

院士数学讲座专辑

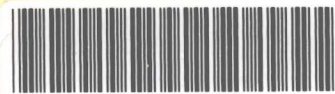
张景中 曹培生◎著

从数学教育 **到**

教育数学

——张景中院士、曹培生教授献给中学师生的礼物

[典藏版]



YZLI0890142397

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

院士数学讲座专辑

从数学教育到 教育数学

——张景中院士、曹培生教授
献给中学师生的礼物

[典藏版]



张景中 曹培生◎著



YZLI0890142397

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

北京

图书在版编目 (C I P) 数据

从数学教育到教育数学 (典藏版) / 张景中著. —
北京: 中国少年儿童出版社, 2011. 7
(中国科普名家名作·院士数学讲座专辑)
ISBN 978-7-5148-0196-5

I. ①从… II. ①张… III. ①数学—少儿读物 IV.
①01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 062625 号

CONG SHUXUEJIAOYU DAO JIAOYUSHUXUE
(DIANCANGBAN)

(中国科普名家名作·院士数学讲座专辑)

 出版发行: 中国少年儿童新闻出版总社

中国少年儿童出版社

出版人: 李学谦

执行出版人: 赵恒峰

策 划: 薛晓哲

责任编辑: 许碧娟 董 慧 常 乐

装帧设计: 缪 惟 刘豪亮

著 者: 张景中

责任校对: 杨 宏

责任印务: 杨顺利

社 址: 北京市东四十二条 21 号

邮政编码: 100708

总 编 室: 010-64035735

传 真: 010-64012262

发 行 部: 010-84037667

h t t p: //www. ccppg. com. cn

E-mail: zbs@ccppg. com. cn

印刷: 北京友谊印刷有限公司

出版发行: 中国少年儿童新闻出版总社

开本: 880mm × 1230mm 1/32

印张: 8

2011 年 7 月第 1 版

2011 年 7 月北京第 1 次印刷

字数: 140 千字

印数: 8000 册

ISBN 978-7-5148-0196-5

定价: 16.00 元

图书若有印装问题, 请随时向印务部退换。(010-57350028)

写在前面

教育数学，作为一门学科，尚待承认；但教育数学的活动，则早已存在。

两千多年前的欧几里得，对当时的几何学研究成果进行再创造，写成了《几何原本》这一有着深远影响的教程。这是教育数学的第一个光辉典范。

一百多年前的法国数学家柯西，对牛顿、莱布尼兹以来微积分的研究成果进行再创造，写出了至今还在影响着大学讲坛的《分析教程》，成为高等数学教育发展途中的一座里程碑。这是教育数学的又一杰出贡献。

当代的布尔巴基学派，把浩繁的现代数学纳入“结构”的框架，出版了已达 40 余卷的百科全书似的巨著《数学原理》，“对数学从头探讨，并给予完全的证明”。这是为数学家准备的高级教程。应当说，布尔巴基是当代的教育数学大师。

为什么是教育数学而不是数学教育？

数学教育要靠数学科学提供材料。对材料进行教学法的加工使之形成教材，是数学教育的任务。但是，数学教育不承担数学上的创造工作。

为了教育的需要，对数学研究成果进行再创造式的整理，提供适于教学法加工的材料，往往需要数学上的创新。这属于教育数学

的任务。

因此，我们认为，欧几里得、柯西以及布尔巴基们，是教育数学家。他们的工作成果，一次又一次地被数学教育家加工，成为各式各样的课本，直到今天。

从欧几里得到布尔巴基，他们是站在数学发展前沿从事再创造活动的。到了今天，在中小学和大学课堂上，面对着欧几里得、柯西这些大师们留下的珍贵遗产，我们似乎是在数学的大后方。在大后方，除了“教学法加工”之外，是不是无事可做了呢？如果无事可做，“教育数学”在中小学到大学这一广阔领域，岂不是没有立足之地了吗？

事实并非如此。前辈大师们留下的珍贵遗产，并非尽善尽美。在中学到大学的数学课程中，存在着公认的难点。如何处理这些难点，一直被认为是数学教育的任务。这些难点，说明了前辈大师们的工作尚有缺陷。指出这些缺陷，从数学上而不是从教育学上加以再创造，正是当前教育数学的任务之一。

本书作者一直致力于这方面的研究工作，这本书介绍的就是作者从 1975 年以来进行的探讨，具体包括 3 个问题：平面几何的新体系与新方法，极限概念的“非 ε -语言”定义法，以及实数理论中的连续归纳法。

