高等数学

（加强版）

湘潭大学文科高等数学教学改革课题组　编

科学出版社

高等数学

（加强版）

湘潭大学文科高等数学教学改革课题组　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书将高等数学的主干内容——一元函数微积分与多元函数微积分有机地结合起来，针对文科类（含经济、管理类）专业对高等数学的不同要求，将课程内容分成若干模块. 本书分基础版与加强版两册出版. 基础版为必修模块，内容包括函数与极限基础、函数微分学基础、一元函数积分学基础、微分方程初步，书末还附有常用的数学公式与希腊字母、常用积分公式、部分习题答案与提示；加强版为选修模块，内容包括极限、连续与导数续论、微分中值定理与导数的应用、二重积分与无穷级数、微分方程与差分方程. 学生可根据专业的不同要求选修相关模块. 每节后配有习题，习题分为 A，B 两组，A 组为基础题，B 组为综合题.

本书体系完整、结构严谨、逻辑清晰、叙述清楚、通俗易懂，并配有丰富的例题与习题可供高等院校文科类（含经济、管理类）专业的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 加强版/湘潭大学文科高等数学教学改革课题组编. —北京：科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-029974-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①湘… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 005233 号

责任编辑：王 静 房 阳/责任校对：张小霞

责任印制：张克忠/封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2011 年 9 月第二次印刷 印张：14 1/2

印数：4 501—5 500 字数：277 000

定价：26.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

中学新课程标准已在全国范围内推广，在数学课程标准中，部分属于大学数学的教学内容下放到中学，而以往部分属于初等数学的教学内容没有涉及；并且在教学中提倡选用与生活实际密切相关的素材、现实世界中的常见现象或其他科学的实例，展现数学的概念、结论，体现数学的思想、方法，忽略一些抽象的推理与证明.

为了更好地与中学数学教学相衔接，帮助文科类（含经济、管理类）专业的学生掌握、理解高等数学基础知识，掌握基本方法与技能，我们组织了数位工作在教学一线的中青年教师，针对模块化教学的特点，结合自身多年的教学实践和教学经验，考虑到不同专业的要求和跨专业学习的需求，编写了本书. 本书采用与传统教材不一样的分级模块形式，针对文科类（含经济、管理类）专业对高等数学的不同要求，将课程内容分成 8 个模块，分基础版和加强版出版. 基础版内容含 4 个必修模块：函数与极限基础、函数微分学基础、一元函数积分学基础、微分方程初步，所需教学课时约 64 学时；加强版内容含 4 个选修模块：极限、连续与导数续论、微分中值定理与导数的应用、二重积分与无穷级数、微分方程与差分方程，所需教学课时约 80 学时. 每个模块又由相应的子模块组成，学生可根据专业需要选修相关的模块及子模块. 本书可作为高等院校文科类（含经济、管理类）专业高等数学课程教材，也可供自学者使用.

本书特色鲜明，尽量做到知识点由浅入深、由粗到细，希望能保持学生学习的统一性与连贯性.

在基础版中，我们放弃了传统意义上的经典，尽可能地绕开数学的抽象，试图以直观、描述性的形式来展示数学的内涵，而对于知识点则试图广泛涉及，即追求宽度、广度，而不是深度. 例如，不介绍极限的“ε-N，ε-δ”定义，不局限于一元函数的讲授. 适合全体文科类（含经济、管理类）专业选用.

在加强版中，我们力求重拾传统的经典. 针对学生的学习要求，培养对数学抽象的理解，让他们尽可能地理解高等数学的专业术语，养成严格的数学思维，能够较好地利用数学工具，并以严谨、抽象的形式来展示数学的内涵，增加对知识点进一步的理解与掌握，尽量做到刨根究底，追求深度. 适合经济、管理类专业选用.

本书的编写得到湘潭大学教务处、数学与计算科学学院的大力支持.

由于我们水平有限，成书仓促，书中难免有疏漏之处，敬请有关专家、学者及使用本书的老师、同学和读者批评指正.

编　者

2010 年 8 月于湘潭

目　　录

前言

第 1 章　极限、连续与导数续论 …… 1

1.1　极限与连续续论 …… 1

1.2　极限的判别准则 …… 20

1.3　高阶导数与高阶偏导数 …… 29

1.4　函数的求导法则 …… 35

本章内容小结 …… 62

第 2 章　微分中值定理与导数的应用 …… 64

2.1　微分中值定理 …… 64

2.2　洛必达法则 …… 71

2.3　泰勒公式 …… 78

2.4　函数的单调性 …… 83

2.5　函数的极值与最大值、最小值 …… 86

2.6　一元函数图形的描绘 …… 102

2.7　函数的弹性 …… 108

本章内容小结 …… 115

第 3 章　二重积分与无穷级数 …… 117

3.1　二重积分的概念与性质 …… 117

3.2　二重积分的计算 …… 123

3.3　反常积分 …… 133

3.4　重积分的应用 …… 140

3.5　常数项级数的判别法 …… 146

3.6　幂级数 …… 157

3.7　函数展开成幂级数 …… 166

3.8　幂级数的应用 …… 173

本章内容小结 …… 176

第 4 章　微分方程与差分方程 …… 179

4.1　几类可降阶的高阶微分方程 …… 179

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

4.2 二阶常系数线性微分方程 …… 182
4.3 微分方程在经济学中的简单应用 …… 193
4.4 差分方程简介 …… 197
本章内容小结 …… 210
部分习题参考答案 …… 212
参考文献 …… 226

