高等农林牧水产院校教材

概率论与数理统计

主　编　高聿清　吴素文　鲁春铭　高志龙
副主编　张丽梅
主　审　蔡贤如

吉林科学技术出版社

编委名单

主　编　高聿清　吴素文　鲁春铭　高志龙
副主编　张丽梅
编写人员（以姓氏笔划为序）
　　　　丰　雪　冯大光　吴素文　张丽梅
　　　　高聿清　高志龙　鲁春铭　谭洪波
主　审　蔡贤如

高等农林牧水产院校教材
概率论与数理统计　　高聿清等　主编

责任编辑：王宏伟　　封面设计：李长东

出版发行　吉林科学技术出版社
印刷　沈阳农业大学印刷厂
787×1092 毫米 16 开本　373 000 字　16.75 印张
1999 年 1 月第 1 版　1999 年 1 月第 1 次印刷　印数：1～4000 册
ISBN 7-5384-1476-2/G·212　定价：19.50 元

地址　长春市人民大街 124 号　邮编　130021　电话　5635183　传真　5635185
电子信箱 JLKJCBS@public.cc.jl.cn

前　言

概率论与数理统计是高等农业院校的一门重要的基础课，也是很多新兴学科的基础。随着计算机的发展，数理统计的理论与方法的广泛应用得以实现，现在它应用于各个学科的各个领域。它与许多学科相互渗透、相互交叉、相互结合已成为近代科学技术发展的一个重要特征。在农业方面，数理统计与生物统计、农业经济管理等学科间均有着密切的联系。因而掌握概率论与数理统计已成为现代农业科技人才的一个重要标志。

本书是根据高等农业院校概率论与数理统计课程的教学大纲与农业部学科组关于“概率论与数理统计教学基本要求(讨论稿)”，遵照数学为农业生产实际与农业科学研究服务的宗旨，并结合农业院校学生的数学基础及编者在长期教学实践中积累的对这门课程的认识编写的。主要作为高等农、牧、水产院校的本科生教材，也可供广大农业科技工作者参考使用。

本书分为三部分。第一部分：概率论(第一章至第五章)是基础知识，也是全书的重点，它为数理统计的学习提供了必要的理论基础。数理统计部分(第六章至第十一章)主要介绍了数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析。第三部分为抽样技术(第十一章)，介绍了分层抽样、整群抽样、多级抽样及系统抽样中的等距抽样方法。编写中，编者努力致力于提高教材的质量，力求做到概念准确而又清晰易懂，推理严谨又能使学生接受，对某些需用较深的数学知识才能证明的统计学原理略去了证明，而给予一定的说明。在例题与习题的选择上注意典型性、代表性的同时，更注重其在农业中的应用，并为加强培养学生的统计计算能力下功夫。

本书由沈阳农业大学高聿清副教授任第一主编并统稿，蔡贤如教授主审。

本书出版中得到沈阳农业大学与编者所在院校及王学恕教授的大力支持，在此一并致谢。

由于水平有限，书中不足之处，恳请读者批评指正。

编者

1998 年 12 月

绪　论

在客观世界中，存在着两类不同的现象：确定性现象与随机现象。比如，标准大气压下，将水加热到100℃“水沸腾”是必然出现的现象，我们称这种在一定的条件下进行试验，每次试验结果都相同的现象为确定性现象。又如，我们随意地抛掷一枚硬币进行观察，就会发现出现的结果有两种可能性：“分值面向上”或“国徽面向上”，也就是说，在这个试验的每次试验中，某个试验结果（比如，“分值面向上”）是可能出现也可能不出现的。这种在一定条件下进行试验，每次试验的结果有多种可能性，且在每次试验结束前，不能预知哪个结果出现的现象为不确定性现象。对于这种不确定性现象，如果我们做大量的重复试验就会发现，某个试验结果在试验中出现的可能性大小会呈现出某种规律（参看表1.2.1），我们将这种规律性称为统计规律性，将这类现象称为随机现象。

