HIT

数论经典著作系列

The Method of Trigonometrical Sum

三角和方法

[俄] И·М·维诺格拉多夫 著　越民义 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

三角和方法

The Method of Trigonometrical Sum

[俄] И·М·维诺格拉多夫 著

越民义 译

大家書系

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

全书共分 11 章:第 1 章一般性的引理;第 2 章奇异级数的研究;第 3 章一个定积分的研究;第 4 章华林问题中 $G(n)$ 的估值;第 5 章利用整多项式值的分数部分所作的近逼;第 6 章外尔和数的估值;第 7 章华林问题中的渐近公式;第 8 章整多项式值的分数部分的分布;第 9 章以素数为求和变数的最简单三角和数的估值;第 10 章哥德巴赫问题;第 11 章函数 αp 所取的值底分数部分之分布。

本书适合于高等院校师生、数论爱好者及数学史研究人员。

图书在版编目(CIP)数据

三角和方法/(俄罗斯)维诺格拉多夫著;越民义译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.3

ISBN 978-7-5603-3193-5

Ⅰ.①三… Ⅱ.①维… ②越… Ⅲ.①指数和 Ⅳ.O156.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 018170 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 李广鑫
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 7.75 字数 134 千字
版　　次 2011 年 3 月第 1 版 2011 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3193-5
印　　数 1~3 000 册
定　　价 18.00 元

记　号

θ 记绝对值不大于 1 的数；c 为正常数；ε 为任意小的正数.

当 $B > 0$ 时，记号 $A \ll B$ 是指 $|A| \leqslant cB$.

设变量 S 的值所成的集合完全定义，任何 $\ll H$ 项之和，其每项皆属于所说之集合者，以记号 $\sum^{H} S$ 记之.

对于满足条件 $0 < B - A < 1$ 之实数 A 与 B，记号 $A < z < B(\bmod 1)$，$A \leqslant z < B(\bmod 1)$，$A < z \leqslant B(\bmod 1)$，$A \leqslant z \leqslant B(\bmod 1)$ 分别表示对于某整数 h，我们有

$$A + h < z < B + h$$
$$A + h \leqslant z < B + h$$
$$A + h < z \leqslant B + h$$
$$A + h \leqslant z \leqslant B + h$$

对于实数 x，记号 $\{x\}$ 表示 x 的分数部分，即 $x - [x]$，而记号 $\langle x\rangle$ 则为 x 到其最近整数的距离，即 $\min(\{x\}, 1 - \{x\})$.

记号 $Q(d)$ 是正数 d 的素因子的个数；n 是大于 1 的整常数；$v = \dfrac{1}{n}$.

所谓整点是指坐标皆为有理整数之点.

目录

绪论

数论里最重要的问题之一，就是对于单元或多元函数 $f(x_1,\cdots,x_r)$ 之值的分布建立各种规律. 但此时只考虑与 r 次元空间中，属于所与集合 Q 内的整点 $(x_1,\cdots,x_r)$ 对应的函数值. 这集合可以是由 r 次元空间中所有的整点所组成，也可以是其中由某些条件所规定的一部分所组成（例如由不等式 $x_1 > 0,\cdots,x_r > 0, x_1\cdots x_r \leqslant N$ 所规定的一部分或坐标皆为素数的点所成的一部分等）.

若把某种限制加于函数 $f(x_1,\cdots,x_r)$ 或集合 Ω，我们就可从提得这样笼统的问题得到各种各样比较特殊的问题，我们现在从这些问题里选出三个在数论中非常重要的问题. 这几个问题不仅在问题的提法上有相似之处，即在我们用来解决这些问题的方法上也有很多共同的地方. 这方法是我在 1934 年发现的；在 1937 年，我曾初次尝试把它作有系统的叙述. 其后，这个方法又经过了重大的修改，个别的结果简化改进得很厉害. 本书里即将对我的方法及其在所述三个问题上的应用给予一个新的改善了的说明.

我们现在来对所述的三个问题作一个比较详细的描写. 顺便也叙述一下它们发生的简短历史，说一下在我 1934 年的方法出现之前用来解决这些问题的方法.

