



状元笔记

教材详解

高中数学必修 ③

RA

龙门书局教育研究中心组编

学科主编：傅荣强 本册主编：张书祥 马云龙



YZLI0890162129

取状元学习之精华
架成功积累之天梯

ZHUANG YUAN BIJI
JIAOCAI XIANGJIE



★内含教材习题答案★



龍門書局

龙门品牌·学子至爱

www.longmenbooks.com

状元笔记

教材详解

ZHUANGYUANBIJI
JIAOCAIXIANGJIE

高中数学必修

3



YZLI0890162129

龙门书局教育研究中心组编

学科主编：傅荣强

本册主编：张书祥 马云龙

编者：张 硕 刘 欣 高玉莲 曹祥迁

龍 門 書 局

北 京

版权所有 侵权必究

举报电话:010—64031958;13801093426

邮购电话:010—64034160

图书在版编目(CIP)数据

状元笔记教材详解:RA 课标本.高中数学.必修3/龙门书局教育研究中心组编;傅荣强学科主编;张书祥,马云龙本册主编.——北京:龙门书局,2011

ISBN 978-7-5088-1994-5

I. 状… II. ①龙… ②傅… ③张… ④马… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 064541 号

策划编辑:田旭 刘娜 责任编辑:刘娜 刘童 封面设计:魏晋文化

龙 门 书 局 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

www.longmenbooks.com

北京龙兴印刷厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

2009 年 5 月第 一 版 开本:890×1240 A5

2011 年 6 月第二次修订版 印张:9

2011 年 9 月第七次印刷 字数:308 000

定 价: 20.80 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

目录

第一章 算法初步

1.1 算法与程序框图	1
芝麻开门	1
基础知识全解	1
模糊点·易错点·障碍点	16
方法能力探究	17
状元互动	20
从教材看高考	22
课后练习	22
1.2 基本算法语句	24
芝麻开门	24
基础知识全解	25
模糊点·易错点·障碍点	36
方法能力探究	39
状元互动	41
从教材看高考	42
课后练习	43
1.3 算法案例	44
芝麻开门	44
基础知识全解	44
模糊点·易错点·障碍点	56
方法能力探究	59
状元互动	61

从教材看高考	62
--------	----

课后练习	63
------	----

本章知识能力整合	64
----------	----

知识结构图	64
-------	----

难点·综合·易错点	64
-----------	----

方法能力探究	66
--------	----

三年高考两年模拟名题赏析	71
--------------	----

教材习题、课后练习答案及解析

	76
--	----

第二章 统计

2.1 随机抽样	106
芝麻开门	106
基础知识全解	106
模糊点·易错点·障碍点	118
方法能力探究	120
状元互动	124
从教材看高考	126
课后练习	126
2.2 用样本估计总体	128
芝麻开门	128
基础知识全解	128
模糊点·易错点·障碍点	147
方法能力探究	150

状元互动·····	153	从教材看高考·····	226
从教材看高考·····	154	课后练习·····	227
课后练习·····	155	3.2 古典概型 ·····	228
2.3 变量间的相关关系 ·····	157	芝麻开门·····	228
芝麻开门·····	157	基础知识全解·····	229
基础知识全解·····	157	模糊点·易错点·障碍点 ·····	237
模糊点·易错点·障碍点 ·····	163	方法能力探究·····	239
方法能力探究·····	165	状元互动·····	242
状元互动·····	167	从教材看高考·····	243
从教材看高考·····	168	课后练习·····	244
课后练习·····	169	3.3 几何概型 ·····	244
本章知识能力整合 ·····	170	芝麻开门·····	244
知识结构图·····	170	基础知识全解·····	245
难点·综合·易错点·····	171	模糊点·易错点·障碍点 ·····	252
方法能力探究·····	173	方法能力探究·····	253
三年高考两年模拟名题赏析 ·····	175	状元互动·····	255
教材习题、课后练习答案及解析 ·····	181	从教材看高考·····	256
		课后练习·····	257
		本章知识能力整合 ·····	258
		知识结构图·····	258
		难点·综合·易错点·····	258
		方法能力探究·····	260
		三年高考两年模拟名题赏析 ·····	261
		教材习题、课后练习答案及解析 ·····	265
第三章 概 率			
3.1 随机事件的概率 ·····	207		
芝麻开门·····	207		
基础知识全解·····	207		
模糊点·易错点·障碍点 ·····	221		
方法能力探究·····	222		
状元互动·····	225		