观察随机现象的试验称为随机试验。这里我们对试验作一个广义的理解，它包括各种各样的科学试验，也包括对某一事物的某一个特征的观察。

概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科。其中，概率论在于阐明客观世界中随机现象的统计规律性，数理统计则是研究将这种统计规律性反转来应用于客观世界的各种方法。它们都以数学形式来抽象概括，是数学的一个分支。

概率论的研究始于17世纪中叶，到本世纪，在理论上日趋完善，已形成了严格的数学体系。今天，应用概率统计原理，依据数学信息作出判断决策已成为政治、经济、军事、企业、科研、生产等各个领域里处理问题的日趋普及的方式了。例如，使用概率统计方法可以进行气象预报、水文预报及地震预报、产品的抽样验收；在培育新品种时，为寻求最佳的育种方案，可以进行试验设计与数据处理；在自动控制中可用给出的数学模型以便通过电脑控制工业生产等。如今，概率统计已是许多新型重要学科的基础，更是当今农业科技工作者必备的一种数学工具。

掌握概率论与数理统计这门学科已成为现代科技人才的一个重要标志之一。

目　录

第一部分

概　率　论

第一章 事件与概率

第一节 随机事件

一、随机事件与样本空间

我们在绪论中已经介绍了随机试验，现在进一步明确它的含意。一个试验如果满足下述条件：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 试验的所有可能结果是明确知道的，并且不止一个；

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但试验前不能确切知道会出现何种结果。

这样的试验称之为随机试验，用字母 E 表示，简称试验 E 。

随机试验的每一个不可再分解的可能结果，称为**基本事件**。因为随机试验的所有可能结果是知道的，故所有的基本事件也是明确知道的。我们把一个随机试验 E 的所有基本事件组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 Ω。集合中的元素就是基本事件，有时也称为样本点，常用 ω 表示，即 $\Omega = \{\omega\}$ 。

例 1.1.1 一个袋中装有 8 个大小完全相同的球，其中有 4 个是白色的，4 个是红色的，搅匀后从中任意摸取一球，令

$$\omega_1 = \{取得白球\}, \omega_2 = \{取得红球\}$$

则

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} \quad 或表示为 \Omega = \{白球,红球\}$$

例 1.1.2 随意投掷一颗骰子，观察出现的点数。令

$$i = \{出现的点数为 i\}, i = 1,2,3,4,5,6.$$

则

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

例 1.1.3 观察某电话交换台在单位时间内收到的呼唤次数。令

$$i = \{收到的呼唤次数为 i\}$$

则

$$\Omega = \{0,1,2,\cdots\}$$

例 1.1.4 在一批灯泡中，任意抽取一只，以小时为单位，测试所抽灯泡的寿命。令

$$t = \{灯泡寿命\}$$

则

$$\Omega = \{t \mid t \geqslant 0\}$$

在随机试验中,有时我们所关心的是带有某些特征的基本事件是否发生。比如在例1.1.2中,如果我们设

$$A = \{出现的点数为4\}$$
$$B = \{出现的点数为偶数\}$$
$$C = \{出现的点数小于3\}$$

则可以研究这些结果在试验中是否发生?其中 A 是一个基本事件,而 B 与 C 由多个基本事件组成,相对于基本事件,就称它们是复合事件。无论是基本事件还是复合事件,它们在试验中发生与否都带有随机性,所以都叫做随机事件,即,随机试验 E 的一个结果称为**随机事件**,或简称为事件。通常用大写字母 A、B、C 等表示。

人们已经知道样本空间 Ω 包含了全体基本事件,而随机事件是由某些特征的基本事件所组成,从集合论的观点来看,随机事件就是样本空间 Ω 中的一个子集,比如在例1.1.2中, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$,显然上述的 A、B、C 都是它的子集。

