高等学校试用教材

常微分方程

东北师范大学数学系
微分方程教研室编

人民教育出版社

本书是编者在原有常微分方程讲义基础上，按照现行教学大纲的要求编写成的．在丁同仁、蔡燧林、庄万三位同志主持的评审会上对原稿提出了具体修改意见，修改后又经蔡燧林、庄万二同志审阅．

本书可作为高等师范院校数学系的试用教材，也可作为师范专科学校数学专业（三年制）的试用教材。

高等学校试用教材

常微分方程

东北师范大学数学系微分方程教研室编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 11.5　字数 272,000

1982年10月第1版　1983年3月第1次印刷

印数 00,001—20,000

书号 13012·0796　　定价 1.10 元

前　　言

这本书是在我系《常微分方程》讲义的基础上写成的．先后参加编写工作的有史希福、杨思讱、任永泰、陈秀东等同志以及我本人．最后由我进行了修订与编纂的工作．本书的习题则主要是由陈秀东、马淑媛与潘家齐等同志选配的．

本书内容除个别地方外，基本上是符合高等师范院校《常微分方程》教学大纲的．由于考虑到变分思想在近代数学中的重要性，而高师院校又一般不开设《变分法》课程，因此我们编了《变分法大意》做为附录．我们觉得，这对于学习泛函分析也是有一定益处的．

我们感谢参加1981年4月高等师范院校《常微分方程》评选会的专家们对我们所提出的宝贵意见，感谢北京大学丁同仁同志对我们教材所进行的详细分析与热情的帮助．我们根据他们的意见对某些内容进行了较大的修改．值得特别提到的是，浙江大学蔡燧林同志及山东师范大学庄万同志对我们的修改稿又再次进行了认真详细的审查，对此，我们也深表谢意．

但是，由于我们水平有限，这本书一定会有很多缺点与错误，请使用的老师及同学们提出批评意见．我们一定虚心接受，以便今后修改，提高质量．

东北师范大学数学系

黄启昌

一九八二年五月于长春市

目　录

第一章　初等积分法

§1.1　微分方程与解

1°　为了说明什么是微分方程，先复习一下关于方程的一些基本概念.

所谓**方程**，是指那些含有未知量的等式，它表达了未知量所必须满足的某种条件. 方程的类型是繁多的，其分类的主要依据就是对未知量所施加的数学运算.

例如，在方程

$$x^3-2x+1=0,$$

$$\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x}=1,$$

$$\frac{3}{x+1}-\frac{x-1}{x}=2$$

中，对未知数 x 所施加的是代数运算，因此它们都是**代数方程**.

在方程

$$\sin x+\cos x=1;$$

$$e^x=x^2+2x-1$$

中，出现了未知量 x 的超越函数，因此它们是**超越方程**.

微分方程与上述方程不同，它的未知量是**未知函数**，而施加于未知函数的运算则是**导数**或**微分**运算. 一般说来，微分方程就是联系自变量、未知函数以及未知函数的某些导数(或微分)之间的关系式.

下列方程都是微分方程:

$y'=xy$(x 为自变量，y 为未知函数)；

$(t^2+x)dt+xdx=0$(t, x 哪一个为自变量任意)；

$$y''+2y'-3y=e^x\ (x\text{ 为自变量，}y\text{ 为未知函数})；$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x+y(x,y\text{ 为自变量，}z\text{ 为未知函数})；$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0(x,y,z\text{ 为自变量，}u\text{ 为未知函数}).$$

微分方程包括**常微分方程与偏微分方程**．常微分方程中的未知函数都是一元函数，未知函数的导数自然就是对仅有的自变量的导数．如上列方程中的前三个就是常微分方程．偏微分方程中的未知函数是多元函数，方程中要出现未知函数的偏导数．如上列方程中的后两个方程是偏微分方程．

本书主要讨论常微分方程．对偏微分方程，只介绍其中与常微分方程有密切联系的个别类型．

常微分方程有着深刻而生动的实际背景，它从生产实践与科学技术中产生，而又成为现代科学技术中分析问题与解决问题的一个强有力的工具．例如，在求某些变量之间的函数关系时，往往不能直接找到这些函数关系，但有时却易于建立这些变量所满足的微分方程，如果这些方程可求解，就可求得所求的函数关系了，下面介绍几个例子．