第一章 算法初步

1.1 算法与程序框图

芝麻开门

计算机解决任何问题都要依赖于算法。

计算机在执行算法时,它只认识程序语言,不认识其他语言.而我们认识程序语言又需要一个逐渐精确的过程,首先是用自然语言描述算法,其次是画程序框图表示算法,最后是编写程序实现算法.本节我们就来学习前两个过程.

基础知识全解

知识板块 1.1.1 算法的概念

★★★知识点1 算法的概念

在以往的学习中我们接触过很多算法,只不过是没把它明确下来.研究函数的性质,讨论空间几何对象的相互关系,探究直线与圆,等等,每解一道题,其实就是书写解决问题的明确、有限的步骤,这个步骤就是一个算法.

(1) 算法的含义

[理解] 在数学中,算法通常是指按照一定规则解决某一类问题的明确和有限的步骤.

算法最初指的是用阿拉伯数字进行算术运算的过程.

现代意义上的“算法”通常是指可以用计算机来解决某一类问题的程序或步骤,这些程序或步骤必须是明确和有效的,而且能够在有限步之内完成.

(2) 算法的要求

[理解] ①适用

算法必须能够解决一类问题.

②简单

算法要使得规则尽量地简单,步骤有限并且尽量地少.

③正确且计算机能够执行

不正确的算法、计算机不能执行的算法都是毫无意义的.

(3)算法的设计

[理解] 设计一个算法,常用自然语言、框图语言和程序设计语言去完成.

①自然语言

自然语言就是人们日常使用的语言,可以是汉语、英语或数学语言等.

用自然语言设计算法的优点是通俗易懂,缺点是如果算法中包含判断和转向,并且操作步骤较多时,它就不那么直观清晰了.

②框图语言

框图语言是指用规定的图形符号来描述算法的一种图形语言.

用框图设计算法,具有直观、结构清晰、条理分明、通俗易懂、便于检查修改及交流等优点.

③程序设计语言

程序设计语言是指把一个算法以程序的形式编写出来所使用的语言.

〈点拨〉 当今社会已经进入了数字时代,许多问题都要借助计算机来解决.计算机只认识程序语言,它不认识其他语言,这就是引入算法的必要性.

►【例1】 (原创题)初学算法,对“算法”二字不要过多地纠缠,把它简单地理解为“步骤”就可以了.做练习时,可从翻译解过的一些题的解题过程为算法做起,每练一例都会有一点儿提高.

写出求函数 $y=x^2-5x+4$ 的任一函数值的一个算法.

思路分析:设想你正在上机,因此,输入 x 与输出 y 是第一步与最后一步,这两步必不可少.设计其他步骤与以往学习的计算函数值是一样的.

规范解答:第一步,输入一个自变量 x 的值.

第二步,计算 $y=x^2-5x+4$.

第三步,输出 y .

反思 写算法,就是用适当的语言把解决问题的步骤写清楚.现在我们应该练习的是用自然语言来写算法,写明白就可以了.

►【变式1】 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} (x \leq -2), \\ \lg(x+2) (x > -2). \end{cases}$ 设计一个求这个函数的任一函数值的算法.

规范解答:第一步,输入 x .

第二步,判断 $x \leq -2$ 是否成立. 若成立,则计算 $y = \frac{1}{x}$; 否则计算 $y = \lg(x+2)$.

第三步,输出 y .

反思 与以往的学习相比较,本例是由两个知识点合成的,即分类讨论,已知 x 求 $f(x)$.

对算法的理解,当前这个阶段把它理解为步骤就可以了,写算法就是写解题步骤,写清楚、写明白就行了.