必定发生的事件称作**必然事件**,必然事件包含所有的样本点,因而为 Ω,这样我们可以把样本空间 Ω 也作为一个事件,因为在每次试验中必然出现 Ω 中的某个样本点,也即 Ω 必然发生,所以常称 Ω 为必然事件。类似的,我们把不可能发生的事件称作**不可能事件**,它不包含任何样本点,记作 ψ (空集)。这样,空集 ϕ 也作为一个事件,它在每次试验中,都不会发生,称为不可能事件,必然事件与不可能事件可以说不是随机事件,因为它们的发生与否不存在着随机性问题,但为了今后研究上的方便,我们还是把必然事件与不可能事件作为随机事件的两个极端情形来统一处理。

二、事件间的关系及运算

一个样本空间 Ω 中,可以有很多的随机事件,研究事件间的关系及运算能帮助我们通过对较简单事件规律的研究去掌握更复杂事件的规律。

设试验 E 的样本空间为 Ω, A、B、C、A_1、$A_2\cdots$ 是试验 E 的事件。

1. 包含关系:若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A (或称事件 A 是事件 B 的子事件),记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ 。

显然对任何事件 A ,有 $\Omega \supset A \supset \phi$ 。

2. 相等关系:若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等(或称等价),记作 $A = B$ 。

3. 和事件:称事件 A、B 至少有一个发生所构成的事件为事件 A 与事件 B 的和事件,记作 $A \cup B$ 。

若 $B \supset A$,则 $A \cup B = B$ 。

设 $A = \{t \mid 0 < t \leqslant 4\}, B = \{t \mid 3 < t \leqslant 5\}$

则 $A \cup B = \{t \mid 0 < t \leqslant 5\}$ 。

类似地,称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生所构成的事件为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件,记作 $A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n$,简记为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 。

称事件 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生所构成的事件为 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件，记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$。

例如，在 1.1.2 中，$B \cup C = \{1,2,4,6\}$。

性质：(1) $A \subset A \cup B$；$B \subset A \cup B$。

(2) $A \cap (A \cup B) = A$；$B \cap (A \cup B) = B$

(3) $A \cup A = A$

4. 积事件：称事件 A、B 同时发生所构成的事件为事件 A 与事件 B 的积事件，记作 $A \cap B$ 或 AB。

若 $B \supset A$，则 $AB = A$

在 1.1.2 中，$BC = \{$点数为 $2\}$。

有 $A \cap A = A$

类似地，可以定义 $n(n > 2)$ 个事件的积：

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

及可数个事件的积：

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$$

5. 互斥事件：若事件 A、B 不能同时发生，即 $AB = \phi$，则称事件 A 与事件 B 是互斥事件或互不相容事件。当两事件互斥时，可将 $A \cup B$ 记作 $A + B$。

6. 互逆事件：若事件 A 与事件 B 在一次试验中必有且只有其中之一发生，即事件 A、B 满足条件：

$$A \cup B = \Omega \text{ 且 } AB = \phi$$

则称事件 A 与事件 B 为互逆事件，或称事件 A、B 互为对立事件。事件 A 的对立事件记作 $\overline{A}$。

由定义知，对立一定互斥，互斥不一定对立。

若 $A \supset B$，则 $\overline{A} \subset \overline{B}$。

7. 差事件：称事件 A 发生而事件 B 不发生所构成的事件为事件 A 与事件 B 的差事件，记作 $A - B$。由于 $A - B = A\overline{B}$，故在事件的运算中，可以不给出差事件的概念。

由于引入了样本空间的概念，事件的关系及运算可以归结为集合的关系及运算，故事件的关系和运算可用图来直观示意，见图 1.1.1。

三、事件的运算定律

1. 交换律：$A \cup B = B \cup A, AB = BA$

2. 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$

3. 分配律：$(A \cup B)C = AC \cup BC, (AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$

4. 德·摩根律(对偶律)：$\overline{A \cup B} = \overline{A}\ \overline{B}$，$\overline{(AB)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \quad \cdot \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$