例 1． 镭的裂变．

镭是一种放射性物质．它的原子时刻都向外放射出氦原子以及其它射线，从而原子量减少，变成其它的物质（如铅）．这样，一定质量的镭，随着时间的变化，它的质量就会减少．已发现其裂变速度(即单位时间裂变的质量)与它的存余量成正比．设已知某块镭的质量在时刻 $t=t_0$，为 R_0，试确定这块镭在时刻 t 的质量 R.

解．时刻 t 时镭的存余量 R 是 t 的函数．由于 R 将随时间而减少，故镭的裂变速度 $\frac{dR}{dt}$ 应为负值．于是，按照裂变规律，可列

出方程

$$\frac{dR}{dt}=-kR, \tag{1.1}$$

其中 k 为一正的比例常数.

(1.1) 是一个关于未知函数 R 的常微分方程. 上述问题就是要由(1.1)求出未知函数 $R=R(t)$来. 为此, 将(1.1)变形为

$$\frac{dR}{R}=-kdt,$$

然后两端积分, 得到

$$\ln R=-kt+C_0 \qquad (C_0\text{ 为一积分常数}),$$

或者

$$R=Ce^{-kt} \qquad (C=e^{C_0}).$$

由于已知在时刻 $t=t_0$ 时 $R=R_0$, 代入上式就有 $R_0=Ce^{-kt_0}$ 或者 $C=R_0e^{kt_0}$. 于是, 在时刻 t, 镭的质量为

$$R=R_0e^{-k(t-t_0)}.$$

不仅镭的质量满足这个规律, 其它的放射性物质也都满足这个规律. 不同的是, 各种放射性物质具有各自的系数 k. 这个关系式是放射性物质的一个很基本的性质, 它能说明很多问题, 例如, 从这个关系式出发, 可以利用放射性物质来测定某种物体的绝对年龄.

例 2. 受到空气阻力的自由落体.

设质量为 m 的物体, 在时间 $t=0$ 时自由下落, 在空气中受到的阻力与物体的下落速度成正比, 求物体下落距离与时间的关系.

如图 1.1 建立坐标系. 设 x 为物体下落的距离. 于是物体下落的速度为

$$v=\frac{dx}{dt},$$

加速度为

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

根据牛顿第二定律 $F=ma$，可以列出方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt}+mg, \tag{1.2}$$

其中 k 为一正比例常数，右端第一项的负号表示阻力与速度$\frac{dx}{dt}$的方向相反.

于是，问题归结为求满足上述方程的未知函数 $x(t)$ 的问题.

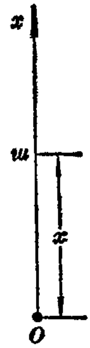

图 1.1

我们现在只考虑 $k=0$ 的情形，也就是说物体是在真空中下落，没有阻力．这时，(1.2)变成

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g.$$

为了求出物体下落的距离，将上式积分两次，得到

$$\frac{dx}{dt}=gt+C_1,$$

$$x=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2,$$

其中 C_1 及 C_2 为两个常数．考虑自由下落物体的初始状态．由于选取物体的初始位置为坐标原点，故有 $x(0)=0$；又由于物体为自由下落，即初始速度 $v_0=x'(0)=0$．将这两个条件代入上述二式，可确定 C_1, C_2 分别为

$$C_1=0, \qquad C_2=0.$$

于是，自由下落物体的距离公式为

$$x=\frac{1}{2}gt^2.$$

例 3. 单摆.

图 1.2 为一单摆，上端固定在 O 点，M 为一质量为 m 的质点，

摆杆 OM 之长为 l，质量可以忽略，单摆的平衡位置为铅垂线 OO'。现将质点 M 拉离 OO' 一个角度 θ_0，然后松开任其自由运动. 试求摆杆 OM 和铅垂线 OO' 的夹角 θ 与时间 t 的关系.