►【变式2】 已知正四棱锥的底面边长为 a , 高为 b . 写出求正四棱锥的侧面积的一个算法.

规范解答:第一步,输入 a, b .

第二步,计算 $c = 4a$.

第三步,计算 $d = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$.

第四步,计算 $h' = \sqrt{d}$.

第五步,计算 $S = \frac{1}{2}ch'$.

第六步,输出 S .

反思 写算法有些类似于写解题步骤,就是需写清楚第一步做什么,第二步做什么……对一道数学题来说,解题步骤就是算法,由解题步骤向算法过渡,其任务就是把解题步骤写清楚、写明白,这样的步骤就是算法.

►【变式3】 已知直线 l 的倾斜角是 60° , 且 l 过点 $(1, 2)$. 写出求 l 的方程的一个算法.

规范解答:第一步,设直线 l 的方程为 $y - 2 = k(x - 1)$.

第二步, 计算 $k = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

第三步, 把第二步得到的结果代入第一步设出的方程, 得到 $y - 2 = \sqrt{3}(x - 1)$.

第四步, 整理第三步得到的方程, 得到方程 $\sqrt{3}x - y + 2 - \sqrt{3} = 0$.

反思 对本题, 如果把“写出求 l 的方程的一个算法”改为“求 l 的方程”, 其解答只要在本题的解答中去掉按步排序就可以了, 就是去掉“第一步”、“第二步”、“第三步”、“第四步”这十二个字, 同时删去字里行间中出现的这些字. 继这段话之后, 读者对算法的认识多少能有一点儿提高.

►【变式 4】直线与圆的位置关系在算法中也能得到解释. 设计一个判断圆 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ 和直线 $Ax + By + C = 0$ 的位置关系的算法.

其中, $r > 0, A^2 + B^2 \neq 0$.

规范解答: 第一步: 输入圆心的坐标 (x_0, y_0) 和半径 r 、直线方程的系数.

第二步: 计算 $z_1 = Ax_0 + By_0 + C$.

第三步: 计算 $z_2 = A^2 + B^2$.

第四步: 计算 $d = \frac{|z_1|}{\sqrt{z_2}}$.

第五步: 判断 d 与 r 的大小关系. 若 $d > r$, 则圆与直线相离; 若 $d = r$, 则圆与直线相切; 若 $d < r$, 则圆与直线相交.

反思 写算法离不开解题中的思维. 如, 本题中, 判断圆与直线的位置关系, 我们自然想到了切入点: 是圆心到直线的距离 d 与圆的半径 r 相比较,

即 $\begin{cases} d > r, \\ d = r, \text{并以此去定论.} \\ d < r \end{cases}$

算法不是唯一的. 本题还可以先由 $\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$ 得

到一个方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), 然后据 $\begin{cases} \Delta < 0, \\ \Delta = 0, \text{定论, 最后以算法的} \\ \Delta > 0 \end{cases}$

格式书写.

知识板块 1.1.2 程序框图与算法的基本逻辑结构

★★★知识点 2 程序框图

计算机解决任何问题都离不开算法。前面我们介绍了用自然语言描述算法，其优点是通俗易懂，并且与以往学习的许多知识点都能很好地衔接起来，缺点是操作步骤较多时，尤其是算法中包括判断和转向时，它就不那么清晰了，更谈不上直观了。