5. $\bar{\bar{A}} = A$

6. $A - B = A\bar{B} = A - AB$

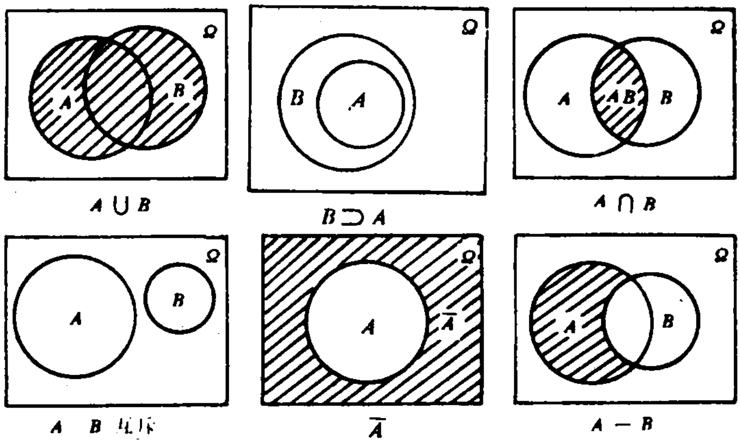

图 1.1.1

例 1.1.5 按长度和直径两个指标检验某种圆柱形产品是否为合格品。若设 $A = \{$长度合格$\}$，$B = \{$直径合格$\}$，试用 A、B 的运算式表示事件 $C = \{$产品为合格品$\}$，$D = \{$产品为不合格品$\}$。

解 圆柱形产品尺寸合格必须是长度与直径同时合格，即 A、B 两事件同时发生，所以

$$C = AB$$

依题意，$\bar{A} = \{$长度不合格$\}$，$\bar{B} = \{$直径不合格$\}$，由于长度与直径只要有一个不合格都会导致产品不合格，故产品为不合格是 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 至少有一个发生所构成的事件，于是

$$D = \bar{A} \cup \bar{B} \text{ 或 } D = \overline{(AB)}$$

例 1.1.6 设 A、B、C 是样本空间 Ω 中的三个随机事件，试用 A、B、C 的运算表达式表示下列随机事件：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生；

(2) A、B、C 都不发生；

(3) A、B、C 中恰好发生一个；

(4) A、B、C 中至少有两个发生；

(5) A、B、C 中至少有一个发生。

解 (1) $A\bar{B}\,\bar{C}$

(2) $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$

(3) $A\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}C$

(4) $AB \cup BC \cup AC$ 或 $AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$

(5) $A \cup B \cup C$

第二节　事件的概率

研究随机试验不仅要知道它可能出现哪些事件，更重要的是要研究各种事件出现的可能性大小，进而揭示出这些事件的内在的统计规律。随机事件在一次试验中是否出现虽然很难预料，但在大量的重复试验中，它出现的可能性大小是有内在的规律性的。我们把用来刻划随机事件 A 出现的可能性大小的数值，称为事件 A 发生的概率，记作 $P(A)$。

在概率论的发展史上，人们曾针对不同的问题，从不同的角度给出了定义概率和计算概率的各种方法，本节将给出一定条件下的几种概率定义。

一、概率的统计定义

在大量重复试验中，事件 A 出现的可能性大小会呈现出某种规律，故可通过做大量试验的方法来确定事件的概率。

设在 n 次重复试验中，事件 A 出现了 μ 次，则称 μ 为事件 A 在 n 次试验中出现的频数，比值 $\frac{\mu}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中出现的频率，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A) = \frac{\mu}{n}$$

下面我们来观察在增加试验次数的情况下，频率的取值情况。

历史上，一些统计学家做过抛掷钱币的试验，下表是这些试验的记录。

表 1.2.1　　抛掷钱币试验记录

试验者	抛币次数 n	"正面向上"次数 μ	频率 $f_n(A)$
De Morgan	2084	1061	0.518
Bufen	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

从表中数据看出，出现{正面向上}的频率 $f_n(A)$ 虽然随 n 的不同而变动，但总的趋势是随着试验次数的增多而逐渐稳定在 0.5 这个数值上。可以看出，0.5 这个值客观地刻划了事件 $A=$ {正面向上} 发生的可能性的大小，也就是说，不管谁去做这个试验，频率 $f_n(A)$ 的稳定值都是 0.5。即频率的稳定值确实揭示了随机事件的统计规律性。