（1）指数函数

$$f(x_1,\cdots,x_r)=e^{2\pi i F(x_1,\cdots,x_r)}$$

的值的分布问题非常重要，这里的 $F(x_1,\cdots,x_r)$ 是一个实函数；设集合 Ω 中点的数目 T 为有限，作函数 $f(x_1,\cdots,x_r)$ 在 Ω 上所有的值之和

$$S=\sum_{\Omega}f(x_1,\cdots,x_r)=\sum_{\Omega}e^{2\pi i F(x_1,\cdots,x_r)}$$

则确定 $|S|$ 的上界也是这些问题里一个很主要的问题. 函数 $f(x_1,\cdots,x_r)$ 的每一个值的绝对值皆等于 1，值的个数等于 T. 对于 $|S|$，我们有“平凡估值”

$$|S|\leqslant T$$

而在这里，等号成立的充分和必要的条件是函数 $F(x_1,\cdots,x_r)$ 的一切值皆具有同一分数部分. 然而，对于异常广泛的许多种函数 $F(x_1,\cdots,x_r)$ 及集合 Ω 来说，是有可能对于 $|S|$ 建立起比所说的平凡估值来得无比精确的上界，即形如

$$|S|\leqslant T\gamma$$

的上界，此处的 γ 随集合 Ω 中点数 T 的增大及函数 $F(x_1,\cdots,x_r)$ 的形状可能同时发生的变化而趋于零. 使得这样的上界与平凡估值区别开来的这一因子 γ，我们将称之为“低化因子”（понижающий множитель）.

我们只详细讨论形如

$$\sum e^{2\pi i F(x)}$$

的和数，在这里，就 x 所求的和系展布于某一区间 $Q\leqslant x<Q+P$ 内的一切整数或这些整数的某一部分. 这样的和数是和数 S 当 $r=1$ 时的特别情形.

形如

$$S=\sum_{x=0}^{q-1}e^{2\pi i\frac{\Phi(x)}{q}};\Phi(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x \tag{1}$$

的和数已经研究得非常好，这里 $q>0,(a_n,\cdots,a_1,q)=1$. 这种形状的第一个不平凡的和数，即形如

$$\sum_{x=0}^{q-1}e^{2\pi i\frac{ax^2}{q}};(a,q)=1$$

的和数还是高斯[1] 就已经研究过的，因而有“高斯和数”之名. 估计和数（1）的最精确最一般的方法是由莫德尔（Mordell[2]）所得出的，对于素数 q，他得到了估值

$$S\ll q^{1-v}$$

对于一般的情形，华罗庚[3] 曾经得到了估值

$$S\ll q^{1+\varepsilon-v}$$

然而，对于无限多的情形，后面这一估值已经不可能再有重大的改进；可以指出无限多的数值 q，对于其中每一个（本书第二章引理 4），所有形如

$$S=\sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i\frac{ax^n}{q}};(a,q)=1 \tag{2}$$

的和数皆等于 q^{1-v}.

运用与我们用来估计和数(2) 的方法相近的方法,我们也可以估计和数

$$\sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i\frac{f(x)}{q}};\ \sum_{x=0}^{q-1}\chi(f(x));f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+b_1x_0+\cdots+b_mx_0^m$$

这里的 $a_n,\cdots,a_1,b_1,\cdots,b_m$ 是整数,x_0 是由 $xx_0\equiv 1(\bmod q)$ 所规定,χ 则是关于模 q 的非主特征. 利用类似的方法,我们也可以估计许多别的和数. 在本书里我们不考虑这一类的和数[4-6].

更一般形式的和数

$$S=\sum_{x=Q}^{Q+P-1} e^{2\pi iF(x)};F(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x \tag{3}$$

的估值是难求得多,这里的 Q 和 P 是整数,$P>0$,而 $a_n,\cdots,a_1$ 则是实数. 外尔(H. Weyl) 得到了第一个估计这种和数的普遍方法;因此,这种和数称为"外尔和数". 利用外尔氏方法所得到的估值是和利用有理分数对多项式 $F(x)$ 的首项系数所作的逼近有关. 设

$$\alpha_n=\frac{a}{q}+\frac{\theta t}{q^2};(a,q)=1,q>0,t\geqslant 1$$

则用外尔氏方法即得估值[7]

$$|S|\leqslant P\gamma;\gamma\ll P^{\varepsilon}(P^{-1}+tq^{-1}+tP^{-n+1}+qP^{-n})^{\rho};\rho=\frac{1}{2^{n-1}} \tag{4}$$

要想更清楚地表示出这一估值的精确度,我们现在来考虑一种特殊情况:$q\leqslant P,t=1$. 根据所说的估值,利用简单的计算,我们容易得出

$$|S|\ll P^{1+\varepsilon}\gamma';\gamma'\ll q^{-\rho'};\rho'=\rho-\varepsilon \tag{5}$$

数 ε 可以取得很小,使得它在与 ρ 比较起来简直无足轻重. 现令 P 无限增大,同时也令 q 按某种规律增大. 则低化因子 γ' 将趋于0,而其接近于0 的速度则以 ρ' 大到何种程度为转移. 但当 n 增大时,关于 n 之阶为 2^{-n} 的 ρ' 很快就接近于0. 因此,对于大数 n,估值(5) 非常粗糙.