为了直观地表达算法的程序或步骤，以图形的方式来表达它更为我们经常所使用，这样能够清楚地展现算法的逻辑结构，一图胜万语。

下面我们就来规范程序框图的体系。

(1) 程序框图的含义

〔理解〕 通常用一些通用图形符号构成一个图来表示算法，这种图称为程序框图或流程图。

例如，用公式法解二元一次方程组的算法可用程序框图形象地描述为图 1-1-1 的形式。

每一程序框图中都有许多程序框、指向线（或称流程线）和文字说明，这些符号都有特定的含义，被大家普遍采用。下面列表给出一些常用的表示算法步骤的图形符号。

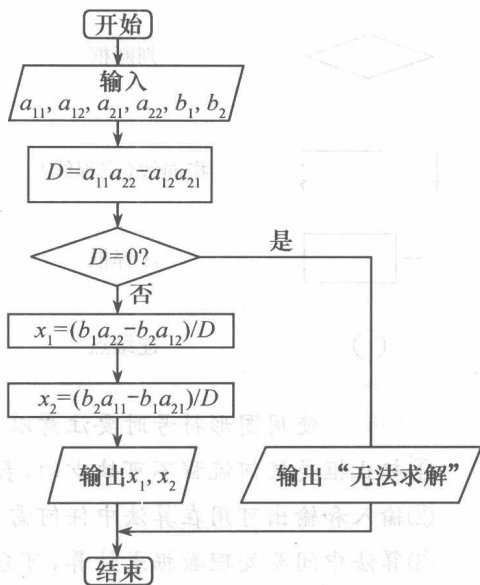
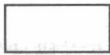


图 1-1-1

图形符号	名称	符号表示的意义
	起止框(终端框)	程序框图的开始或结束
	输入、输出框	数据的输入或者结果的输出

续表

图形符号	名称	符号表示的意义
	处理框(执行框)	赋值、执行计算语句、结果的传送
	判断框	根据给定条件判断, 如果成立, 则在出口处注明“是”或“Y”; 否则注明“否”或“N”
	指向线(流程线)	指明流程进行的方向
	注释框	帮助理解程序框图
	连结点	连结程序框图的两部分

〈点拨〉 使用图形符号时要注意以下几点:

- ①起止框是任何流程不可缺少的, 表明程序有始有终;
- ②输入和输出可用在算法中任何需要输入、输出的位置;
- ③算法中间要处理数据或计算, 可分别写在不同的处理框内;

④当算法要求你对两个不同的结果进行判断时, 判断条件要写在判断框内;

⑤一个算法步骤到另一个算法步骤用流程线连结, 如图 1-1-2.

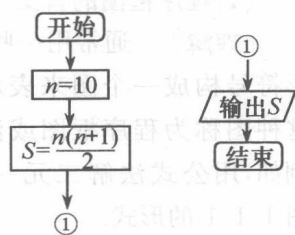


图 1-1-2

(2) 画程序框图的规则

[理解] ①画程序框图, 统一使用标准的图形符号, 不能另造.

②程序框图一般按从上到下、从左到右的方向画.

③除了判断框之外, 大多数流程图符号只有一个进入点和一个退出点, 判断框是唯一具有超过一个退出点的符号.

④判断有两种. 一种是针对“是”与“不是”两个分支的判断, 有且仅有两个结果; 另一种是多个分支的判断, 有几种不同的结果.

⑤在图形符号内描述的语言要简练清楚。

〈点拨〉 以上规则是每一个学习或研究算法的人必须共同遵守的,否则就不成方圆了。

►【例2】 (原创题)程序框图的作用是承上启下,用自然语言描述的算法可以通过程序框图得到直观、清晰的表示,将来我们还会了解到,借助程序框图还可以编写程序,让计算机执行。现阶段我们需要练习的是,把用自然语言描述的算法翻译成用程序框图表示的算法,做好编写程序的前期准备工作。

给出算法如下:

第一步,输入 a, b, c 。

第二步,计算 $d = a^2 + b^2 + c^2$ 。

第三步,计算 $e = \sqrt{d}$ 。

第四步,输出 e 。

画程序框图表示这个算法。

思路分析: 根据程序框图所使用的符号的意义,把每一步的内容写在相应的图形符号内,用指向线把它们连结起来即可。

规范解答: 画出程序框图,见图 1-1-3。

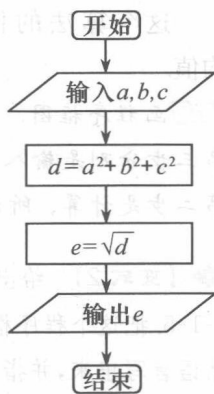


图 1-1-3

反思 本例的背景是求长方体的对角线的长, 其中 a 、 b 、 c 分别是长方体的长、宽、高。

画程序框图, 起止框或者称终端框是不可缺少的, 表明程序有始有终。其他程序框要根据需要来选择, 如: 输入 a 、 b 、 c 与输出 e , 我们选择了平行四边形框, 即输入、输出框; 计算 $d = a^2 + b^2 + c^2$ 及 $e = \sqrt{d}$, 这是对数据的处理, 我们选择了矩形框, 即处理框或者称执行框。

