

“十二五”国家重点图书出版规划项目

走向数学丛书

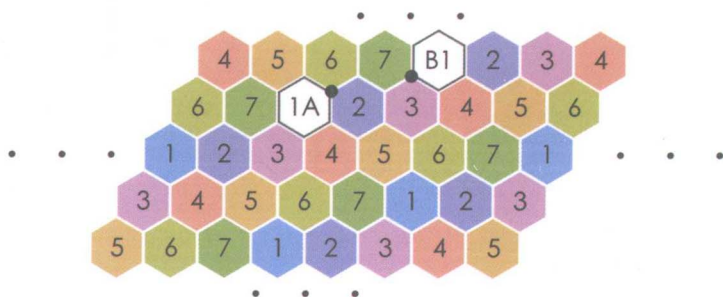


拉姆塞理论

—入门和故事

RAMSEY THEORY—INTRODUCTION AND STORIES

著 李 乔 李雨生



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

拉姆塞理论

——入门和故事

RAMSEY THEORY—INTRODUCTION AND STORIES

著 李 乔 李雨生



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

拉姆塞理论: 入门和故事 / 李乔, 李雨生著. —
大连: 大连理工大学出版社, 2011. 5
(走向数学丛书)
ISBN 978-7-5611-6145-6

I. ①拉… II. ①李… ②李… III. ①拉姆塞理论
IV. ①O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 060310 号

大连理工大学出版社出版

地址: 大连市软件园路 80 号 邮政编码: 116023

发行: 0411-84708842 邮购: 0411-84703636 传真: 0411-84701466

E-mail: dutp@dutp.cn URL: <http://www.dutp.cn>

沈阳新华印刷厂印刷

大连理工大学出版社发行

幅面尺寸: 147mm×210mm
2011 年 5 月第 1 版

印张: 7.5 字数: 125 千字
2011 年 5 月第 1 次印刷

责任编辑: 刘新彦 王 伟

责任校对: 李 慧 任俊杰

封面设计: 孙 元 齐冰洁

ISBN 978-7-5611-6145-6

定 价: 25.00 元

续编说明

自从 1991 年“走向数学”丛书出版以来,已经出版了三辑,颇受我国读者的欢迎,成为我国数学传播与普及著作的一个品牌。我想,取得这样可喜的成绩主要原因是:中国数学家的支持,大家在百忙中抽出宝贵时间来撰写此丛书;天元基金的支持;与湖南教育出版社出色的出版工作。

但由于我国毕竟还不是数学强国,很多重要的数学领域尚属空缺,所以暂停些年不出版亦属正常。另外,有一段时间来考验一下已经出版的书,也是必要的。看来考验后是及格了。

中国数学界屡屡发出继续出版这套丛书的呼声。大连理工大学出版社热心于继续出版;世界科学出版社(新加坡)愿意出某些书的英文版;湖南教育出版社也乐成其事,

尽量帮忙。总之,大家愿意为中国数学的普及工作尽心尽力。在这样的大好形势下,“走向数学”丛书组成了以冯克勤教授为主编的编委会,领导继续出版工作,这实在是一件大好事。

首先要挑选修订重印一批已出版的书;继续组稿新书;由于我国的数学水平距国际先进水平尚有距离,我们的作者应面向全世界,甚至翻译他们的优秀著作。

我相信在新的编委会的领导下,丛书必有一番新气象。
我预祝丛书取得更大成功。

王 元

2010年5月于北京

编写说明

从力学、物理学、天文学,直到化学、生物学、经济学与工程技术,无不用到数学.一个人从入小学到大学毕业的十六年中,有十三四年有数学课.可见数学之重要与其应用之广泛.