在本书里(第六章),运用我的方法,我们对于外尔和数得出了新的估值,根据这一估值,估值(5) 中的数 ρ' 可以用数

$$\rho_1=\frac{1}{3(n-1)^2\ln 12n(n-1)}$$

来代替.

当 n 增大时,关于 n 之阶为 $(n^2\ln n)^{-1}$ 的数 ρ_1,其趋于0 的速度比 ρ' 来得无比的慢,因此,当 n 很大时,用 ρ_1 代替 ρ',将给估值(5) 以更无比的精确估值.

我估计外尔和数的方法的一些有成就的变体,是由范 · 德 · 科尔普特(van

der Corput)(这一变体是在 1936 年六月寄来的信里通知我的) 和 B · 林尼克(1942 年) 得出的. 但在这里,我仅讨论与我的著作中所阐述者相近的变体.

和数(2) 也属于所述特殊情形 $q \leqslant P, t = 1$ 的外尔和数(此时 $Q = 0, P = q$, $F(x) = \dfrac{ax^n}{q}$),如我们上面所说,对于其中无限多的和数,等号 $S = q^{1-v} = qq^{-v}$ 成立. 后面这一事实已经指出,在公式(5) 中,数 ρ' 已经不可能用任何大于 $v = n^{-1}$ 的数去代替,因为对于无限多的和数(2),这样的估值已经不正确.

在这里,这样的臆测,即估值(5) 中的数 ρ' 可以用数 $v - \varepsilon$ 来代替,好像是很可能的. 这一臆测乃是一个更普遍一些的臆测,即估值(4) 中的数 ρ 可以用数 v 来代替的一种特别情形. 利用我的方法进一步地改进(或用任何别的方法),后面这一臆测的证实或否定看来很有希望.

然而,即使这样的臆测已经证实,由此到达外尔和数估值问题的完全令人满意的解决还是非常遥远. 下述非常简单的研究即可使我们相信这一点. 设 s 为 $1,\cdots,n$ 中的任一数,又设 Q,P 以及多项式 $F(x)$ 的所有系数,除 α_s 之外,皆为已知. 设 α_s 由 0 增到 1,则和数(3) 是 α_s 的函数. 用记号 $S(\alpha_s)$ 来记此函数,则得

$$\int_0^1 |S(\alpha_s)|^2 \mathrm{d}\alpha_s = \sum_{x_1=Q}^{Q+P-1} \sum_{x=Q}^{Q+P-1} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(F(x_1) - F(x) - \alpha_s x_1^s + \alpha_s x^s)} \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\alpha_s(x_1^s - x^s)} \mathrm{d}\alpha_s = P \quad (6)$$

因为(第一章引理 4) 积分

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\alpha_s(x_1^s - x^s)} \mathrm{d}\alpha_s$$

当 $x_1 = x$ 时等于 1,当 $x_1 \gtrless x$ 等于零. 由等式(6),当 $0 < \lambda < \dfrac{1}{2}$ 时,已经不难推出,对于区间 $0 \leqslant \alpha_s \leqslant 1$ 中的一切值 α_s,至多除去属于有限多个总长小于等于 $P^{2\lambda-1}$(注意 $P^{2\lambda-1}$ 当 P 无限增大时趋于 0) 的不相交叠之区间者之外,估值

$$|S(\alpha_s)|^2 \leqslant P^{2-2\lambda}$$

成立,即估值

$$|S(\alpha_s)| \leqslant P^{1-\lambda} \quad (7)$$

成立. 表示得概略一点,可以这样说:对于"几乎所有的" 和数 $S(\alpha_s)$,估值(7) 皆成立.

利用第六章的结果,关于和数(3) 的绝对值的分布也可以导出别的重要结论. 例如我们可以证明这样的定理:设 $n > 11$,又设 P 与 Q 为已知. 对于 n 维立方体 $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1,\cdots,0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1$ 中之任何一点 $(\alpha_n,\cdots,\alpha_1)$,至多除去属于有限个总体积小于等于 $P^{-0.125n^2}$ 的不相交叠之区域者之外,估值

$$|S(\alpha_n,\cdots,\alpha_1)| \ll P^{0.975}$$

皆成立.

设点 $(\alpha_n,\cdots,\alpha_1)$ 所对应的 $|S(\alpha_n,\cdots,\alpha_1)|$ 不是正常那样大小,要尽量精

确地去阐明包含此种$(\alpha_n,\cdots,\alpha_1)$的区域所处的位置,乃是外尔和数估值问题中一个非常重要的任务.

