



“十二五”国家重点图书出版规划项目

新视野教师教育丛书·学科课程与教学系列

数学美育教育与数学发现

◎ 许晓根 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

“十二五”国家重点图书出版规划项目
新视野教师教育丛书·学科课程与教学系列

数学美育教育与数学发现

许晓根 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

数学美育教育与数学发现 / 许晓根著. —北京: 北京大学出版社, 2012. 1
(新视野教师教育丛书·学科课程与教学系列)

ISBN 978-7-301-19676-2

I. ①数… II. ①许… III. ①数学教学—教学研究 IV. ①01-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 222840 号

书 名: 数学美育教育与数学发现

著作责任者: 许晓根 著

丛书策划: 姚成龙

责任编辑: 陈斌惠 杨子江

标准书号: ISBN 978-7-301-19676-2/G·3249

出版发行: 北京大学出版社 (北京市海淀区成府路 205 号 100871)

网 址: <http://www.pup.cn>

电子信箱: zyjy@pup.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62754934

出版部 62754962

印 刷 者: 山东省高唐印刷有限责任公司

经 销 者: 新华书店

787 毫米×1092 毫米 16 开本 12 印张 292 千字

2012 年 1 月第 1 版 2012 年 1 月第 1 次印刷

定 价: 28.00 元

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究

举报电话: (010) 62752024 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

前 言

数学好比一棵参天大树，它的根深深地扎在我们的现实世界中。这棵树是如此之古老，它已有上万年的历史；这棵树是如此之常青，它年年都在发新枝；这棵树是如此之繁茂，它已深入到自然科学与社会科学的一切领域；这棵树是如此之奇特，它同根异干，同干异枝，同枝异叶，同叶异花，同花异果……在数学这个庞大的花果园中处处充满着美的生机，绽放着美丽的花朵，数学的美处处可见。

数学美的表现形式是多种多样的。从数学的外在形象上观赏：她有体系之美、概念之美、公式之美；从数学的思维方式上分析：她有简洁之美、抽象之美、无限之美、类比之美；从美学原理上探讨：她有对称之美、奇异之美、和谐之美等。

素质教育的目的之一是培养学生认识美和创造美的能力，而用数学美的方法指导解题，学生从行之有效的数学方法和灵活巧妙的解题中感受和发现数学美，并通过优化自己的解题方法来创造和发现数学美，促使学生全面发展，有着非常重要的积极作用。数学教育中渗透审美教育可以提高教学质量，改变数学教育的现状。数学美可以感染学生，在美的熏陶中陶冶学生的情操，引起精神上的升华。数学美的内涵相当丰富，数学教育中，通过对数学美的揭示，加强数学审美教育，不仅可以使学生对数学产生一种积极的强烈的认知情绪，激发和增强学生的数学学习兴趣，而且也使学生的情感受到陶冶，意志得到锻炼，从而对学习动机起到强化作用。教师若善于导演精彩的数学教学活动，结合数学美的形象来打动学生的心灵，使学生在情感上产生共鸣，就会收到良好的思想教育的效果。数学教育中注重审美教育，有利于培养和谐发展的人，和谐性教育有利于促进学生身心全面发展，开发学生的智力，培养学生的能力；审美教育有利于促进学生逻辑思维与非逻辑思维的全面发展，如果教师根据学生的认知水平，有计划地培养学生从整体出发，根据数学的简洁美、和谐美、奇异美等特征，用猜测、跳跃的方式直接而迅速地找到答案，这对培养学生的创造性思维有重要的作用；数学审美教育也有利于学生非智力因素的开发。在教学中教师应充分利用数学中美的内容、形式、结构，运用美的教学手段，培养学生的数学审美能力，从而真正发挥数学美的作用。但数学美是一种内在的理性美，它隐藏在数字、符号、公式、图形之中，很难成为青少年学生的审美对象，他们虽然在数学学习中进行着类似于数学家一样的思维活动，却不能像数学家那样自觉地产生数学美感，所以需要教师在教学中注重数学美的欣赏，引导学生发现美、鉴赏美、创造美。

通过数学美育教育，学生会逐渐感受数学美，认识数学美，从而热爱数学，对数学产生浓厚的兴趣，这样教育学生学好数学将不是一件难事情。学生一旦对数学有了兴趣，他

们将主动积极地去学习，这种学习不仅仅停留在知识的表面（记公式、背定义定理、做作业），而是会深入到知识的深处，去研究数学的内涵，去发现数学的真谛。

笔者自幼喜爱数学。求学时，解题就不满足于仅仅得到答案，而是深入思考如何使得解题过程显得简洁、优美、和谐、对称，自己也在探索中深深感受到数学美的神奇，从而对数学产生极大的兴趣。笔者总是想用新颖的方法去解答一些题目，往往对一道题的奇特优美解法感到特别高兴，在数学世界中自娱自乐，欣赏数学中的美，这可能就决定我走上数学教学生涯。从师范院校数学系毕业后，走上讲台，不断收集有关数学美的理论资料，学习了不少有关专著和文章，如数学史、数学教育学、数学美学、数学发明与创造、数学教学艺术等方面的书籍，积累了许多相关资料。同时，在数学课堂教学中有意识地将数学美育教育渗透到数学课堂教学中去，让学生感受数学美，欣赏数学美。在此基础上，结合笔者二十多年的教学经验，想给学习数学的同学写点什么，让我的这点心得能给他们些许帮助。几经思考，就把书名定为《数学美育教育与数学发现》。笔者认为作为教师能使学生在某一方面有所提高、有所发现、有所创造，是一件值得高兴的事，这也是我们从事教育工作的根本目的。让学生感受数学的美，从而使学生热爱数学，这其中数学教师的作用相当重要，因此数学美育教育对教师的要求很高，教师若没有一定的美育素养，就难以开展数学美育教育，同样也达不到理想的教学效果。