但提起数学,不少人仍觉得头痛,难以入门,甚至望而生畏.我以为要克服这个鸿沟还是有可能的.近代数学难于接触,原因之一大概是由于其符号、语言与概念陌生,兼之近代数学的高度抽象与概括,难于了解与掌握.我想,如果知道讨论对象的具体背景,则有可能掌握其实质.显然,一个非数学专业出身的人,要把数学专业的教科书都自修一遍,这在时间与精力上都不易做到.若停留在初等数学水平上,哪怕做了很多难题,似亦不会有助于对近代数学的了

解.这就促使我们设想出一套“走向数学”小丛书,其中每本小册子尽量用深入浅出的语言来讲述数学的某一问题或方面,使工程技术人员、非数学专业的大学生,甚至具有中学数学水平的人,亦能懂得书中全部或部分含义与内容.这对提高我国人民的数学修养与水平,可能会起些作用.显然,要将一门数学深入浅出地讲出来,决非易事.首先要对这门数学有深入的研究与透彻的了解.从整体上说,我国的数学水平还不高,能否较好地完成这一任务还难说.但我了解很多数学家的积极性很高,他们愿意为“走向数学”撰稿.这很值得高兴与欢迎.

承蒙国家自然科学基金委员会、中国数学会数学传播委员会与湖南教育出版社的支持,得以出版这套“走向数学”丛书,谨致以感谢.

王 元

1990 年于北京

新版前言

初版是讲真实数学内容和相关人物的故事书. 时光流转, 故事和人物随之发展^①, 所幸(不幸?)故事的主要情节没有突变, 使得不至于太难续写.

根据读过初版的几位数学界同仁的说法, 初版还算有点吸引力, 主要来自于它的“数学故事书的性质”. 因此初版序最后一段“阅读建议”就显得有些迂腐了. 现在把初读建议改为: 在气定神闲时分, 随兴通篇翻阅. 初读时兴趣不大的内容, 不妨先跳过以保持阅读的连贯性. 拉姆塞理论(Ramsey Theory)本身气象万千, 愿这本小书能引起您的

^① 例如, 故事主角之一 Paul Erdős 在 1996 年去世; 初版序中摘引他们语录的三位当时在世的组合学家中的两位——G. C. Rota 和 F. Harary 也分别在 1999 年和 2005 年作故.

兴趣,从而带给您一些神游数学世界的感受.

本书初版由李乔撰写,再版由李乔、李雨生修订.书中内容为入门性质,但符号力求国际化,可能产生歧义的我们加以说明.拉姆塞理论的研究,近年来常被一些数学大奖垂青.数学中一些问题,特别是离散数学中的一些通俗易懂但又无法用初等方法求解的问题,其研究过程往往曲折而多挫折:研究者的大多数进展对问题的本身不尽理想,但这些成果在其他方面别有一番景象,真所谓天道酬勤.有些幸运的是,拉姆塞理论中的许多问题正是这类问题,它们的研究表现出勃勃生机和无限魅力.有鉴于此,要是这本小书能为初学者提供一块垫脚石,我们将以此为傲!

感谢中国组合数学和图论学会理事长,同济大学邵嘉裕教授,他在我改版时多次赐教且修改部分章节.

路漫漫其修远兮,吾将上下而求索.愿读者在探索过程中快乐工作,贡献成果.感谢读者的耐心和付出的时间.

李 乔(上海交通大学)

李雨生(同济大学)

2010 年 12 月

初版序

弗朗克·普鲁姆泼顿·拉姆塞(Frank Plumpton Ramsey, 1903—1930)堪称旷世奇才。他在世只有 26 年,却在多门学科留下了不少至今还在被人钻研开发的深刻成果。本书附录(一)的第一篇短文概要介绍了他的生平业绩,不妨先读。他在 1928 年证明的一个数学定理被世人称做拉姆塞定理;而以这个定理为主根的数学理论则被命名为拉姆塞理论。

从学科分类上说,拉姆塞理论属于组合数学(也称组合学,Combinatorics)。三位当代组合数学名家是这样说的:

“假如要求在组合学中举出一个而且仅仅一个精美的定理,那么大多数组合学家会提名拉姆塞定理。”

——罗塔(Gian-Carlo Rota, 1932—1999)

“数学常常被称做关于秩序的科学. 根据这种观点, 拉姆塞理论的主导精神也许可以用莫兹金(T. S. Motzkin)的一句格言来作最好的概括: 完全的无序是不可能的.”