可以用来导出外尔和数估值的方法,也可以用来导出形如

$$S=\sum_{x=Q}^{Q+P-1}\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}F(x)} \tag{8}$$

的和数的估值,这里的Q和P是整数,$P>0$,且函数$F(x)$在区间$Q\leqslant x\leqslant Q+P$内$n$次可微分,并满足条件

$$\frac{1}{A}\leqslant\frac{F^{(n)}(x)}{n!}\leqslant\frac{c}{A}$$

此处的$A\geqslant 2$. 这种和数在解决素数分布问题时具有极其重要的应用[9]. 在$n=2$时的特殊情形,这种情形在解决平面上或空间中已与区域内(比如由不等式$x^2+y^2\leqslant r^2$规定之区域,或由不等式$x^2+y^2+z^2\leqslant r^2$所规定之区域等)的整点数目的问题,具有非常重要的应用. 估计这种和数的方法已经由万·德尔·科尔普特[10]和我[11]各自独立地得出,同时,万·德尔·科尔普特还指出,在某种附带条件之下,与外尔方法结合起来,这种方法还可以弄得精确一些. 运用外尔方法,万·德尔·科尔普特对于一般情形也得出和数(8)的估值[12].

在本书里(第六章),当$n>11$时,在条件$P\ll A\ll P^{2+2v}$之下,运用我的方法,我们对于和数(8)得出了新的估值

$$S\ll P^{1-\rho};\rho=\frac{1}{3n^2\ln 125n} \tag{9}$$

当n甚大时,这一估值比用外尔方法所得者来得更精密,其更精密的程度,大致与关于估计外尔和数所发生的情形一样.

人们自然会提出和数(8)的估值(9)进一步精密化的问题,即在估值(9)中,是否可以用可能更大一些的数$\rho'>\rho$去代替ρ的问题. 然而,由于我们加于和数S的限制太宽大,在这问题上我们很难做出任何确定的臆测. 我想,在这里最好是只讨论一些重要的特殊例子. 作为这种例子,我来讨论和数(参看第六章定理2.b的例子)

$$S(t)=\sum_{x=P_0+1}^{P_0+P}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t\ln x}$$

这里的P_0与P是满足条件$\frac{1}{2}P_0\leqslant P\leqslant P_0$的整数,$t$是满足条件$P_0^{n-2}\leqslant t\leqslant P_0^{n-1}$的数,$\sigma=(-1)^{n+1}$. 于此,我们有

$$F(x)=\frac{\sigma t\ln x}{2\pi};\frac{F^{(n)}(x)}{n!}=\frac{t}{2\pi nx^n};\frac{t}{2\pi n(3P)^n}\leqslant\frac{F^{(n)}(x)}{n!}\leqslant\frac{t}{2\pi nP^n}$$

因此,设

$$A=\frac{2\pi n(3P)^n}{t};l=3^n$$

则有 $P \ll A \ll P^2$,且在区间 $P_0+1 \ll x \ll P_0+P$ 中

$$\frac{1}{A} \leqslant \frac{F^{(n)}(x)}{n!} \leqslant \frac{l}{A}$$

因之,我们加于和数(8)中的要求在这里皆已满足.再,我们有

$$\int_{P_0^{n-2}}^{P_0^{n-1}} |S(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{x_1=P_0+1}^{P_0+P} \sum_{x=P_0+1}^{P_0+P} \int_{P_0^{n-2}}^{P_0^{n-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t(\ln x_1 - \ln x)} \mathrm{d}t$$

但积分

$$\int_{P_0^{n-2}}^{P_0^{n-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t(\ln x_1 - \ln x)} \mathrm{d}t$$

当 $x_1 = x$ 时等于 $P_0^{n-1} - P_0^{n-2}$,当 $x_1 \gtrless x$ 时

$$\ll \frac{1}{|\ln x_1 - \ln x|}$$

在后一种情形,假定 $x_1 = x + u$,则有

$$\ln x_1 - \ln x = \ln\left(1 + \frac{u}{x}\right) \gg \frac{|u|}{p};\frac{1}{|\ln x_1 - \ln x|} \ll \frac{P}{|u|}$$

从上所述,当 $n > 2$ 时,我们容易得出

$$\int_{P_0^{n-2}}^{P_0^{n-1}} |S(t)|^2 \mathrm{d}t - P(P_0^{n-1} - P_0^{n-2}) \ll P\sum_{u=1}^{P} \frac{P}{u} \ll P^2 \ln P$$

$$\int_{P_0^{n-2}}^{P_0^{n-1}} |S(t)|^2 \mathrm{d}t = PP_0^{n-1} + O(P_0^{n-1} \ln P) \tag{10}$$