数学美育教育与数学发现之间有着极大的因果关系。是因为数学的美吸引着人们去研究数学，从而对数学有所发现，有所创造。历史上许多伟大发现都是数学家追求数学美的结果。同时，要想培养出在数学上具有发明创造能力的下一代，就必须进行数学美育教育。

本书在编写过程中，参考了很多资料，借鉴了别人的一些成果，笔者在此深表感谢。限于水平与经验的不足，书中的错误和不足之处在所难免，恳请专家学者批评指正。

许晓根

二〇一一年三月于池州

前 言	1
第一章 数学美的概念及意义	1
第一节 数学美的产生和发展过程	1
第二节 数学美的概念	4
第三节 数学美学思想发展产生的作用	12
第四节 数学美的意义	14
第二章 数学美的客观存在性	20
第一节 数学美是客观世界的反映	20
第二节 黄金比	23
第三节 斐波那契数列	26
第四节 古今数学家、哲学家对数学美的看法	28
第五节 东西方部分国家、地区课程标准对数学美的要求与欣赏	30
第六节 数学美与艺术、自然的关系	32
第三章 数学美的特点	37
第一节 数学的内在美	37
第二节 数学的简明美	39
第三节 数学的统一美	50
第四节 数学的和谐美	60
第五节 数学的对称美	66
第六节 数学的奇异美	90
第四章 数学美育教育	106
第一节 数学审美教育的目的	106
第二节 数学美育教育的意义	106

第三节	数学审美教育的特征	109
第四节	数学美育教育的要求	110
第五节	开展数学审美教育的途径	114
第六节	数学美育教育实施的策略	118
第七节	数学美在计算机辅助教学中的应用	126
第五章	数学发现	128
第一节	数学的发现方法	129
第二节	历史上的几个重大数学发现	155
第三节	庞加莱论数学美与数学发现	163
第四节	非逻辑思维在数学发现中的作用	164
第五节	补美法	177
参考文献		182
后 记		185

第一章 数学美的概念及意义

世俗的观点往往认为数学是一门枯燥乏味的学科，似乎和艺术独享的美学方法毫不相干。事实上并非如此，古今中外杰出的数学家和科学家无不高度赞赏并应用了数学科学中的美学方法。德国诗人诺瓦利斯（Novalis, 1772—1801）说：“纯数学是一门科学，同时也是一门艺术。”数学园地处处开放着美丽的花朵，呈现着累累的果实，它是一片灿烂夺目的花果园，这片花果园正是按照美的规则、美的标准不断追求慢慢开垦出来的。数学历来以其概念的高度抽象性、逻辑的紧凑严密性和推理的严谨精确性为人们所推崇，殊不知其中更蕴涵着丰富的美学和哲学的文化底蕴，像三角函数中万能置换公式以及拟柱体体积公式的统一美，线性代数中的行列式及其数学运算的和谐简洁美，概率统计中全概率公式与贝叶斯公式的奇异美，蝴蝶定理、杨辉三角及二项式定理的对称美，皆洋溢在字里行间，跃然纸上。在解答数学题时，从解题的思维到解题的方法，从图形的构造到算式的演算都充分显示数学美的特征，给人一种统一、简洁、和谐、奇异、对称的美感，让人陶醉在这片美丽的花果园中，仿佛置身仙境，流连忘返。数学美育教育对人们理性思维与思辨能力的培养，智慧的启迪和潜在能动性与发展力的开发，都有着不可替代的作用，对数学解题方法的发现也有很大的启发性。

正是由于数学的美吸引着人们去学习它、探索它、发现它、完善它，才使它更加完美。在数学学科领域中出现许多独立分支，这些都是人们对数学美不断追求的结果。因此，对学生进行数学美育教育显得尤为重要，通过数学美育教育，学生认识数学美，感受数学美，理解数学美，欣赏数学美，从而对数学产生浓厚的兴趣，学好数学，应用数学，从中又发现数学美，创造数学美。

数学美体现在方方面面，只要我们能从应用数学审美的角度出发，审视问题结构的和谐性，追求问题解决方案的简单性、奇异性、新颖性，挖掘命题结论的统一性，就能带领学生进入数学美的王国，让学生得到美的体验。充满美的情绪，进行美的鉴赏和美的创造，陶冶学生的情操，让学生领略数学的魅力，产生热爱数学的情感，这对于诱发学生的求知欲，激发他们的学习兴趣，提高学习效率，培养创造性思维能力的效果是不言而喻的。