定义　在不变的一组条件下进行大量重复试验，随机事件 A 出现的频率 $\frac{\mu}{n}$ 会稳定地在某个固定的数值 p 的附近摆动，我们称这个稳定值 p 为随机事件 A 的概率，即

$$P(A) = p$$

这个定义又称为概率的统计定义。它通过大量重复试验来揭示随机事件出现的可能性大小这一客观规律。另一方面，我们也不难看出，概率的统计定义本身也给出了求概率

的一种近似方法，即做大量试验，计算事件 A 出现的频率，并用这个频率作为事件 A 的概率的近似值。在实践中我们会看到，这种做法是很有实际意义的。

关于统计概率，易推得如下三个性质：

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) $P(\Omega) = 1$；

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互斥事件

则
$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

关于概率的这三个性质，在后面的几种概率定义中，同样容易推得，我们不再一一列出，请同学们注意。

二、古典概型

某些试验，比如"掷骰子"、"抛硬币"都具有这样两个共同点：

(1)试验的样本空间只含有限个基本事件(样本点)，即 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ ——简称有限性；

(2)在试验中，每个基本事件出现的可能性相同——简称等可能性。

这类试验在概率论出现初期即被注意，许多最初的概率论结果也是对它作出的，故把这类随机现象的数学模型称为古典概型。对于古典概型的概率定义如下。

定义 设样本空间 Ω 包含有 n 个基本事件，且在试验中，每个基本事件出现的可能性相同，若事件 A 包含 k 个基本事件，则定义

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}} = \frac{A \text{ 包含的样本点数}}{\text{样本点总数}} \qquad (1.2.1)$$

这是法国数学家拉普拉斯(Laplace)在 1812 年对概率作的定义，现在通常称它为概率的古典定义。

古典概型在产品质量抽样检查等实际问题以及理论物理的研究中都有重要作用，计算的要点是先确定试验 E 的样本空间所包含的基本事件总数 n，即先求计算式中的分母，然后再求分子——所求概率的事件 A 包含的基本事件数 k，代入公式(1.2.1)即得事件 A 的概率。在古典概率的计算中，经常要用到排列与组合知识，而且许多概率的计算相当困难且富有技巧，我们要求掌握古典概型中的几种基本类型问题及基本技能技巧。

例 1.2.1 从有 9 件正品、3 件次品的箱子中，任取两次，每次一件，试分别以：

(1) 有放回抽样法：即每次抽取的产品观察后又放回箱中；

(2) 不放回抽样法：即每次抽取的产品观察后不放回箱中；

两种抽取方式求事件 $A = \{$取得两件正品$\}$，$B = \{$第一次取得正品，第二次取得次品$\}$，$C = \{$取得一件正品一件次品$\}$ 的概率。

解 (1) 试验 E_1，有放回抽取两次，每次一件的样本空间含 12^2 个基本事件。

事件 A 包含有 9^2 个基本事件，事件 B 包含有 $A_9^1 \cdot A_3^1 = 9 \times 3$ 个基本事件，事件 $C = \{$取得一件正品一件次品$\}$ 没有指出是第几次取得正品，第几次取得次品，故需将第一次取得正品第二次取得次品与第一次取得次品第二次取得正品两种情况都考虑在内，它包含 $A_9^1 \cdot A_3^1 + A_3^1 \cdot A_9^1 = 9 \times 3 + 3 \times 9$ 个基本事件。所以