我们希望读者阅读了这本书之后，能够有这样的印象：教育数学是具体的、切切实实的数学，不是空泛的讨论。

但是，作为一门学科，它仍然是一株幼苗，甚至是一粒刚刚萌发的种子。

目 录

CONGSHUXUEJIAOYUDAQIAOYUSHUXUE Contents

从新学教到教新学

一、珍贵的遗产，沉重的负担	1
1.1 从方块字谈起	1
1.2 10个指头不如8个指头	2
1.3 更先进的数制	4
1.4 亡羊补牢，犹未为晚	7
二、国王向欧几里得提出的请求	9
2.1 第一部几何教科书	9
2.2 国王的请求	10
2.3 难在何处	11
2.4 眼光向前	13
三、要什么样的几何教材	14
3.1 几何——数学教育改革的热点	14
3.2 欧几里得滚蛋	15
3.3 对新教材的要求	16
四、抓住面积，开门见山	18
4.1 面积法——古老的证题工具	18
4.2 面积——数学里的多面手	22
4.3 一个开门见山的体系	30
4.4 面积公式 $\triangle ABC = \frac{1}{2}ab\sin C$ ——解题利器 ..	49

目 录

Contents

CONGSHUXUEJIAOYUDAOJIAOYUSHUXUE

五、平面几何的另一条新路	62
5.1 一个平凡公式的妙用	62
5.2 共边三角形与共角三角形	67
5.3 两个定理的广泛应用	72
5.4 逻辑展开	91
5.5 新体系的逻辑后盾——公理体系	113
5.6 张角公式的用处	124
六、面积方法在课外	136
6.1 面积与轨迹	136
6.2 面积与坐标	145
6.3 面积与自然对数	155
6.4 一线串五珠	163
6.5 余面积与勾股差	176
七、微积分大门的高门槛	188
7.1 又一份珍贵遗产——微积分	189
7.2 极限理论与“ ε -语言”	192
7.3 不用“ ε -语言”讲数列极限	195
7.4 不用“ ε -语言”讲函数极限	204
7.5 两种极限定义的等价性	210

从新到旧
从旧到新
从新到旧
从旧到新
从新到旧
从旧到新

目 录

CONGSHUXUEJIAOYUDAQJIAOYUSHUXUE Contents

八、漏掉了的基本定理	214
8.1 两种归纳法——何其相似乃尔	215
8.2 连续归纳原理与实数连续性等价	217
8.3 连续归纳法的应用	219
8.4 一个由点到面的推理模式	226
8.5 两种质疑	229
九、从数学教育到教育数学	230
9.1 从欧几里得到布尔巴基	232
9.2 教育数学有事可做	235
9.3 是难是易	239
9.4 优劣的标准	240
9.5 纸上谈兵与真刀真枪	245
后记	246

从新到教台到教台新学

一、珍贵的遗产，沉重的负担

1.1 从方块字谈起

方块汉字，是祖宗留给我们的一份珍贵的文化遗产。龙飞凤舞的书法、古朴雅致的篆刻、铿锵上口的律诗、巧夺天工的楹联……这些艺术明珠，无不和方块汉字息息相关。如果有一天，汉字真的被 20 多个字母的各种排列组合所代替，这些艺术明珠也就只能栖身于研究室和博物馆了。这多少还是令人惋惜的。

但是，正像鲁迅早就指出的那样，方块汉字，是我们民族身上的一个沉重负担。它是一种“不象形的象形字，不谐声的谐声字”，我们要一个一个地凭空记住，又要把那么多笔画妥妥帖帖地安排在一个不到一厘米见方的小格子里，确实不容易。鲁迅认为，汉字的难写难认，是阻挡人们学习文化知识的一条“高门槛”，“单是这条门槛，倘若不费它十来年工夫，就不容易跨过”。这话一点不假。在一所著名的综合大学的校园里，我不止一次地看见大学生写的寻物

启“示”；我们的电视台也曾经做过“容易读错的字”的专题节目。这些，不都表明中国语言文字难学吗？

在电子计算机向各个领域渗透的今天，方块字这个包袱，显得更加沉重。计算机用拉丁字母的组合与人交流信息，极其方便。而汉字系统呢，至今还是热门的研究课题。虽然有一个个巧妙的方案脱颖而出，但实际上都要占用宝贵的内存。（这是20多年前的情形了。由于信息技术的进步，汉字输入占用的内存，已不在话下。）