第一节 数学美的产生和发展过程

人类对数学美的探索和研究，紧随着人类早期数学的出现就开始了。数学美的产生和发展的历程，大致经历了朦胧、萌芽、发展三个时期。

一、数学美的朦胧时期

如果将数学按照一门有组织的和理性的独立学科的标准来衡量，那么在公元前 600 年到 300 年之间的古典希腊学者登场前是不复存在的。但在更早期的一些古代文明社会中，数学已有了开端和萌芽，我们称公元前 600 年以前的这个时期的数学为早期数学，而在人类的早期数学中，就已经伴随着一种朦胧而神秘之美了。

首先，这种美表现在原始人对数字的崇拜上。由于原始人受到识数能力的限制，所以“被神秘气氛包围着的数，差不多是不超过头十个数的范围。”因而在前十个数中，没有一个不具有神秘色彩，例如：“一”在整个人类文化中享有崇高的地位，我国古代把“一”称为太极或无极。“二”常常与“一”对立着，“一”是“天数”之首，“二”则是“地数”之首，若“一”是善、秩序、完美、幸福的象征，则“二”就是恶、混乱、缺陷、灾难的本原（其他几个数字也代表着各种神秘色彩，这里不再一一叙述）。

其次，翻开古代四大文明古国的历史，也可以看到这些文明古国的早期数学中所呈现出来的一种朦胧而神秘的数学美。例如我国的“八卦”展示出数学中的诸如“奇异美”、“对称美”、“反复美”、“对比美”等等；又如古埃及的几何学中计算金字塔体积的公式 $V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$ ，更是彰显数学美中不乏规律，一方面是因为它用具体数字写出时表达形式呈现出对称美，另一方面是在于它用简洁明了的方式揭示了棱锥体体积与高、边长之间关系的规律性，给人以简洁统一美的感受。

另外，在巴比伦和埃及，他们都认为数本身有神秘特性，并可以用于预见未来，对自然界和人类社会中的现象作神秘解释，这就是所谓的神数术。

综上所述，在早期数学时代，人类已经感受到一种朦胧而带神秘色彩的数学美了，在数学形式上，其主要表现已经呈现出以整齐、对称、均衡、比例为特征的形式美。

二、数学美的萌芽时期

从数学史的观点看，自公元前 600 年，古典希腊数学产生开始，至十五六世纪欧洲文艺复兴时期，希腊数学成绩的再现止，这个时期的数学是属于常量的、初等的数学范畴，我们称这一时期的数学为古典数学。在这个时期中，人们已经开始注意到数学与美学之间的关系，并对这种关系进行了有意识地探索与论述，促进了数学与美学关系的发展。所以这一时期，是数学美的萌芽时期。说它是数学美的萌芽时期，理由有二：其一，这一时期的数学美思想仍明显地带有朦胧时期那种神秘主义色彩。正如著名的毕达哥拉斯学派的菲洛罗斯（Philolaus，活跃于公元前 5 世纪后半叶）所说：“如果没有数和数的性质，世界上任何事物本身或其与别的事物的关系都不能为人所清楚了解……你不仅可以在鬼神的事务上，而且在人间的一切行动和音乐上看到数的力量。”又如，柏拉图（Plato，大约公元前 427—前 347）的“万物皆数”说认为神永远遵守几何规律，只有找到那永恒不变的数学定律，才是有价值的。再如，在中国“万物皆数”思想，数学知识来源于神的说法，也是流行而延续很长时间的。可见，无论是东方还是西方，在古典数学时期中，数学的美学因素，有形无形中仍与神学纠合在一起，蒙上了一层神秘的色彩。其二，这一时期的数学美的表现形式还是低层次的，外层次的，主要是表现数学理论、图形之中关系的定理和公

式所呈现出来的以均衡、对称、比例、和谐、多样统一等为特征的数学形式美以及数学语言美。对于数学内层次的，内在美（神秘美）虽有所论及，但为数极少亦尚肤浅，这些体现正说明古典数学时期的数学美还处于萌芽状态。

在数学发展的历史长河中，古希腊时期始终被认为是一个有重要意义的历史阶段。考察这个时期形成的数学美思想，对深入理解数学美的本质和展开深入的研究具有重要的价值。希腊文化的核心是关注人与自然，人与社会的和谐。希腊人在继承重视思辨、推崇理性的文化传统中成长，习惯于一种善于从哲学的高度去认识事物的习惯。因此，古希腊的数学家们，如毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前 572—前 497）、柏拉图、亚里士多德（Aristotle，公元前 384—前 322）等为建立抽象的优美形式打下了坚实的基础。他们不仅认识到数学中存在美，而且还描述了数学中的和谐、简单、明确和秩序的美的特征。希腊人认为数学不只是一种实用工具，更重要的是一种认识世界的理性思维方式，是一种解释世界的独特方式。这种从数学出发去探求真理的精神，最终形成了数学的理性精神，它是古希腊文化的精髓。

人们在这个时期初步总结了大自然数的本质规律，认识到各种数字和图形的比例和秩序关系，提出了抽象的点、线、面的概念，创立和发展了数学演绎体系，并将之综合归纳使之系统化从而作为一门科学学科来研究。