程序框图本身也是算法, 其形式是图形形式。对此可以类比函数来理解。例如, $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 是一个函数, 形式是解析式形式, 画出它的图象, 这个图象仍表示这个函数, 其形式是图象形式。

►【变式1】 给出一个算法：

第一步，输入 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 。

第二步，计算 $x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ 。

第三步，输出 x 。

把这个算法用程序框图表示出来，并分析这个算法的作用。

规范解答：程序框图见图 1-1-4。

这个算法的作用：求 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均值。

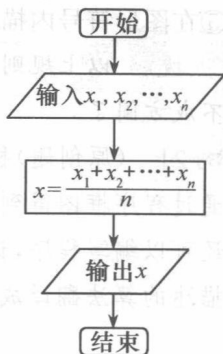


图 1-1-4

反思画程序框图，要根据算法的每一步的意义来画。在本题中，第一步、第三步分别是输入、输出，所以，它们对应的图形都是输入、输出框；而第二步是计算，所以，它对应的图形就是处理框了。

►【变式2】 给出一个程序框图，见图 1-1-5。把这个程序框图表示的算法用自然语言写出来，并指出该算法的功能。

规范解答：用自然语言写出算法就是：

第一步，输入 x 。

第二步，判断 $x-1$ 与 0 的大小。

若 $x-1 \geq 0$ ，则输出 $x-1$ ；否则，输出 $1-x$ 。

该算法的功能是：求 $x-1$ 的绝对值，其中 x 是实数。

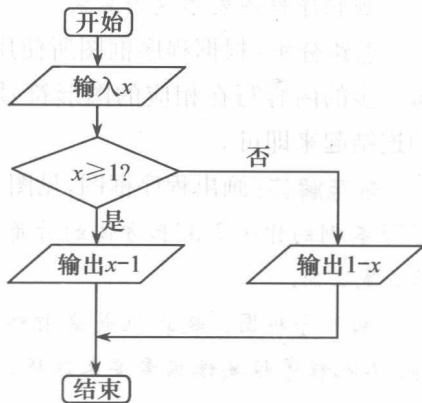


图 1-1-5

反思用自然语言和程序框图语言可以描述同一个算法，它们可以相互转化，从这两个角度去认识算法，有助于加深对算法的理解。

★★★知识点3 算法的基本逻辑结构

任何一个算法均由以下三种结构构成。

(1) 顺序结构

[理解] 顺序结构就是按顺序执行的一种结构,由若干个依次执行的步骤组成.顺序结构是任何一个算法都离不开的基本结构.

[点拨] 顺序结构强调的是程序执行的先后顺序.例如,如图 1-1-6 所示,虚线框内是一个顺序结构.其中 A、B、C 三个框是依次执行的,只有在执行完 A 框所指定的操作后,才能接着执行 B 框所指定的操作,也只有在执行完 B 框所指定的操作后,才能执行 C 框所指定的操作.

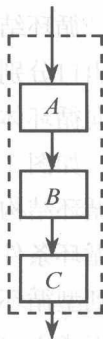


图 1-1-6

(2) 条件结构

[掌握] 在一个算法中,经常会遇到一些条件的判断,算法的流程根据条件是否成立有不同的流向,这种先根据条件做出判断再决定执行哪一种操作的结构叫做条件结构(也叫选择结构、分支结构、判断结构).

条件结构在程序框图中用判断框来表示,在判断框内写上条件,它有两个出口,分别对应着满足条件和满足条件时所执行的不同指令.