等式(10)指出,在估值(9)中之数 ρ 已经不可能用数 $\rho' > \frac{1}{2}$ 去代替.此外这等式也指出,当 $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ 时,对于区间 $P_0^{n-2} \leqslant t \leqslant P_0^{n-1}$ 中之一切值 t,至多除去属于有限多个总长不大于 $P^{n+2\lambda-2}$(与 $P_0^{n-1} - P_0^{n-2}$ 比起来毫不足道,其与 $P_0^{n-1} - P_0^{n-2}$ 之比当 P 无限增大时趋于 0)之互不相交叠的区间者之外,估值

$$|S(t)|^2 \ll P^{2-2\lambda}$$

成立,即估值

$$|S(t)| \ll P^{1-\lambda} \tag{11}$$

成立.表示得粗略一点,可以这样说:对于"几乎所有的"和数 $S(t)$,估值(11)成立.

最后,我们来讨论形如

$$\sum \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} F(x)} \tag{12}$$

的和数,这里的 $F(x)$ 是一实函数,求和记号只展布于区间 $Q \leqslant x < Q+P$ 上的一部分整数.我们将要特别加以注意的和数将有 $\gg P^{1-\varepsilon}$ 项.在估计这种和数时,不要以为所得的估值总是比我们在就展布于区间 $Q \leqslant x < Q+P$ 上所有的

整数求和所得的估值来得坏或来得不好. 例如从和数(2) 所得到的估值,若令 x 只跑过区间 $0 \leqslant x < q$ 中与 q 互素的整数,则常常 $\leqslant \sqrt{q}$,其实和数(2) 对于无限多的数值 q,如我们上面所曾指出,却可以等于 $q^{1-\nu}$.

和数(12) 的一个特别有趣的特殊情形是形如

$$\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i F(p)} \tag{13}$$

的和数,这里的 p 跑过素数. 在本书里(第九章),就和数(13) 的最简单情形,即当 $F(p) = \alpha p$ 时,我们说明了如何把这种和数的估值问题轻易地划归成只是我的方法的一种应用. 这只须采用下面的恒等式(或此恒等式的某些推广) 就成了

$$\Phi(1) + \sum_{H < p_1 \leqslant N} \Phi(p_1) = \sum_{dm \leqslant N} \sum \mu(d) \Phi(dm) \tag{14}$$

此处 H 是满足条件 $1 \leqslant H \leqslant \sqrt{N}$ 的任意一数,p_1 跑过不能为小于等于 H 的素数所除尽的整数,d 跑过小于等于 H 的素数之积(包括"空积",等于 1) 而 m 则跑过正整数. 恒等式(14) 是一个很早就知道的恒等式;此恒等式的最初等的证明是根据埃拉托塞尼的筛的观念. 著名的欧拉恒等式(p 跑过所有的素数):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \frac{1}{\sum\limits_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^s}}; s = \sigma + it; \sigma > 1 \tag{15}$$

在某些方面也与恒等式(14) 相近,恒等式(15) 及其在函数 $L(s)$ 上的推广后来就成为由切比雪夫、迪利克雷、黎曼、阿达玛、瓦雷 · 布桑,哈代 – 李特伍德等人[18] 所建立的素数分布理论的基础.

恒等式(15) 正可以由恒等式(14) 得出,只须令函数 $\phi(m)$ 等于 m^{-s},并先令 N,然后再令 H 无限增大即可. 这里必须注意,将埃拉托塞尼筛法观念加以某些修改,后来也就造成了著名的"B · 布朗方法",这使得素数分布理论中很多重要的精致问题能够得到解决.

(2) 实函数 $F(x_1, \cdots, x_r)$ 的分数部分

$$f(x_1, \cdots, x_r) = \{F(x_1, \cdots, x_r)\}$$

的分布问题与所论的问题1 密切有关. 也如在问题1 中一样,我们在这里也只限于讨论集合 Ω 为有限的情形. 函数 $f(x_1, \cdots, x_r)$ 满足 $0 \leqslant f(x_1, \cdots, x_r) < 1$. 原来,对于非常广泛的许多种函数 $F(x_1, \cdots, x_r)$ 及集合 Ω,不管是区间 $0 < \alpha < 1$ 中的任何数 α,皆可以用函数 $f(x_1, \cdots, x_r)$ 的值十分精确地去接近于这一 α;换言之,我们可以证明,从 α 到和它邻近的函数值 $f(x_1, \cdots, x_r)$ 的距离不超过 γ,此处 γ 与 α 无关,且随集合 Ω 中点的数目 T 的增加及函数 $F(x_1, \cdots, x_r)$ 的形状可能同时发生的变化而趋于 0. 不但如此,在非常广泛的情形,我们还可以证明函数 $f(x_1, \cdots, x_r)$ 的值的分布异常均匀,这就是说,无论区间 $0 < \delta < 1$ 中的任何