讨论古希腊数学家对数学美的研究，无疑要从被称为数学美鼻祖的毕达哥拉斯开始。在当时的时代条件下就认识到数学美的存在并揭示了数学美的重要特征，他为这个世界打开了数学美的大门。

毕达哥拉斯学派认为自然美的规律可以用数学的形式来描述，并提出了当时被看做真理的著名观点“万物皆数”，即万物都是合乎一定的比例和匀称的。正因为毕达哥拉斯学派把“数”当做万物的本原，世界都可归结为数与数的比例，所以“美就是由一定的数量关系构成的和谐，和谐美是数学美的主要特征”。^① 他们以发现勾股定理（毕达哥拉斯定理）闻名于世，并且希望用它去探索永恒的真理。

数学中的图形许多都是很规则的，符合对称美的特征，为此毕达哥拉斯曾断言：“一切立体图形中最美的是球形，一切平面图形中最美的是圆形。”^② 因为他们认为这样的图形可以被人的感觉器官所接受，使人产生美感。毕达哥拉斯学派对自然界中的美学现象作数学分析而概括出数学美丽的特征，说明了自然美与数学美有同一性，自然在一定程度上是按照数学美的形式存在的，数学美是自然美的客观反映。

公元前 330 年，欧几里得（Euclid，约公元前 330—前 275）在雅典诞生，他曾经是柏拉图的学生，后担任亚历山大大学数学教授，建立了以他为首的数学学派。他更是总结了前人研究成果，完成了著作《几何原本》，用公理化的方法建立了一座宏伟的几何学大厦。该书问世后，曾以手抄本的形式广泛流传了一千八百多年。印刷术出现以后，它又被翻译成全世界各种文字。我们在中学里所学的平面几何与立体几何知识的主要内容就是来源于两千年前的这本著作。欧几里得的空间和亚里士多德的时间构成了一个经久的范式，自它在两千年前被提出来以后，可以说一直没有改变。欧几里得的《几何原本》大概是人

① 吴开明. 数学美学. 北京教育出版社, 1993: 35.

② 刘云章, 马复. 数学的直觉与发现. 安徽教育出版社, 1990: 93.

类历史上读者数量仅次于《圣经》的著作。

这部伟大的著作的数学概念、数学推理法则构成的完整几何演义体系蕴涵着抽象美。欧几里得把地球和苍穹转化为一幅由错综复杂的图形所构成的庞大图案，又运用惊人的智慧把这个图案拆开，分解为简单的组成部分：点、线、面。

三、数学美的发展时期

17世纪在数学史上是很引人注目的，微积分的问世，宣告了变量数学、高等数学的产生，所以说17世纪是现代数学的开端。而17世纪以后直至现在，数学进入了变量数学、高等数学的范畴，我们称这一时期的数学为现代数学。在这个时期中经典数学达到了数学形态美的发展主体，进而向着内层次的数学结构美、数学逻辑美等内在美的方向发展。在这个时期中，发展变化的观点进入数学美学领域，数学美由一种静态美进入一种动态美的阶段，在这一时期的后期，发展尤为迅速。通过庞加莱（Poincaré, 1854—1912）、爱因斯坦（Einstein, 1879—1955）、海森堡（Heisenberg, 1901—1976）等的努力，数学美的研究已进入一个以探求数学的美学标准、数学的美学方法以及数学的真、善、美的关系问题的新阶段。进入20世纪以来，数学的美学思想更是经历着质的飞跃，对于传统的数学美学思想，又有诸多突破。这一切说明自17世纪以来的现代数学时期，也是数学美的发展时期。说它是数学美的发展时期，理由有三：第一，这一时期的数学美的表现形式已经是高层次的，内层次的，主要是数学理论的内部逻辑结构所呈现出来的神秘美（内在美）；第二，这一时期的数学家们已经形成独特的方法论思想，他们一方面致力于数学的美学方法的运用，一方面又在考虑数学方法的优美性；第三，这一时期，特别是20世纪以来，对于数学美学的审美标准有了较为一致的认识，并且对传统的数学美学思想也有了新的突破，不断丰富传统的数学美学思想。^①

第二节 数学美的概念

一、美的概念

德国的鲍姆嘉通（Baumgarten, 1714—1762）于1735年首次提出“美学”这一名词，1750年他正式以《美学》作为他专著的书名，他因此被誉为“美学之父”。随后的康德（Kant, 1724—1804）、黑格尔（Hegel, 1770—1831）等逐步建立了较严整的美学科学体系。

古希腊哲学家苏格拉底（Socrates, 公元前469—前399）认为：最有益的就是最美的。美是许多现象所固有的一个唯一的東西，具有最普遍的具体性，但同时美又是难以洞悉的。

古希腊哲人赫拉克利特（Heraclitus, 约公元前530—前470）认为：和谐不是禁止的平衡，而是运动着的活动状态。

毕达哥拉斯学派认为：和谐即美。

^① 温寿丰. 数学美学及其教学. 福建师范大学, 2003.