[点拨] 条件结构有些类似于分类讨论.例如,如图 1-1-7(1)所示,虚线框内是一个条件分支结构,此结构中包含一个判断框,根据给定的条件 P 是否成立而选择执行 A 框或 B 框,其中,条件 P 可以是“ $x \geq 0$ ”、“ $y \geq 1$ ”或“ $x > y$ ”,等等.

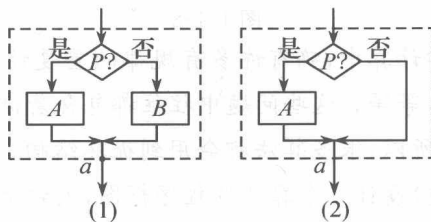


图 1-1-7

要注意,无论条件 P 是否成立,继判断之后,程序只能执行 A 框或 B 框之一,不可能既执行 A 框又执行 B 框,也不可能 A 框、B 框都不执行.无论走哪一条路径,在执行完 A 框或 B 框之后都经过 a ,然后脱离本条件结构.

A 或 B 两个框中可以有一个是空的,即不执行任何操作,如图 1-1-7(2) 所示.

(3) 循环结构

[掌握] 在一些算法中,经常会出现从某处开始,按照一定的条件反复执行某些步骤的情况,这就是循环结构.其中,反复执行的步骤称为循环体.

循环结构在程序框图中也是用判断框来表示,在判断框内写上条件,两个出口分别对应着条件成立和条件不成立时执行的不同指令,其中一个要指向循环体,然后再从循环体回到判断框入口处.

如图 1-1-8 所示,循环结构有两种形式,即当型和直到型.这两种形式的循环结构在执行流程上有所不同.当型循环结构是先判断后执行,即先判断循环条件是否成立,当条件满足时执行循环体,不满足时退出循环体;而直到型循环结构却是先执行后判断,即先执行一次循环体,再判断循环条件是否成立.当条件不满足时执行循环体,满足时退出循环体.

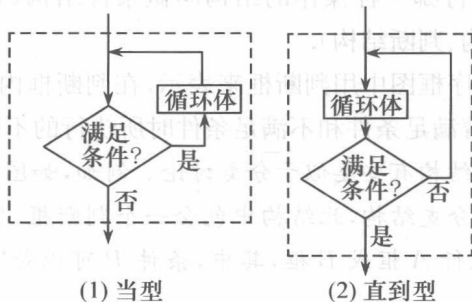


图 1-1-8

〈点拨〉 在科学计算中,确有许多有规律的重复计算.例如,累加求和问题,累乘求积问题,等等.这些问题中往往都包含着循环过程.循环过程非常适合计算机处理,所以,很多算法都会用到循环结构.

► **【例 3】** (原创题)设计一个算法的程序框图,大致上分三步:

第一步,用自然语言描述算法步骤;

第二步,确定每一个算法步骤所包含的逻辑结构,并用相应的程序框图来表示,先得到该步骤的程序框图;

第三步,将所有步骤的程序框图用流程线连结起来,并加上终端框,就得到了表示整个算法的程序框图.

画程序框图表示点到直线的距离公式.

思路分析: 点 (x_0, y_0) 到直线 $Ax + By + C$

$= 0$ 的距离是 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. 先写出语

言形式的算法, 再将其翻译成程序框图.

规范解答: 算法如下:

第一步, 输入 x_0, y_0, A, B, C .

第二步, 计算 $a = Ax_0 + By_0 + C$.

第三步, 计算 $b = A^2 + B^2$.

第四步, 计算 $d = \frac{|a|}{\sqrt{b}}$.

第五步, 输出 d .

程序框图见图 1-1-9.

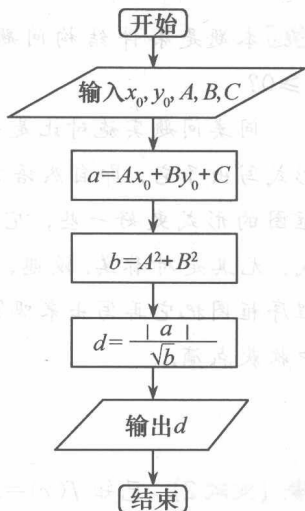


图 1-1-9

反思 本例的算法结构是单一的顺序结构, 其特点是自上而下依次执行各个步骤.