$$P(A)=\frac{9^2}{12^2}=\frac{9}{16}$$

$$P(B)=\frac{9\times 3}{12^2}=\frac{3}{16}$$

$$P(C)=\frac{9\times 3+3\times 9}{12^2}=\frac{3}{8}$$

(2) 基本事件总数为 $A_{12}^2=12\times 11$

A 包含的基本事件数为 $A_9^2=9\times 8$

B 包含的基本事件数为 $A_9^1\cdot A_3^1=9\times 3$

C 包含的基本事件数为 $A_9^1\cdot A_3^1+A_3^1\cdot A_9^1=9\times 3+3\times 9$，所以

$$P(A)=\frac{9\times 8}{12\times 11}=\frac{6}{11}$$

$$P(B)=\frac{9\times 3}{12\times 11}=\frac{9}{44}$$

$$P(C)=\frac{9\times 3+3\times 9}{12\times 11}=\frac{9}{22}$$

由此可见，有放回抽样与不放回抽样，结果是不同的。

例 1.2.2 从有 9 件正品 3 件次品的箱子中任抽两件产品(即一次抽取两件产品)，求事件 $A=\{$取得两件正品$\}$，$C=\{$取得一件正品一件次品$\}$ 的概率。

解 试验 E 是从 12 件产品中一次抽取两件产品，故

基本事件总数为 C_{12}^2

A 包含的基本事件数为 C_9^2

C 包含的基本事件数为 $C_9^1\cdot C_3^1$，所以

$$P(A)=\frac{C_9^2}{C_{12}^2}=\frac{\frac{9\times 8}{2}}{\frac{12\times 11}{2}}=\frac{6}{11}$$

$$P(C)=\frac{C_9^1\cdot C_3^1}{C_{12}^2}=\frac{9\times 3}{\frac{12\times 11}{2}}=\frac{9}{22}$$

将所得结果与例 1.2.1 中的结果进行比较，虽然 $P(A)$、$P(C)$ 的计算式与例 1.2.1 中(2)不放回抽样中的计算式不同，但结果相同，这就是说，当所求事件与抽取顺序无关时，两种计算的方法可以通用。但在例 1.2.2 中无法求得事件 $B=\{$第一次取得正品，第二次取得次品$\}$ 的概率。因为例 1.2.2 的抽取方法是一次抽取，无法分出抽取的先后顺序，故求 $P(B)$ 只能用排列而不能用组合。

例 1.2.3 10 个学生采取抽签的方式分配 3 张电影票，问第 5 个抽签的人抽得电影票的概率。

解 设 $A=\{$第 5 个抽签的人抽得电影票$\}$

解法一 把 3 张有票的签及 7 张无票的签都看作是不同的(可以设想把它们进行了编号)，若把抽出的签依次放在排列成一直线的 $3+7$ 个位置上，则所有可能的排列法总数

为(3+7)！这是样本空间所包含的基本事件数，而第5个抽签的人抽得电影票有3种取法，另外(3+7-1)个人抽签相当于(3+7-1)张签进行全排列，有(3+7-1)！种方法，所以

$$P(A)=\frac{3\times(3+7-1)!}{(3+7)!}=\frac{3}{10}$$

解法二　把3张有票的签看作是没有区别的(比如上面只画个圈)，7张无票的签也看作是没有区别的(比如上面只画个叉)。仍把抽出的签依次放在排列成一直线的3+7个位置上，若把3张有票的签的位置固定下来，则其他位置必然是无票签。故样本空间所含基本事件总数为C_{3+7}^{3}，事件A发生即第5个位置必须是有票签，再在剩下的3+7-1个位置上任取两个位置为有票签即可，故事件A包含C_{3+7-1}^{2}个基本事件，所求概率为

$$P(A)=\frac{C_{3+7-1}^{2}}{C_{3+7}^{3}}=\frac{3}{10}$$

两种不同的解法所得答案相同。前一种解法把3张有票签、7张无票签都看作是有区别的，故用排列求。第二种解法是10张签只分有票签、无票签两种，计算时不必顾及各有票签间、各无票签间的顺序，故用组合求。也就是说，对于同一个随机现象，可以选取不同的样本空间，可用不同的模型来描述，但只要方法正确，结论总是一样的。这里注意的一点是，一旦已确立了样本空间，求出了这个样本空间的基本事件总数，那么求分子时必定要在已建立了的样本空间中去求，而不能跳到另一个样本空间中去，否则，将会出现错误。