将重力 mg 分解为径向力 F 与切向力 T. T 的大小为 $mg\sin\theta$. M 的切向加速度为 $a=l\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$. 于是，由牛顿第二定理可列出方程

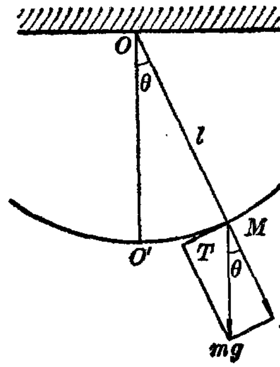

图 1.2

$$ma=ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta \text{ 或 } \frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta. \tag{1.3}$$

如令初始时刻为 $t=0$，摆杆的初始位置为 θ_0，初始角速度为 0. 从而，上述问题就归结为求满足方程(1.3)以及条件 $\theta(0)=\theta_0$, $\theta'(0)=0$ 的函数 $\theta=\theta(t)$的问题了.

从以上三个例子中我们看到，由实际问题中提出来的常微分方程是各式各样的. 以后我们还会看到，各种类型的微分方程都有其自己的特点. 常微分方程分类的一个基本的依据是在其中所出现的**未知函数的导数的最高阶数**，我们把它称为**微分方程的阶**. 例如，方程(1.1)是一阶方程，(1.2)与(1.3)是二阶方程. 以后我们还会看到更高阶的方程.

一阶常微分方程的一般形式可以表为

$$F(x,y,y')=0, \tag{1.4}$$

如果(1.4)式能对 y' 解出，则得到方程

$$y'=f(x,y), \tag{1.5}$$

或

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \tag{1.6}$$

(1.4) 称为**一阶隐方程**. (1.5)称为**一阶显方程**. (1.6)称为**微分形式**的一阶方程.

方程(1.1)是一阶显方程.

方程

$$xdx+ydy=0$$

及

$$(t^2+x)dt+xdx=0$$

都是微分形式的一阶方程.

n **阶显式方程**的一般形式记为

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),\tag{1.7}$$

n 阶隐式方程的一般形式记为

$$F(x,y,y',\cdots\cdots,y^{(n)})=0.\tag{1.8}$$

2° 代数方程与超越方程的主要问题之一是求方程的根. 所谓方程

$$f(x)=0$$

的根 x_0 是指这样的数,在方程中令 $x=x_0$ 时,等式

$$f(x_0)=0$$

成立.

与此相类似, 微分方程的主要问题之一是求方程的**解**. 一般地说,微分方程的解就是满足方程的函数,可定义如下.

定义 1.1. 设函数 $y=y(x)$在$[a,b]$上有定义, 且存在 n 阶导数,如果把 $y=y(x)$代入方程

$$F(x,y,y'\cdots\cdots,y^{(n)})=0,\tag{1.8}$$

得到在区间$[a,b]$上的恒等式

$$F(x,y(x),y'(x),\cdots\cdots,y^{(n)}(x))\equiv0,$$

则称 $y=y(x)$为方程(1.8)在$[a,b]$上的一个解.

这个定义是就(1.8)在闭区间$[a,b]$上叙述的, 对于其它形式

的方程或区间，也可以相应地叙述，在此不重复了。

易于验证函数

$$y=x^2+C \qquad (C\text{ 为任意常数})$$

为微分方程

$$y'=2x$$

在$(-\infty,+\infty)$上的解。

函数

$$y=e^x+C_1x+C_2 \qquad (C_1, C_2\text{ 为任意常数})$$

为微分方程

$$y''=e^x$$

在$(-\infty,+\infty)$上的解。

例 4. 试验证：当 $c>0$ 时，函数 $y=\frac{c}{2}x^2-\frac{1}{2c}$为方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

在$(0,+\infty)$上的解；而当 $c<0$ 时，该函数为上述方程在$(-\infty,0)$上的解.