俄国文学家车尔尼雪夫斯基 (Chernyshevsky, 1828—1889) 认为: 美就是生活。^①

原子论者德谟克利特 (Demokritos, 约公元前 460—前 370) 认为: 生活需要有美的享受。

18 世纪法国启蒙主义者伏尔泰 (Voltaire, 1694—1778)、狄德罗 (Denis Diderot, 1713—1784) 等人认为: 美是大自然本身的自然属性。

古希腊哲学家恩培多克勒 (Empedocles, 公元前 492—前 432) 认为: 生物的进化与世界之美的完善, 与美、与和谐形成是等过程的。

德国哲学家黑格尔在《哲学史稿》中说: “美包含在体积和秩序中。”^② 他把美看作是精神的 (绝对观念的) 整个世界运动的阶段之一, 观念得到完善的、相同的表现形式, 这就是美。^③

我国伟大的思想家庄子 (约公元前 369—前 286) 说: “各美其美”。他认为没有公认的美的绝对标准。

英国著名的戏剧作家莎士比亚 (Shakespeare, 1564—1616) 说: “一千个美学家, 有一千个对美是什么的回答。”^④

因此, 人们提出了关于美的各种观念, 大致概括如下:

美是人类创造性实践活动的产物, 是文明的产物。

美是绝对观念在具体事物和现象中的表现和体现, 即客观论。

美是有意向的从主观上认识事物的结果, 即主观论。

美是生活的本质同作为美的尺度的人相比较的结果, 即主客观统一论。

美是自然现象的属性, 即客观社会论。

综上所述, 关于美, 我们可以得出, 首先, 美是社会性的, 是人类的, 只有人类才可能有美的体验。其次, 美必须是由人类创造出来的。第三, 美是与人类的感觉器官分不开的。

正如我国美学家朱光潜 (1897—1986) 所认为的: 美——是一个形容词, 它所形容的形象不是生来就是名词的“心”或“物”, 而是由动词变成名词的“表现”或“创造”。因此, 美是“心借物的形象来表现情趣”, “凡是美都是经过了心灵创造的”。^⑤ 由此可见, 美是一种具体、生动、有一定观赏价值的形象; 美也具有感染性, 具有能引起人们愉悦之情、喜爱之情的独特特质。至此, 我们可以给美下一个定义: 美的核心就是人的本质力量的对象化。^⑥

二、数学美的概念

《中国大百科全书——数学卷》对数学是这样定义的: 数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的, 简单地说是研究数和形的科学。而美更是客观事物的一种自然属性, 我

① 吴振奎, 吴旻. 数学中的美. 上海教育出版社, 2002: 3.

② 吴振奎, 吴旻. 数学中的美. 上海教育出版社, 2002: 3.

③ 吴振奎, 吴旻. 数学中的美. 上海教育出版社, 2002: 3.

④ 易南轩. 数学美拾趣. 科学出版社, 2004: 296.

⑤ 吴振奎, 吴旻. 数学中的美. 上海教育出版社, 2002.

⑥ 徐本顺, 殷启正. 数学中的美学方法. 江苏教育出版社, 1990: 19.

国著名数学家徐利治教授（1920— ）提出：“作为科学语言的数学，具有一般语言文学和艺术所共有的美的特点，即数学在其内容结构和方法上都具有自身的某种美，即数学美。”同时他说：“数学美的含义是丰富的，如数学概念的简单性、统一性，结构系统的协调性、对称性，数学命题与数学模型的概括性、典型性和普遍性，还有数学中的奇异性等，都是数学美的具体内容。”

数学美是客观真实的，哪里有数学哪里就有美的存在。数学美存在于数学对象中，是一种理性美、智慧美，具有最纯净的思辨特征，在理性的高层次上显示了创造的本质力量。数学的发展史告诉我们，数学是一门创造性的艺术，数学家创造了美好的数学概念、公式、定理等，他们又像艺术家一样思考、工作，像艺术家对待艺术一样对待数学，使数学不断完善。有一位科学家说：“感受到自然和人类的美，并用美丽的语言讴歌她，这就是诗歌；用美丽的色彩和形态去表现她，这就是绘画；而感受到存在于数与形的美，并以理智引导下的证明去表现她，这就是数学。”

数学美的起源遥远、历史悠久。古希腊哲学家毕达哥拉斯对数学有很深的造诣，早在公元前 5 世纪至 6 世纪就试图依据数和数的比例论述了美和美的形式，第一次提出“美是和谐与比例”的观点。他说：“美就是和谐，整个天体是一种和谐，宇宙的和谐是由数组成的，因而构成了整个宇宙的美。”亚里士多德说：“虽然数学没有明显地提到善和美，但善和美也不能和数学完全分离。因为美的主要形式就是‘秩序、匀称和确定性’，这些正是数学所研究的原则。”

古希腊数学家欧几里得早就提出了数学的演绎美和严谨美，他在《几何原本》中第一次系统地采用公理化方法，从公理与公设出发，用严密的演绎推导出一套完整的几何理论，可以说是数学著作的美学典范。

我国古代早期的算筹也是一种美丽的原始计算工具，用算筹表示数 1—9 有两种方式：纵式，横式。表示多位数时，摆法是纵横相间，个位为纵，十位为横，从右到左，这种方式体现了数学的整齐与和谐之美。