任何一个算法结构都离不开顺序结构.

解答中, 为什么对 $\sqrt{A^2 + B^2}$ 分两次来计算呢? 即计算 $b = A^2 + B^2$, 再计算 $\sqrt{b}$. 在后续的学习中你将了解到, 计算机里面定义了一个函数: $\text{SQR}(x) = \sqrt{x}$, 据此 $\sqrt{b} = \text{SQR}(b)$. 对 $|Ax_0 + By_0 + C|$ 分两次计算, 也是这个缘故.

►【变式 1】 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 (x \geq 0), \\ 10 (x < 0). \end{cases}$ 用自

然语言写出求 $f(x)$ 的任一函数值的一个算法, 并画出程序框图.

规范解答: 记 $y = f(x)$.

算法如下:

第一步, 输入 x .

第二步, 判断 x 的符号. 若 $x \geq 0$, 执行第三步; 否则, 输出 10, 算法结束.

第三步, 计算 $y = x^3$.

第四步, 输出 y .

程序框图见图 1-1-10.

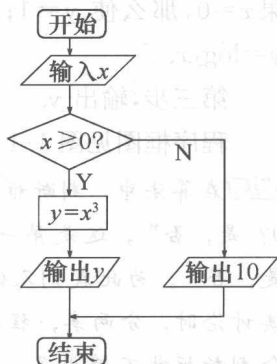


图 1-1-10

反思 本题是条件结构问题, 产生分支的原因是算法中出现了判断, 即 $x \geq 0$?

同类问题实施对比是一种好的学习方法. 本题中的算法, 我们以两种形式写出了它, 即自然语言形式和程序框图形式. 相比之下, 我们感到程序框图的形式更好一些, 它直观形象, 简洁明了, 其中又蕴涵了数学的美感, 尤其是对称美. 设想, 删除解答中的自然语言形式的书写, 你能根据程序框图把它再写出来吗? 这就是对比的学习方法. 不妨一试, 或许于其中收获点滴.

➡ **【变式2】** 已知 $f(x) = \begin{cases} 2^x (x < 0), \\ 1 (x = 0), \\ \log_2 x (x > 0). \end{cases}$

用自然语言写出求 $f(x)$ 的任一值的一个算法, 并画出程序框图.

规范解答: 记 $y = f(x)$.

算法如下:

第一步, 输入 x .

第二步, 如果 $x < 0$, 那么使 $y = 2^x$; 如果 $x = 0$, 那么使 $y = 1$; 如果 $x > 0$, 那么使 $y = \log_2 x$.

第三步, 输出 y .

程序框图见图 1-1-11.

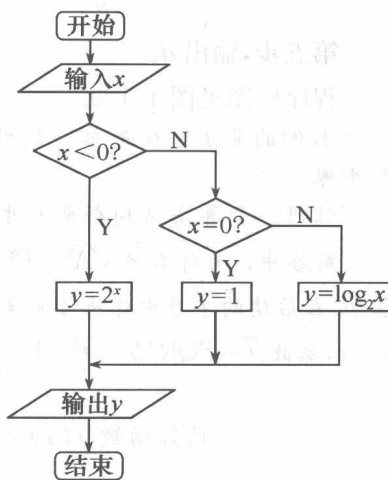


图 1-1-11

反思 在算法中, 判断框可以有两个或两个以上的情况. 如, 本题中, “ $x < 0$? 是, 否”, 这是第一次判断, 其中“否”的情况又可划分为“ $x = 0$? 是, 否”, 为此我们又做出了第二次判断. 与以往学习的内容相比较, 分类讨论时, 分两类, 程序框图中判断框只需一个, 分三类或三类以上, 一个判断框就不够用了, 本题的解答过程就涉及这一点.

➡ **【变式3】** 画出求函数 $f(x) = ax + b$ 的零点的程序框图.

规范解答: 函数 $f(x) = ax + b$ 的零点就是方程 $ax + b = 0$ 的解.