一数 $\delta, f(x_1,\cdots,x_r)$ 的值,其属于区间 $0 \leqslant f(x_1,\cdots,x_r) < \delta$ 之中者的个数 H 大致是与此区间之长成比例;更精确言之

$$H = T\delta + O(T\gamma_1)$$

此处的 γ_1 与 δ 无关,且随集合 Ω 中点的数目 T 的增加及函数 $F(x_1,\cdots,x_r)$ 的形状可能同时发生的改变而趋于 0. 以后,我们只详细讨论形如 $f(x) = \{F(x)\}$ 的函数的值的分布,这里的 x 跑过某一区间 $Q < x \leqslant Q + P$ 中的一切整点或这些整点的某一部分. 这个问题是所说的一般问题当 $r = 1$ 时的特殊情形.

函数

$$f(x) = \left\{\frac{\Phi(x)}{q}\right\};\Phi(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x$$

的值的分布问题很容易解决,这里的 $q > 1, (a_n,\cdots,a_1,q) = 1$,而 x 则跑过关于模 q 的一完全剩余系. 在这里,运用上述和数(1) 的估值,对于函数 $f(x)$ 之值,其属于区间 $0 \leqslant f(x) < \delta$ 之中者的个数 H,很容易就可导出渐近公式

$$H = q\delta + O(q^{1+\varepsilon_0-\nu})$$

函数

$$f(x) = \{F(x)\};F(x) = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x \tag{16}$$

的值的分布问题要难得多,此处的 $\alpha_n,\cdots,\alpha_1$ 是实数,而对于整数 Q 与 P, x 则跑过区间 $Q \leqslant x < Q + P$ 中的一切整数. 这问题的第一个一般的解决是由外尔作出的,他为了这一目的利用了他所得到的以他的名字来称呼的和数(3) 的估值. 但是,外尔自己的估值是很不精确的. 后来,万·德尔·科尔普特及科克什玛利用了根据外尔方法所得到的和数(3) 与(8) 的最完善的估值,所说的问题主要是在他们的工作里得到了发展和推广. 在解决函数(16) 的值在分布问题中,运用外尔方法所得到的最精确的结果可以陈述如下:设

$$\alpha_n = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2};(a,q) = 1;1 < q < P^n$$

则数列

$$f(x) = \{F(x)\};x = Q,\cdots,Q + P - 1$$

的数中,其属于区间 $0 \leqslant f(x) < \delta$ 中者的个数 H 可以表成公式[7]

$$H = P\delta + R;R \ll P\gamma;\gamma = P^{\varepsilon}(P^{-1} + q^{-1} + qP^{-n})^{\sigma};\sigma = 2^{-n+1}$$

在本书里(第八章),运用我的方法,我们对 R 得出了一个估值,其与所说的估值,相差的程度正如根据我的方法所得到的外尔和数的估值与根据外尔自己的方法所得到的同样和数的估值相差的程度一样.

此外(第五章),对于从任意的真分数 α 到数列

$$f(x) = \{F(x)\};x = 1,\cdots,[q_l^{2\lambda}]$$

中与其邻近的数的距离,我们也得出了精确的估值,这里的 $F(x)$ 具有(16) 中

所说的值,l 是 $n,\cdots,1$ 中之一数,$\lambda=\frac{1}{l}$,q 则由等式

$$\alpha_l=\frac{a_l}{q_l}+\frac{\theta}{q_l^2};(a_l,q_l)=1;q_l>0$$

决定.

最后(第十一章),我们用例子 $F(p)=\rho p$ 来说明我的方法也可能用来解决函数

$$f(p)=\{F(p)\}$$

的值的分布问题,这里的 p 跑过区间 $0<p\leqslant N$ 中的素数.

(3) 特别有趣的是函数 $f(x_1,\cdots,x_r)$ 在整点集合 Ω 上所取的值的分布规律. 在这里,关于每一个所给的整数 N 就会发生这样的问题:在集合 Ω 中有多少个点使得这个 N 成为函数 $f(x_1,\cdots,x_r)$ 的值;换句话说:不定方程

$$f(x_1,\cdots,x_r)=N \tag{17}$$

的解答的个数 $I(N)$ 怎样.