数学美随着近代数学的发展，受到这个时期的许多数学家的青睐，他们对数学美做过许多精彩的阐述。法国数学家拉普拉斯（Laplace, 1749—1827）对分析语言的优美的评述是：“没有另外一种语言是如此优美，而这些优美之处都是从一长串互相连接并全部出自于同一个基本概念的表达式中产生出的。”有些数学家认为：数学理论是诗，数学家应该具有诗人的气质。分析学之父维尔斯特拉斯（Weierstrass, 1815—1897）说过：“如果一个数学家不具备诗人的某种气质，他就永远休想成为一个大数学家。”法国数学家傅里叶（Fourier, 1768—1830）的级数理论本身就被称为“一部伟大的数学诗”。

进入 20 世纪以来的现代数学时期，许多数学家不仅承认数学美的存在而且还认为数学美感与数学审美能力是数学思维的驱动力，是数学创造性思维的一个重要组成部分。

英国著名数学家哈代（Hardy, 1840—1928）说：“数学家的选型与画家或诗人的选型一样，数学美概念也像色彩或语言一样，必须和谐一致。美是首要的标准，不美的数学在世界上是找不到永久容身之地的。”美国著名数学家，控制论创始人维纳（Wiener, 1894—1964）更直截了当地说：“数学实质上是艺术的一种。”

美国当代数学家 A. 波莱尔（Borel Armand, 1923— ）说：“我已经提到了数学作为艺术的概念，即概念构成的诗情画意这个概念，以此作为出发点就能断言：要能鉴赏数

学，要能欣赏数学，就需要对一个很特殊的思维世界里的种种概念在精神上的雅与美有一种独特的感受力。”

由此可见，古今中外许多数学家都非常重视数学美，并对数学美的内容、表现形式及重要性做出了许多精辟的论述。

庞加莱说：“数学家把重大意义与他们的方法和他们的结果的美联系起来。这不是纯粹的浅薄涉猎。事实上，在解题、证明中，给我们以美感的是什么呢？是各部分的和谐，是它们的对称、它们的巧妙平衡。总而言之，就是引入秩序，给出统一，容许我们同时清楚地观察和理解整体与细节的东西。”

英国哲学家、数学家罗素（Russel, 1872—1970）说：“数学，如果正确地看它，不但拥有真理，而且也具有至高的美，是一种冷而严肃的美。这种美不是投合我们天性脆弱的方面，这种美没有绘画或音乐那些华丽的装饰，她可以纯净到崇高的地步，能够达到只有最伟大的艺术才能谱写的那种完满的境地。一种真实的喜悦的精神，一种精神上的发扬，一种觉得高于人的意识（这些是至善的标准）能够在诗里得到，也的确能在数学里得到。”^① 这里肯定了数学美的存在性，同时指出了数学美的特征。

“数学美并不是人为的，或者说不是唯美的，而是因为数学本身具有的客观性所决定的，它是美的载体。从这个意义来说，数学美的内容是实在的，而这种实在不是物理世界的实在，它是像音乐、美术、文学作品所具有的那种实在。”“是在逻辑的真假判断与实践的价值判断的统一中追求美。”^② 数学就是这样一门“既美而又真”的科学。

在我们学习数学时，每当看到一个优美的图形，悟出一个出色的数学公式，巧妙地解答一道难题时，心中充满了一种成功的喜悦，不也为这些图形、算式、方法感到愉悦，心中充满一种美感吗？例如，一个按升（降）幂排列的多项式与杂乱无章排列的多项式相比，前者就像一列前进中的士兵整齐雄壮，秩序井然，给人以简洁、整齐、统一的美感，后者就像吃了败仗的部队，一片混乱。可以这样说：数学美蕴藏于数学概念、符号、公式、图形、定理、推理、思维、方法……之中，是以思维为旋律，用数学术语、符号、公式、图形和方法谱成的一曲悠扬动听的乐曲，而且这支乐曲经久不衰，越唱越靓。

关于“数学美”，历史上许多学者、数学家对数学美从不同侧面作过生动的阐述。

维纳说：“数学实质上是艺术的一种”。

德国著名数学家高斯（Gauss, 1777—1855）说：“去寻求一种最美和最简单的证明，乃是吸引我去研究的动力。”

亚里士多德认为：数学能促进人们对美的特征：数值、比例、秩序等的认识。

英国数学家麦克斯韦（Maxwell, 1831—1879）这样描绘数学美：“我总是把数学看做是获得事物的最佳形态和维度的方法。这不仅是指最实用的和最经济的，更主要是指最和谐的和最美的。”

庞加莱则说：“数学的优美感，不过是问题的解答适合我们心灵需要而产生的一种满足感。”“数学美抽象，含蓄，最难感受。要求欣赏者具有一定的数学理论高度作基础，才能从自然界隐藏的内在和谐豁然开朗的感觉中体会到数学美。”

① 罗素·我的哲学的发展·商务印书馆，1996：194。

② 代钦·儒家思想与中国传统数学·商务印书馆，2003：195。

徐利治教授认为：“数学在其内容结构上和方法上都具有其自身的某种美。”“数学美可以说是带一定主观感情色彩的精致的直觉还与数学家个人的思想文化修养及艺术鉴赏能力有关，涉及较复杂的文化背景。并不是每个理解和使用数学直觉的人，都自觉地从美学角度考虑问题。一般说来，强调数学美的人，往往是那些同时有多方面爱好，兴趣和才能的，特别是在哲学和艺术上有较高造诣的大数学家。”