解. 将所给函数代入方程左端得

$$y'=cx.$$

代入右端得

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\left(\frac{c}{2}x-\frac{1}{2cx}\right)+\sqrt{1+\left(\frac{c}{2}x-\frac{1}{2cx}\right)^2}$$

$$=\frac{c^2x^2-1}{2cx}+\frac{c^2x^2+1}{2|cx|}.$$

当 $cx>0$ 时，两端恒等. 当 $cx<0$ 时，两端不恒等. 所以，当 $c>0$ 时，所设函数为方程在$(0,+\infty)$上的解；而当 $c<0$ 时，所设函数为方程在$(-\infty,0)$上的解。

例 5. 验证函数

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x \qquad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数})$$

为方程

$$y''+y=0$$

在$(-\infty, +\infty)$上的解.

解. 事实上,在$(-\infty, +\infty)$上有

$$y''=-(C_1\cos x+C_2\sin x),$$

所以在$(-\infty, +\infty)$上有

$$y''+y\equiv 0,$$

从而所设函数为方程的解.

为了便于研究方程的解的性质,我们常常考虑解的图象,并且称之为微分方程的**积分曲线**. 以后,为了叙述简便,我们对解和积分曲线这两个名词在很多情形都不加以区别.

我们在例1到例3中已经看到,实际问题往往要求微分方程的满足所谓"**初始条件**"的解. 如例1中的$t=t_0$时$R=R_0$,例2中的$x(0)=0, x'(0)=0$,例3中的$\theta(0)=\theta_0$,$\theta'(0)=0$就是初始条件.

一阶方程(1.5)及(1.6)的初始条件为

$$y(x_0)=y_0.$$

求微分方程的满足初始条件的解的问题称为**初值问题**. 方程(1.5)的初值问题常记为

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0.\end{cases} \tag{1.9}$$

初值问题也常称为**柯希(Cauchy)问题**. 初值问题(1.9)的几何意义是在xOy平面上求经过点(x_0, y_0)的积分曲线.

例6. 求解初值问题

$$\begin{cases}y'=2x,\\ y(1)=4.\end{cases}$$

解．前面已知函数 $y=x^2+C$（C 为任意常数）是解．为了这函数能满足初始条件 $y(1)=4$，只须将它代入 $y=x^2+C$，即有 $C=3$，于是，$y=x^2+3$ 为所求初值问题的解．

n 阶方程(1.7)的初始条件为

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y'_0,\ \cdots\cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

从前面的讨论中，还可以看到一个重要的事实，就是微分方程存在含有任意常数的解．而且，我们也看到，解中任意常数的个数可以多到与方程的阶数相等．我们把 n 阶常微分方程的含有 n 个任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的解 $y=\varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 称为该方程的**通解**．

例如，$y=Ce^x$ 为一阶方程 $y'=y$ 的通解；$y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 为二阶方程 $y''+y=0$ 的通解．

如果已求得某微分方程的通解，而欲求满足某个初始条件的特解，往往可以用初始条件去确定通解中的任意常数而得到．

对于一阶方程而言，设已知通解为 $y=\varphi(x, C)$．欲求满足初始条件

$$y(x_0)=y_0$$

的特解．为了确定 $y=\varphi(x, C)$ 中的 C，将 $y(x_0)=y_0$ 代入，得到方程

$$y_0=\varphi(x_0, C).$$

这个方程一般可以确定出 C 来，设为 C_0，代入通解，即得满足初始条件的解 $y=\varphi(x, C_0)$．

但对于 n 阶方程，因为它的通解中有 n 个任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$，所以，为了确定它们，就必须有下列初始条件：

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

代入通解 $y=\varphi(x, C_1, C_2\cdots\cdots, C_n)$ 后，得到 n 个方程式

$$
\begin{cases}
y_0=\varphi(x_0, C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n), \\
y'_0=\varphi'(x_0, C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_0^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n).
\end{cases}
$$

一般说来，可以解出 $C_1^0, C_2^0, \cdots, C_n^0$，代回通解，即得所求初值问题的特解

$$y=\varphi(x, C_1^0, C_2^0, \cdots, C_n^0).$$

例 7. 求方程

$$y''+y=0$$

的满足 $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$，$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$ 的解。