——格雷厄姆(Ronald L. Graham, 1935—)

“毫无疑问, ‘拉姆塞理论’现在是组合学中一个业已确立, 而且兴旺发达的分支. 其结果(在被发现后)往往易于陈述但难以证明; 这些结果既精巧多采, 又十分优美. 尚未解决的问题不可胜数, 而且有意义的新问题还在以超过老问题获解的速度不断涌现.”

——哈拉里(Frank Harary, 1921—2005)

我觉得拉姆塞理论是数学世界的一株奇葩, 它至少具有下面三种引人注目的特点:

(1) 它有相当鲜明的哲学主导思想. 精练地说就是格雷厄姆所引用的那句话: 完全的无序是不可能的.

(2) 它非常质朴. 理论的主要内容, 包括所研究的问题、所得到的结论连同结论的证明, 只需要用很少一点数学概念就能表述; 甚至还可以完全用日常用语来陈述其绝大部分精彩结果.

(3) 它是一门面向未来的学科. 这不仅仅是指上面引用

的哈拉里那段话中最后一句所说的那种意思,更主要的是这个理论从一个方面向人们展示了未知数学世界的浩渺无垠.数学家普遍认为,我们还只是刚刚开始探索拉姆塞理论的真谛和影响.

与上面所说的一切形成强烈对照的是拉姆塞其人和以他命名的理论在关心数学的人们心目中的默默无闻状况.有感于此,虽自知才疏学浅,难以描绘出这株奇葩的神韵,仍不揣浅陋,在拉姆塞英年夭亡 60 周年之际勉力写成这本小书.希望通过它能让更多人了解他和以他命名的数学理论.

读懂本书主要内容几乎不需要专门的数学知识.阅读的一种建议流程如下:

附录(一)(人物介绍的第一篇)→引子(内容+半数以上习题)→第一章(§ 1.5 除外+半数以上习题)→第二章(§ 2.4 除外+半数以上习题)→附录(一)(人物介绍的第二篇)→(第三章 § 3.1, 3.2+第四章 § 4.1, 4.2, 4.5)……→如还想继续阅读本书,可任选前面未列出的内容,顺序自定.

李 乔

1990 年于中国科技大学

安徽合肥

目 录

续编说明	1
编写说明	3
新版前言	5
初版序	7
引 子 抽屉原理	1
练 习 / 9	
一 拉姆塞定理	11
§ 1.1 六人集会问题 / 11	
§ 1.2 拉姆塞定理(简式) / 15	
§ 1.3 拉姆塞数 / 19	
§ 1.4 拉姆塞定理(通式和无限式) / 31	
§ 1.5* 通式和无限式的证明 / 41	
练 习 / 46	
二 几个经典定理	47
§ 2.1 爱尔多希-塞克尔斯定理 / 47	
§ 2.2 舒尔定理和有关结果 / 51	
§ 2.3 范德瓦尔登定理 / 62	
§ 2.4* 范德瓦尔登定理的证明 / 77	
§ 2.5 拉多定理 / 82	

§ 2.6	几种统一的观点 / 87	
	练习 / 99	
三	图的拉姆塞理论	101
§ 3.1	回顾与推广 / 101	
§ 3.2	两个例子 / 104	
§ 3.3	两个定理和一些结果 / 108	
§ 3.4*	二分图与有向图 / 114	
§ 3.5*	非完全图 / 131	
	练习 / 144	
四	欧氏拉姆塞理论	145
§ 4.1	一个平面几何问题 / 145	
§ 4.2	从平面到空间 / 148	
§ 4.3*	一般问题 / 154	
§ 4.4*	拉姆塞点集(续) / 161	
§ 4.5	一个超大数 / 165	
	练习 / 168	
五	拉姆塞理论的一些进展	170
§ 5.1	导 言 / 170	
§ 5.2	对角拉姆塞数的估计 / 173	
§ 5.3	非对角拉姆塞数的估计 / 177	
§ 5.4	范德瓦尔登数 / 181	
§ 5.5	构造性下界和波沙克猜想 / 185	
六	拉姆塞、爱尔多希、葛立恒其人、其事	195
	参考文献	216

引 子

抽屉原理

“任取三粒围棋子,其中必有二子同色.”