例1.2.4　设n个小球，每个都能以同等的可能性落入N个格子中的任一个格子中($n\leqslant N$)，试求事件$A=\{$某指定的n个格子中各有一个球$\}$、$B=\{$任意的n个格子中各有一个球$\}$的概率。

解　因为每个球都可以落入N个格子中的任一个格子中，故每一个球均有N种不同的落法，n个球落入N个格子，应有N^n种方法。所以

基本事件总数为N^n

事件A包含的基本事件数为$n!$

事件B包含的基本事件数为$C_N^n\cdot n!$

故

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}=\frac{A_N^n}{N^n}$$

这个例子是古典概型中的一个很典型的问题，不少问题可归结为此类。比如，求参加某次集会的n个人中没有两人生日相同的概率，就可将人看作球，一年的365天作为格子等。

三、几何概率

当试验的样本空间含有无穷多个基本事件，而试验结果可以表示为某个区域Ω中的一个点时(这个区域可以是一维的，也可以是二维的、三维的，甚至是n维的)，这时可以

借助于区域的度量(长度、面积、体积等)来实现对概率的定义,即通过几何方法来求概率。

定义 设在可测区域 Ω 内,任一具相同度量的子区域被取到的可能性相等,且从 Ω 中随机取一点属于子区域 A 的可能性只与 A 的测度成正比而与 A 的形状及位置无关,则事件 $A=\{$点属于 $A\}$ 的概率定义为

$$P(A)=\frac{\text{子区域 }A\text{ 的测度}}{\text{区域}\Omega\text{ 的测度}}=\frac{S_A}{S_\Omega} \tag{1.2.2}$$

这个测度可以是长度,也可以是面积、体积等。

例 1.2.5 甲、乙两人相约在 6 点到 7 点在某地会面,先到者等候另一个人 15 分钟,过时就可离去,求这两人能会面的概率。

解 设以 x,y 分别表示甲、乙两人到达约会地点的时间,则两人能够会面的充要条件为

$$|x-y|\leqslant 15$$

建立平面直角坐标系如图 1.2.1,则 (x,y) 的所有可能取值为边长是 60 的正方形内所有点,则可能会面的点为图中两平行线 $x-y=15$ 与 $y-x=15$ 间的阴影部份,所以有:$S_\Omega=60^2$, $S_A=60^2-45^2$,若设 $A=\{$两人能会面$\}$ 则

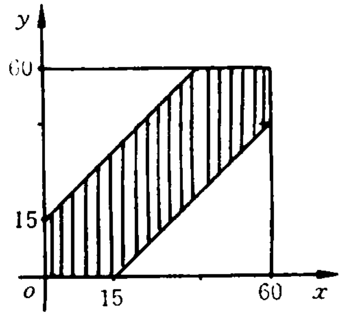

图 1.2.1

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{60^2-45^2}{60^2}=\frac{7}{16}$$

第三节　概率的公理化体系

前面所述的三个概率的定义在它们适用的范围内解决了一定的实际问题,且各具优点。但是,这三种定义也都存在着应用上的局限性,因为它们缺乏通常所说的数学定义的严密性与一般性。因而,给随机事件的概率及其它一些基本概念以明确的定义在概率论的初期发展中成了一个突出的问题。1933 年,苏联数学家柯尔莫哥洛夫(A. H. Колмогоров)提出了概率的公理化结构,这个结构综合了前人的一些成果,明确定义了基本概念,使概率论成为一个严谨的数学分支,这对近几十年来概率论的迅速发展起了积极的作用。

定义 设 E 是随机试验,Ω 是它的样本空间,对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$,称为事件 A 的概率,如果它满足下列三个条件(也称为公理):

(1) $P(A)\geqslant 0$

(2) $P(\Omega)=1$

(3) 对于两两互斥事件 $A_1,A_2,\cdots$,有

$$P(A_1+A_2+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots \tag{1.3.1}$$

不难验证,概率的统计定义、古典定义、几何概率都满足这个定义,都是它的特殊情