有人称 19 世纪的数学是“革命的数学”，数学美学思想在这一时期也极为活跃，拉普拉斯、高斯、哈密尔顿、黎曼（Riemann, 1826—1866）等人在这方面都作出了杰出的贡献。

20 世纪，数学家们开始自觉地运用数学美学方法，总结数学审美标准，探讨数学发明中的审美心理，其突出代表人物是 19 世纪末及 20 世纪初的庞加莱及被誉为“超人的天才”的冯·诺依曼（Neumann, 1903—1957），还有研究数学领域中的发明心理学的法国著名数学家阿达玛（Hadamard, 1865—1963）。

马克思主义认为，人类物质生产活动是一切历史现象、一切现实生活的最终来源，也是数学美的最原始的根源。它主张从人类物质生产活动出发去考察社会历史现象，考察美的根源。它认为，美的根源不在自然物质属性，不在主观心理，也不在主观心理与客观事物的统一，而在于人类物质生产活动对自然界的征服改造之中。数学研究的对象是现实世界空间形式及其数量的关系。人们是在长期的物质生产活动中逐渐发现了现实世界的规律的，而数学则是对这些客观规律描述的普遍形式，是对自然程序性、规律性的某种简单明洁的呈现。主体正是通过生产实践活动发现了数学，把需要、目的同反映客观规律的数学通过发现过程（生产实践）结合、统一起来，从而使之达到合目的性与合规律性相统一的自由形式，从而也就在这种活动中产生了美的萌芽。这就表明数学美首先存在于改造自然的生产实践过程之中。以后随着实践活动的不断深入和发展，原来以过程、动态存在的美，转化为结果、静态的美（数学知识）。例如，人们在征服尼罗河泛滥与土地测量中产生了几何学，因而几何学的美直接产生于人类征服自然和改造自然的实践活动过程。随着后来实践的发展，几何学的美就逐渐消融于几何知识之中，以几何知识的形态存在和继承下来。应该说数学美是数学创造的自由形式。由于自由的形式首先是实践中人的本质力量，最后才表现为实践产品的外观形式规律，这就可能使一些人认为数学美的本质在于数学的外观形式规律，如简洁、对称、和谐、统一、奇异等形式，这样的形式往往能引起人的快感，才产生数学美，这就掩盖了数学美的本质。存在这样肤浅的认识，当然会对数学美的本质是数学创造达到的合目的性与合规律性的统一这一结论感到茫然。应该想到，假如没有大量感性经验作基础，数学公式 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 也就失去了美的意义。也就是说，数学创造的自由形式，首先是主体的数学创造的力量，然后才表现在对象的外观形式规律。因此，数学美首先存在于主体数学实践合目的性与合规律性相统一的活动中，其次才存在于主体数学实践的结果之中。^① 维纳说过：“数学的伟大使命在于混沌之中发现秩序。”

马克思（Marx, 1818—1883）在《1844 年经济学——哲学手稿》中提出“劳动创造

^① 张雄·数学美的根源、本质和特征·陕西师大学报（哲学社会科学版），1991：1，20，47—50。

了美。”“人也按照美的规律来塑造物体。”^① 这就意味着数学美诞生于实践，数学是客观世界的反映，自然界、人类社会的和谐统一等固有规律，反映到数学中就成为数学美。数学美属于科学美，是数学美学的研究对象。数学美是自然界和人类社会本身的“和谐”在数学理论上的反映和显现，是在人类求“真”过程和求“真”的理论成果中含蓄地表现出来的。数学美学是数学和美学结合而成的一门新兴综合性学科。它的产生适应了自然科学奔向社会科学的历史潮流，充分体现了当代科学一方面继续分化，另一方面又高度综合的特点。科学家越来越倾向于把美的规律自觉地用到科学的探索之中，因为发达的艺术思维和数学美感使数学家多了一个能全方位思考问题的大脑，为原先狭小的思考方式提供了大量的参照数据。

数学美体现了自然界、人类社会的内在美。数学美必须以数学的真为前提，它不是被感官直接感知的，而是在对自然界、人类社会隐蔽的内在和谐进行深入细致而独到的观察、研究之后才能体验到的。数学理论的根源是人类的物质生产实践，这是众所周知的。另一方面，数学美是以数学理论的善为前提的。因此，数学美与其他领域中的（科学）美有着最终一致的来源。马克思主义认为，人类物质生产活动是一切历史现象、一切现实生活的最终根源，显然也是数学美的本源。它主张从人类物质生产活动出发考察社会历史现象，考察美的根源。因此，数学美的根源不在自然物质属性，也不在主观心理，而在于人类物质生产活动对自然界的征服改造之中。

具体说来，数学美的本质就是数学关系结构系统与作为审美主体的人的意向的融合，即：数学的内在结构和方法上所呈现出来的某种美，以及它使人产生的愉悦、兴奋等情感的体会，二者必然融合为一个新的范畴，这个新的范畴，就是数学美。