方块字还阻碍了我国与世界上其他许多国家的文化交流。中国有不少好的文学作品，但都与诺贝尔文学奖无缘。据说，这也和汉字之难大有关系。

祖宗给我们留下这份宝贵的文化遗产，我们应当感激。但是为了继承它，我们已经虚掷了太多光阴，耗费了太多金钱！而我们的子孙后代，又将在方块字上比人家多付出多少劳动啊！

珍贵的遗产，同时又是沉重的负担。

1.2 10个指头不如8个指头

珍贵的遗产，同时又是沉重负担。这种现象不仅仅表现在方块汉字上。比如，美国的一位著名科普作家阿西莫夫，曾经写过一篇文章，论述英语中也有许多单词造得不合理、不简洁。

为了减轻语言文字现状带给人类的沉重负担，有识之士开始提

倡一种“世界语”。这种更方便、更科学的新造语种，一百多年来，得到越来越广泛的支持。

为了使珍贵的遗产传到下一代手中时更易使用和理解，人们付出了艰辛的劳动。这种文化改造工作很艰难；因为当人们发现“遗产”应当加以改造时，往往已经晚了。

下面我们来看看，除了语言文字外，还有哪些文化遗产既“珍贵”又“沉重”。

在这些珍贵的遗产当中，最基本的部分除语言文字外，恐怕要算数学了。看看十进制记数法吧，这可是全世界人民的共同财富。它比起古埃及或古罗马的记数法来，不知要高明多少倍。但是，它是不是就尽善尽美了呢？

早就有人感叹过，要是人有8个手指而不是10个就好了——因为八进制对于电子计算机来说要比十进制方便得多。电子计算机用二进制数码进行实际的运算（这在今天已是人们的常识了），而八进制与二进制之间的相互转换易如反掌。这里有一张表，它记录了把八进制数译成二进制数，或把二进制数译成八进制数的通用方法：

八进制		二进制
0	————	000
1	————	001
2	————	010
3	————	011
4	————	100
5	————	101
6	————	110
7	————	111

用以上方法，我们可以方便地把一个八进制数，例如 317（相当于十进制下的 $3 \times 64 + 8 + 7 = 207$ ），直译作 011, 001, 111。丢掉最左边的 0，就是 11001111。反过来，二进制下的 10101110，自右向左，3 个码一组，看成 001, 010, 110，也能直译成八进制下的 126。

可是，你要把十进制数 207 译成二进制，试试看，就麻烦得多。你要反复用 2 来除。

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 207} \quad \cdots \cdots \text{余 } 1 \\
 2 \overline{) 103} \quad \cdots \cdots \text{余 } 1 \\
 2 \overline{) 51} \quad \cdots \cdots \text{余 } 1 \\
 2 \overline{) 25} \quad \cdots \cdots \text{余 } 1 \\
 2 \overline{) 12} \quad \cdots \cdots \text{余 } 0 \\
 2 \overline{) 6} \quad \cdots \cdots \text{余 } 0 \\
 2 \overline{) 3} \quad \cdots \cdots \text{余 } 1 \\
 1 \quad \cdots \cdots \text{余 } 1
 \end{array}$$

把余数自下而上写出来是：11001111。而从八进制下的 317 得到它，就容易得多。

1.3 更先进的数制

不过，不同数制的转换也不是什么了不得的困难，在计算机里，略施小技，就能解决十进制到二进制的转换问题。之所以说十进制并非尽善尽美，我们有更有力的理由：因为还有比十进制记数法更

优越的方法。

两只手有 10 个指头，一只手可只有 5 个指头。中国算盘里上珠以一代五，大大方便了运算。充分利用这 5 个指头，能造出更好的记数法来。

比方说，我们可以删除 6, 7, 8, 9 这 4 个数码，只留下 0, 1, 2, 3, 4, 5（要知道，关于 7, 8, 9 的加减乘除，正是一年级小学生觉得最难的）。仍然是十进制，但记数时加减并用。一个数码顶上画一杠表示减去它。具体来说，0, 1, 2, 3, 4, 5 的写法不变。数码 6 没有了，但因为 $6 = 10 - 4$ ，所以 6 可以写成 $1\bar{4}$ ——十位上的 1 代表 10，个位上的 $\bar{4}$ 代表负 4。照此处理，7 写成 $1\bar{3}$ ，8 写成 $1\bar{2}$ ，9 写成 $1\bar{1}$ ，而 10 还是 10。从 11 到 15 照旧，而 16 到 19 则变成了 $2\bar{4}$ 、 $2\bar{3}$ 、 $2\bar{2}$ 、 $2\bar{1}$ 。类似地，27 是 $3\bar{3}$ ，81 是 $1\bar{2}1$ ，97 是 $10\bar{3}$ ，104 仍是 104，7267 则变成 $1\bar{3}3\bar{3}$ 。