“任意 13 个人中,一定有二人在同一月份出生.”

“从任意三双鞋中任取四只,其中一定有左右相配的一双鞋.”

.....

对上面所说的这些结论,大家只要稍加思索,就会点头称是.不仅如此,大家肯定还能根据同样的“原理”编造出许许多多新命题.这个大家都有所领会的“原理”究竟是什么?它的一般情形可以用形象的语言表述为:

“把多于 n 个东西任意分放进 n 个空抽屉,那么一定有一个抽屉中放进了至少两个东西.”

我们把这个原理叫“抽屉原理”.因为 19 世纪的德国数

学家狄利克雷 (P. G. L. Dirichlet, 1805—1859) 曾明确地把这个原理用于数学证明 (见下面的命题 0.0), 并把它叫做抽屉原理. 抽屉原理的一种更一般的说法是:

“把多于 $k \times n$ 个东西任意分放进 n 个空抽屉, 那么一定有一个抽屉中放进了至少 $k+1$ 个东西.”

这个结论很容易证明, 因为经数量化后, 它所说的无非是这样一个简单的算术命题:

“对于任意一组数值来说, 不可能其中每个数值都小于这组数的平均值.”

以前没听说过这个原理的读者一定会问: 这样简单的东西也有用吗? 以前对它有所了解的读者也一定知道, 利用它可以解决或编造出很多巧妙的问题.

下面我们举几个至少可以说不平凡的结论, 而抽屉原理是证明这些结论的关键所在. 这类例子很多, 我们不想在这个方面多费笔墨, 因为抽屉原理仅仅是展开这本小书主题的一个引子. 说它是引子, 因为它符合主题的精神, 而且也确实是拉姆塞定理的一个平凡特款——读者往后会更具体地理解这些话的意思; 它也只能充当引子, 因为以后要讲到的每个定理都远比它深刻, 抽屉原理至多只能算是拉姆塞理论的一个远祖.

第一个例子正是抽屉原理因此得名的那个结果, 这是狄利克雷在 1842 年证明的关于用有理数逼近实数的一个

著名结论.

命题 0.0 对任一给定的实数 x 和正整数 n , 一定存在正整数 $p \leq n$ 和整数 q , 使得

$$|p \times x - q| < \frac{1}{n}.$$

证明 把实区间 $[0, 1)$ 等分成 n 个左闭右开的区间 $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) (i=1, 2, \dots, n)$, 它们成为 n 个“抽屉”. 再考察 $n+1$ 个实数 $mx - \lfloor mx \rfloor (m=0, 1, \dots, n)$, 这里用 $\lfloor a \rfloor$ 表示 $\leq a$ 的最大整数), 它们显然都在实数区间 $[0, 1)$ 之中. 根据抽屉原理, 这 $n+1$ 个数中一定有两个属于同一“抽屉”, 即一定有正整数 $i \leq n$ 和非负整数 $m' < m'' \leq n$, 使得

$$m'x - \lfloor m'x \rfloor \text{ 和 } m''x - \lfloor m''x \rfloor \text{ 都属于 } \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right).$$

从而有

$$|(m'' - m')x - (\lfloor m''x \rfloor - \lfloor m'x \rfloor)| < \frac{1}{n},$$

取 $p = m'' - m', q = \lfloor m''x \rfloor - \lfloor m'x \rfloor$, 即得命题. $\square$

命题 0.1 任一分数 a/b 写成十进位小数时, 不是有限位小数就是无限位循环小数; 在后一情形, 其循环周期 (即最小循环节之长) 小于 b .

证明 不妨设 $b > a > 0$. 把 a/b 写成十进位小数后, 小数点后的第 i 位数记成 $c_i (i=1, 2, \dots)$, 即