由于每个人的实践活动不一样，对数学美的鉴赏力也不一样。正如我国古代著名学者王充说：“涉浅水者见虾，其颇深者见鱼鳖，其尤甚者观蛟龙，足行迹殊。故所见之物异也。”一个人能不能领悟数学美，很大程度上取决于他的数学素养。

著名物理学家英费尔德（L. Infeld, 1898—1968）指出：“当你领悟一个出色公式时，你得到同听巴哈的乐曲一样的感情，在这两种感觉之间没有任何区别，除去如下一点：要从数学得到满足，比起爱好音乐者的欣赏来，必须受到更多的训练。”换句话说，要领悟数学美，必须以熟悉数学内容为基础，理解基本概念、公式、符号和逻辑等等为前提，否则，将无法领悟数学美，欣赏数学美。值得一提的是，即使有一定数学素养的人也不一定完全领悟到数学美，体验到数学的魅力。

香港旅美数学家、菲尔兹奖获得者丘成桐（1949— ）说：“数学家找寻美的境界，讲求简单的定律，解决实际问题，而这些因素都永远不会远离世界。”

我国现代著名数学家徐利治教授提出：“所谓数学美的含义是丰富的，如数学概念的简单性、统一性，结构系统的协调性、对称性，数学命题与数学模型的概括性、典型性和普遍性，还有数学中的奇异性等，都是数学美的具体内容。”徐利治指出了数学美的具体含义。

其实，数学美并非“阳春白雪，曲高和寡”。我们时常也会感悟到数学中的美，如探索出一个出色的数学公式，巧妙的解答出一道数学难题，运用数学知识解决实际生活中的

^① 马克思恩格斯全集·42：99—97。

问题等等。此时，我们心中不也为数学之美而感到喜悦吗？不也体会到一种成就感吗？我们在学习数学时，当看到一个优美对称的图形，一个代数轮换对称式，一个对称行列式，不也为这些图形和算式的对称协调而赏心悦目，充满一种美感吗？

杨振宁（1922— ）曾经说过，任何领域都有美存在，只要你能用心挖掘到它的美，你就有可能攀登科学的顶峰。作为科学的语言数学，具有一般语言文学与艺术所共有的美的特点，这就是数学在其内容结构与方法上都具有某种美，即数学美。数学美是科学美的一种，但数学美又有其独特的个性，数学美是具体、形象、生动的。

认真研究上述看法，从美学与数学角度进行总结，可以这么说，数学美是数学科学的本质力量的感性与理性的显现，是一种人的本质力量通过宜人的数学思维结构的呈现。它是一种真实的美，是反映客观世界并积极地改造客观世界的科学美，是科学美的核心。数学美不仅有表现的形式美，而且有内容美与严谨美；不仅有具体的公式、定理美，而且有结构美与整体美；不仅有语言精练美，而且有方法美与思路美；不仅有逻辑抽象美，而且有创造美（补美）与应用美。

数学之美，可以从更多的角度去审视，而每一侧面的美都不是孤立的，她们是相辅相成、密不可分的。她需要人们用心、用智慧深层次地去挖掘，更好地体会她的美学价值和她丰富、深邃的内涵和思想，及其对人类思维的深刻影响。如果在数学学习过程中，我们能像数学家们一样努力探索、发现数学，从中获得成功的喜悦和美的享受，那么我们就会不断深入其中，遨游于数学知识的海洋，欣赏和创造数学美。

综上所述，数学美起源于人类基本的实践活动，并逐步上升到理性高度，而且数学美从低级向高级不断地发展着。数学美涉及内容与形式、感性与理性、主体与客体、规律与目的、真与善、必然与自由等诸方面。并且数学美是和人的创造活动紧密联系在一起，它既是数学创造的目的，又是数学创造的动力。由此，可以说数学美是人的本性的展现。

三、数学美的体现

数学美的客观性：即指客观存在于数学领域中的审美对象是不以审美主体是否承认、是否意识到为转移的，尽管因审美主体的主观条件的不同，并不是所有的或特定的数学美都能为审美主体所感知，但这并不能改变数学美的存在。例如，一道计算题有其简单的解法，解题者的解法有繁有简，但不论解题者能否找到简单的解法，这种简单的解法总是存在的。

数学美的社会性：数学美是一种社会现象，因为数学美是对人而言的。数学家通过数学实践活动（特别是数学理论创造的实践活动），使自己的本质力量“对象化”了，或者说“自然人化”了。所谓的“人化”就是人格化，即自然物具有人的本质的印记，实质上就是社会化。这种社会化的内容正是数学美的内容，它是数学美产生的本原。

数学美的物质性：数学美的内容——人的本质力量必须通过某种形式呈现出来，必须要有附体，数学美的这种形式或附体，即数学美的物质属性。

数学美的宜人性：即数学美的形式应该使审美主体感到愉悦。审美主体的愉悦性，一方面自然是由审美主体的心理和生理的原因造成的，另一方面，也是最根本的，还在于对象本身是具有足以引起主体愉悦的属性和条件。简言之，数学美的形式必须与人的认识、人类心灵深处的渴望的本质相吻合。