在某些情形,这里所谈的问题只是在确定不等式 $I(N)>0$,它说明了方程(17) 可解;在另外一些情形,则可能对 $I(N)$ 建立起渐近公式;最后,有时也提出求 $I(N)$ 的精确公式的问题等.

现在我们来更详细的讨论函数

$$f(x_1,\cdots,x_r)=x_1^n+\cdots+x_r^n$$

的值的分布问题,这里假定集合 Ω 是由 r 维空间中具有非负 $x_1,\cdots,x_r$ 的点$(x_1,\cdots,x_r)$ 所组成.

在这里,很容易就可证明,当 $r\leqslant n$ 时,存在着无限多个非负的 N 使方程(17),即方程

$$x_1^n+\cdots+x_r^n=N \tag{18}$$

不可解. 实际上,设 N_0 为一充分大的正整数. 若对任一 $N\leqslant N_0$,等式(18) 皆成立,则在那里所出现的每一个 $x_1,\cdots,x_r$ 皆可在下列小于等于 $N_0^\nu+1$ 个数目

$$0,1,\cdots,[N^\nu] \tag{19}$$

中找到. 因此,假若在和数 $x_1^n+\cdots+x_r^n$ 中令所有的 $x_1,\cdots,x_r$ 相互无关地跑过(19) 中的数,则在此和数的$[N_0^\nu+1]^r$ 个值中,我们就得到使得方程(18) 可解的所有数目 $N\leqslant N_0$. 但使得(18) 可以以两两不同的 $x_1,\cdots,x_r$ 为解的那种 N,每一个至少遇到 $r!$ 次(数 $x_1,\cdots,x_r$ 可以用 $r!$ 种不同的方法排列). 而使得(18) 有解,但解 $x_1,\cdots,x_r$ 中必有两者相等的那种 N 的个数则 $\ll N_0^{\nu(r-1)}$. 因之,使得方程(18) 有解的全部 $N\leqslant N_0$ 的个数 K 满足条件

$$K<\frac{(N_0^\nu+1)^r}{r!}+O(N_0^{\nu(r-1)})<\frac{(N_0^\nu+1)^n}{n!}+O(N_0^{1-\nu})<0.6N_0$$

(N_0 充分大). 这就是说,对于多于 $0.4N_0$ 个的 $N \leqslant N_0$,方程(18) 不可解,而这也就证明了我们的说法.

到底什么样的 r 使得方程(18) 对于所有的 $N \geqslant 0$ 有解,或者,至少是对于所有的 $N \geqslant c_0$ 有解,若是 c_0 充分大的时候? 拉格朗日已经指出,方程

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = N$$

在限定 x_1, x_2, x_3, x_4 为非负整数之下可解. 华林在 1770 年说了这样的断言,对于所有 $n > 2$,存在着这样的 $r = r(n)$,它使得方程(18) 对于一切整数 $N \geqslant 0$ 在限定 $x_1, \cdots, x_r$ 为非负整数之下可解. 这一断言享有"华林问题"之名;它最初是由 D·希尔伯特在 1909 年所证明. 诚然,希尔伯特用来达到他的目的的方法多少带有一点专门的性质,并且也很不精确(对于 r 所得到的数目非常大). 因此,现在这个方法差不多已成陈迹了.

为了要使得以后的叙述很清楚,我们现在引进记号 $G(n)$ 来讨论. 我们用此记号表示具有下述性质的整数:存在着某一个 c,使得方程(18) 当 $r = G(n)$ 时对于所有大于等于 c 的整数 N 皆可解,但没有任何大于 c 的 c_1 存在,使得方程(18) 当 $r < G(n)$ 时对所有大于等于 c_1 的整数 N 皆可解. 由上所述,立可推知 $G(n)$ 存在,且在任何场合皆有

$$G(n) > n$$

在 1919 年,哈代与李特伍德作出了一个解决华林问题的新方法,这与希尔伯特的方法比较起来,简直是无比的广泛和精确. 这两个学者对 $G(n)$ 得出了形如

$$G(n) \leqslant n2^{n-2}h \tag{20}$$

的上界,这里的 h 当 n 无限增大时趋于 1. 此外,对于

$$r \geqslant (n-2)2^{n-1} + 5 \tag{21}$$

哈代与李特伍德首先导出了 $I(N)$ 的渐近公式

$$I(N) = \frac{(\Gamma(1+v))^r}{\Gamma(rv)} N^{rv-1} \mathscr{S} + O(N^{rv-1-c}) \tag{22}$$

此处的 $\mathscr{S} = \mathscr{S}(n, r, N)$ 是"奇异级数",具有在本书中(第二章) 所说的值. 哈代与李特伍德也指出了,在条件(21) 之下,有 $\mathscr{S} \gg 1$. 由学者华罗庚[15] 就哈代与李特伍德方法所得到的最近的精确改进使得不等式(20) 与(21) 的右边可以用数目 $2^n + 1$ 去代替.