解. 方程通解为

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x.$$

求导数后得

$$y'=C_1\cos x-C_2\sin x.$$

将初始条件代入，得到方程组

$$
\begin{cases}
\frac{\sqrt{2}}{2}C_1+\frac{\sqrt{2}}{2}C_2=1 \\
\frac{\sqrt{2}}{2}C_1-\frac{\sqrt{2}}{2}C_2=-1
\end{cases}
$$

解出 C_1 与 C_2 得

$$C_1=0, \quad C_2=\sqrt{2}.$$

故所求特解为

$$y=\sqrt{2}\cos x.$$

这一节主要是介绍常微分方程的一些最基本的概念，本章其余的几节将要讨论某些具体类型的常微分方程的**初等解法**. 初等解法也称为**初等积分法**. 其所以称为初等积分法，是因为这样解法最后都把求解的问题化成求积分，并将方程的通解用初等函数

或它的积分表达出来. 凡是能做到这一点的常微分方程，称为**可积的方程**. 下面几节就是介绍某些可积方程的解法. 这些内容虽然简单，但都是常微分方程求解的基本方法，而且在实际中它们还有广泛的应用.

习　　题

1. 指出下列微分方程的阶数:

1) $\frac{dy}{dx}=y^2+x^3$;　　2) $\frac{d^2y}{dx^2}=x+\sin x$;

3) $y^3\frac{d^2y}{dx^2}+1=0$;　　4) $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=4$;

5) $\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}=0$.

2. 验证给出的函数是否为相应微分方程的解

1) $5\frac{dy}{dx}=3x^2+5x$,　　$y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{2}+c$.

2) $\frac{dy}{dx}=p(x)y$, $p(x)$连续,　　$y=ce^{\int p(x)dx}$

3) $(x+y)dx+xdy=0$　　$y=\frac{c^2-x^2}{2x}$.

4) $y''=x^2+y^2$,　　$y=\frac{1}{x}$.

§1.2　变量可分离方程

1° 本节我们要介绍一类最简单的一阶方程，即**变量可分离方程**

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y), \tag{1.10}$$

的解法. 我们总假设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$\varphi(y)$在$[c,d]$上连续.

先讨论 $\varphi(y)\neq 0$ 的情形.

我们先进行分析. 设 $y(x)$ 为(1.10)在 $[a,b]$ 上的任意一个

解. 根据解的定义，应有恒等式

$$\frac{dy(x)}{dx}\equiv f(x)\varphi(y(x)),\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

因为 $\varphi(y)\neq 0$，于是有

$$\frac{dy(x)}{\varphi(y(x))}\equiv f(x)dx,\qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

设 $y(x_0)=y_0$，$a<x_0<b$，$c<y_0<d$，将上式两端积分，得到恒等式

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dy(x)}{\varphi(y(x))}\equiv\int_{x_0}^{x}f(x)dx,\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

于是可知(1.10)的任意一个解 $y=y(x)$，必须满足方程

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\varphi(y)}=\int_{x_0}^{x}f(x)dx \tag{1.11}$$

记

$$\Phi(y)=\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\varphi(y)},\quad F(x)=\int_{x_0}^{x}f(x)dx,$$

(1.11)就可以写成方程

$$\Phi(y)=F(x). \tag{1.11$'$}$$

下面来证明：在所设条件下，方程(1.11)$'$(即(1.11))存在隐函数 $y=y(x)$，满足 $y(x_0)=y_0$，且它是微分方程(1.10)的解.

事实上，由于 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$\varphi(y)$在$[c,d]$上连续，$\Phi(y_0)=F(x_0)$，以及 $\Phi'(y)=\dfrac{1}{\varphi(y)}\neq 0$，故(1.11)$'$满足隐函数存在定理的全部条件. 所以，(1.11)$'$存在唯一的隐函数 $y=y(x)$，满足 $y(x_0)=y_0$，且连续可微. 在 x_0 的邻域上我们有

$$\Phi(y(x))\equiv F(x),$$

即

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dy(x)}{\varphi(y(x))}\equiv\int_{x_0}^{x}f(x)dx.$$

两端对 x 求导数，仍应恒等，即

$$\frac{y'(x)}{\varphi(y(x))}\equiv f(x),$$