这种记数法的好处，不仅在于少用了 6, 7, 8, 9 这 4 个数码，更重要的是运算起来方便。

有人详细总结了这种记数法的好处，大致有以下 6 条：

(1) 基本的加减法容易多了，因为只剩下 5 以内的加减法。

(2) 乘法表的内容大大减少。如果不算 1 的乘法，就只有 10 句。

(3) 学会加法也就学会了减法。例如：

$$5\bar{2}4 - 2\bar{3}3 = 5\bar{2}4 + 23\bar{3}。$$

这样，代数里的正负数加减法就融合在算术运算里了。

(4) 由于正负抵消，连续相加变得更容易了。比较一下这两个算式，可见一斑：

$$\begin{array}{r}
 198 \\
 245 \\
 739 \\
 + 682 \\
 \hline
 1864
 \end{array}
 =
 \begin{array}{r}
 20\bar{2} \\
 245 \\
 1\bar{3}4\bar{1} \\
 + 1\bar{3}\bar{2}\bar{2} \\
 \hline
 2\bar{1}4\bar{4}
 \end{array}$$

左边的老式算法，由于不能正负相消，每一竖列相加时都涉及较多的运算。

(5) 加减混合运算可以在一个竖式里进行。

(6) 四舍五入的规则没有了，取而代之的是简单的“截尾”。比方说， 3.68 在新记数法里是 $4.\bar{32}$ ，截尾之后得到 $4.\bar{3}$ ，恰好是 3.7 ，相当于把 3.68 最后的 8 进上去。而 3.64 是 $4.\bar{44}$ ，截尾之后是 $4.\bar{4}$ ，即 3.6 。

想一想，单是简化乘法表，就能使孩子们提前半个学期学会乘法。此外，由于记数法本身和正负号紧密地联系在一起，还可以使代数变得更容易。

可见，十进制记数法虽然是一份珍贵的遗产，同时也是沉重的负担。初学算术的孩子，也许会有最深刻的体会吧！

尽管早在 1726 年，已有人提出以上介绍的这种加减记数法（就在这一年，英国人约翰·科尔森向英国皇家学会介绍了这个系统），

但还是太晚了。因为世界上已经有太多的人学会了现在通行的十进制记数法。要改，将涉及整个社会，要遇到不可克服的阻力，要付出巨大的代价。

1.4 亡羊补牢，犹未为晚

现在，我们指手画脚地大谈方块汉字的缺点，大谈十进制记数法的不完美之处，除了能显示自己比古人高明之外，又有什么用呢？这确实是“马后炮”。然而，“亡羊补牢，犹未为晚”，既然当不成事先诸葛亮，就当一当事后诸葛亮吧！

我们是否应当仔细查看一下，现在我们千方百计地教给孩子们的东西当中，还有没有这样的“珍贵遗产”呢？有朝一日我们会不会突然发现，可以用更好的东西取代它，对比之下，它又成了沉重的负担呢？

语言文字和数学是最基本的两大学科。对语言文字，我们除了接受古人遗产之外，办法不多，只有小改小革——比如简化字、汉语拼音。而数学教育的内容如何改革，则是近年来世界各国的数学家和数学教育家十分关心的事。这里不一一介绍各种方案的基本设想和实践的优劣成败，我们想从另一个角度提出问题——从系统科学的观点看，数学教育的内容能不能进一步“优化”呢？

方块汉字的产生，具体因素很复杂。但有一点可以肯定，“仓

们那时没有系统科学的知识，不懂得信息论，造字时缺乏通盘计划，没有进行“优化”！

十进制的现行记数系统，它的产生也不是一个完全自觉的过程。没有谁应用系统科学的观点，对它进行“优化”。

随着科学技术的发展，数学正迅速地向其他学科渗透，数学知识日益普及，一旦普及得够多，改革起来就会特别困难，就像现在我们想改革方块字、改革记数系统那样。

抓紧吧，现在还来得及！

二、国王向欧几里得提出的请求

2.1 第一部几何教科书

据说，世界上再版次数最多、流传最广的书，除了圣经之外，就要数欧几里得的《几何原本》了。圣经的流传依靠宗教的力量，而《几何原本》的历久不衰靠的是它在科学上的卓越成就。

《几何原本》把当时人类所掌握的相当丰富，但杂乱无章的几何知识熔于一炉，铸成了一个空前严整的科学体系。这在人类认识世界的历史上实为一大创举。同时，《几何原本》又以它无可争辩的威望，自然而然地成为几何课程的第一部教材，占领中学几何课堂两千多年而历久不衰。如今，初中的几何课本虽大有删改，但不外乎是《几何原本》的变形或缩影。

事实表明，欧几里得真是一箭双雕。因为《几何原本》不仅在科学领域是成功的，在教育领域也是成功的。它把生动直观的图形与严密的论证紧密结合起来，出发点简明而无可争辩；特别是它还