在本书里(第四章),对于 $G(n)$ 采用我的方法,代替(20),我们得出了这样的上界

$$G(N) < 3n(\ln n + 11)$$

这个界在 n 增大时以 $n \ln n$ 的阶而增大,因之,关于增大底阶来说,已经和我们上面所求出的不可能达到的下界 n 相差很小. 至于渐近公式(22),那在本书里

(第七章) 我们只证明它当

$$r \geqslant [10n^2 \ln n]$$

时成立. 这样的一个命题:将我的方法(但也可能是某种新的方法) 加以适当的发展,则 r 的下界的阶可能化到 n,看来是很可能的.

特别有趣的是函数

$$f(p_1, \cdots, p_r) = p_1^n + \cdots + p_r^n$$

的值的分布问题,这里的 $p_1, \cdots, p_r$ 跑过素数.

还在 1742 年,在哥德巴赫与欧拉的通信里就已经提出了所谓"哥德巴赫问题",它是这样的一个猜想,就是所有大于 1 的整数皆是不多于三个奇素数之和. 依照这一臆测,则大于 2 的偶数皆必然是两个奇素数之和. 在 1919 年,布朗在试图用他自己的方法(关于这个方法,我们在上面已经提到) 来解决上述问题时,曾经指出,所有的偶正数皆是两个数目之和,其各为不多于 9 个素因子之积. 其后,数目 9 又用数目 4 去代替,但利用这样的方法来证明哥德巴赫的臆测仍然毫无成就. 在 1930 年,Л · Г · 史尼列尔曼在把他自己关于由正整数所成之集底密率的想法与布朗方法结合在一起之后,即曾指出[16],所有大于 1 的整数皆是有限定 r 个素数之和;后来又证明了此 r 不超过 67.

在 1923 年,哈代与李特伍德曾经指出解决关于奇数 N 的哥德巴赫问题的方法,这个方法就其轮廓来说,与这两个学者在解决华林问题时所建立者相近. 同时,哈代与李特伍德在某种条件之下,对于将数目 N 表示成形如

$$N = p_1 + p_2 + p_3$$

的表法的个数 $I(N)$ 导出了渐近公式,这里的 p_1, p_2, p_3 是素数. 从这渐近公式,哥德巴赫臆测的正确性对于所有充分大的奇数 N 已经立可推出. 哈代与李特伍德的结论其所以带有条件是在于采用了一些有关 $L(s)$ 函数理论的未经证明的定理. 然而,使得我们可以对于表出 $I(N)$ 的积分中,与所谓基本区间对应的那一部分(参看本书第十章) 导出渐近公式的方法还是到 1937 年初做出来的(佩治[17],埃斯特曼[18]). 这个方法不仅用于哥德巴赫问题,而且也可以用于非常广泛的类似问题. 由于这个原因,在 1937 年初就已经解决了一系列的问题:已经证明了每一充分大的数目 N 皆可表示成 $N = p' + p'' + x^2$ 的形式(p', p'' 是素数,x 是正整数);已经证明了每一充分大的奇数 N 可以表示成 $N = p_1 + p_2 + p_3 p_4$ 的形式(p_1, p_2, p_3, p_4 是素数) 等. 然而对于奇数 N 的情形哥德巴赫问题的解决还需要在 $F(p) = \alpha p$ 时和数(13) 的一个非平凡的估值,也就是需要和数

$$\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p}$$

对于区间 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 中,其不属于基本区间内的一切 α 值的一个非平凡的估值.

由我在 1937 年所得到的估值和数(13) 的普遍方法不仅使我们对于解决了奇数情形的哥德巴赫问题,而且对于许许多多别的同类问题的解决也开辟了道

路，比如将整数 N 表示成（素数的华林问题）

$$N=p_1^n+\cdots+p_r^n$$

的形式就是.

在本书里（第十章），我们只限于详细地解决奇数情形的哥德巴赫问题. 对于更详细的介绍问题，我们介绍读者去看华罗庚的优秀专著[3].

在结束之际，我将对 K·K·马戛里夕威利表示感谢，他曾仔细阅读比书之原稿，并指出其中存在的许多疏忽之处.