在 $\triangle ABC$ 中,$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$,$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$,$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$,且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$,则 $\triangle ABC$ 是(　　).

(A) 一般三角形　　(B) 等边三角形　　(C) 直角三角形　　(D) 等腰三角形

**【分析】** 含有共同元素的点积相等,必须移项来做,其实隐含垂直关系.

**解** 如图 1.2-5,设 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 向量两两点积时,均不具有同一始点. 由此,$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}\Rightarrow\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$. 即 $\vec{b}\perp(\vec{a}-\vec{c})$. 即 $\triangle ADC$ 是直角三角形,$B$ 是斜边中点. 所以 $|\vec{a}|=|\vec{c}|$. 同理可得 $|\vec{b}|=|\vec{a}|=|\vec{c}|$. 所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形. 故选择(B).

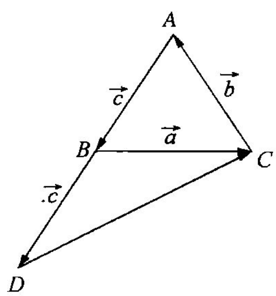


图 1.2-5

**【简评】** 这给出了正三角形的又一向量条件模式. 即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$. 比如 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}\Leftrightarrow\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0\Leftrightarrow\vec{b}\perp(\vec{a}-\vec{c})$ 的处理方式是解题关键.

**例 5** 已知点 $O$、$N$、$P$ 在 $\triangle ABC$ 所在平面内,且 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$,$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$,$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$,则点 $O$、$N$、$P$ 依次是 $\triangle ABC$ 的(　　).

(A) 重心、外心、垂心　　(B) 重心、外心、内心

(C) 外心、重心、垂心　　(D) 外心、重心、内心

**【分析】** 一些与向量相关的图形结构不能不知道. 比如图 1.2-6(a),向量间"首尾相接",则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=\vec{0}$;图 1.2-6(b),$A$、$B$、$C$、$D$、$E$ 是圆圈上的等分点,则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$. 它们具有很明确的物理意义. 从某点出发回到该点,从"位移"角度来说,等于"没动";如果是三向交流电,总电流强度 $I=0$. 再结合到例 4,第三个条件的与之不同是出现了第 4 个点.

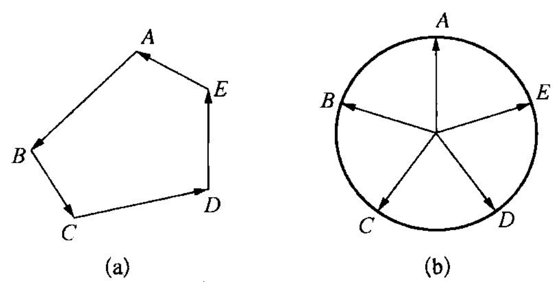


图 1.2-6

**解** 如图 1.2-7(a),$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$,当然 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的外心;如图 1.2-7(b),由平行四边形法则,$\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}$,既然 $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. 一定 $\overrightarrow{NC}$ 与 $\overrightarrow{ND}$ 是相反向量. 所以 $|\overrightarrow{NC}|=2|\overrightarrow{NO}|$. 由此推知 $N$ 是重心($CO$ 是 $\triangle ABC$ 中 $AB$ 边上的中线). 如图 1.2-7(c),$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\Leftrightarrow\overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{PC}$. 可得 $P$ 为垂心. 选择(C).

**【简评】** 例 5 的外心、重心不难解得,关于垂心,是否与例 4 相关联呢?

**例 6** 设 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 为同一平面内具有相同起点的任意三个非零向量,且满足 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 不共线,$\vec{a}\perp\vec{c}$,$|\vec{a}|=|\vec{c}|$,则 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ 的值一定等于(　　).

(A) 以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为两边的三角形的面积　　(B) 以 $\vec{b}$、$\vec{c}$ 为两边的三角形的面积

(C) 以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积　　(D) 以 $\vec{b}$、$\vec{c}$ 为邻边的平行四边形的面积