第 1 章　极限、连续与导数续论

相对于基础版介绍的极限的描述性定义，本章将首先引入极限的严格数学定义，进而培养严谨的数学推理. 在此基础上，进一步理解函数连续与可导的内涵，加深对连续函数和可导函数性质的理解，掌握相应的求导法则.

1.1　极限与连续续论

1. 理解极限的 ε-N，ε-δ，ε-M 定义；
2. 会利用上述定义证明数列与函数极限；
3. 了解极限的一些简单应用.

1.1.1　一元函数的极限与连续

1. 数列极限的定义

从基础版的学习可以知道，半径为 r 的圆，记圆内接正 n 边形的面积为

$$S_n=f(n),$$

则当 n 无限增大时，S_n 无限地接近圆的面积 πr^2，即 S_n 以圆面积 πr^2 为极限.

进一步观察下列收敛数列，当 n 无限增大时，数列的一般项 x_n 的变化趋势：

(1) $x_n=1+\dfrac{1}{n}$：$2,\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{4},\cdots$；

(2) $x_n=1-\dfrac{1}{n}$：$0,\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots$；

(3) $x_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$：$0,\dfrac{3}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{4},\dfrac{4}{5},\cdots$.

不难发现，在这三个数列中，当 n 无限增大时，x_n 都无限地接近于 1，即

当 n 无限增大时，x_n 与 1 的距离无限地接近于 0，

或者说，

随着 n 越来越大，绝对值 $|x_n-1|$ 越来越小，

即

当 n 无限增大时，$|x_n-1|$ 无限接近于 0 .

所谓无限接近于 0，即在 n 无限增大的过程中，$|x_n-1|$ 可以任意小.那么什么

是“$|x_n-1|$可以任意小”呢？例如，当$n>10000$时，$|x_n-1|<\frac{1}{10000}$是否表明$|x_n-1|$可以任意小？当然不能. 因为虽然$\frac{1}{10000}$很小，但它却比$\frac{1}{100000}$大. “$|x_n-1|$可以任意小”是指：不论事先指定一个多么小的正数ε，在n无限增大的变化过程中，总有那么一个时刻(也就是n增大到一定程度)，在此时刻以后，$|x_n-1|$都小于那个事先指定的小正数ε.

定义 1.1.1 设数列$\{x_n\}$，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε(无论多么小)，总存在一个正整数N，当$n>N$时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，则称**常数a为数列$\{x_n\}$当n趋于∞时的极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad 或 \quad x_n\to a\,(n\to\infty).$$

ε-N 定义为

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$.

注 在定义 1.1.1 中，ε是用来描述x_n与a的接近程度，N表示总存在那么一个时刻(即描述n充分大的程度)，其中ε为任意给定的不论多么小的正数，N通常随ε而确定，但不是唯一确定的.

如基础版所表述的，如果数列$\{x_n\}$有极限，就称数列$\{x_n\}$是**收敛的**；否则，就称数列$\{x_n\}$是**发散的**. 如果数列$\{x_n\}$以a为极限，也称**数列$\{x_n\}$收敛于**a.

例 1 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n}=1$.

分析 $|x_n-1|=\left|\frac{n+(-1)^n}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$. 对于$\forall\varepsilon>0$，要使$|x_n-1|<\varepsilon$，只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$，即

$$n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

证 因为$\forall\varepsilon>0, \exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\in\mathbf{N}$，当$n>N$时，有

$$|x_n-1|=\left|\frac{n+(-1)^n}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n}=1.$$

例 2 设$|q|<1$，证明等比数列

$$1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$$

的极限是 0.

分析　对于 $\forall \varepsilon>0$,要使

$$|x_n-0|=|q^{n-1}-0|=|q|^{n-1}<\varepsilon,$$

只要 $n>\log_{|q|}\varepsilon+1$ 就可以了,故可取

$$N=[\log_{|q|}\varepsilon+1].$$

证　因为 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N=[\log_{|q|}\varepsilon+1]$,当 $n>N$ 时,有

$$|q^{n-1}-0|=|q|^{n-1}<\varepsilon$$

恒成立,所以

$$\lim_{n\to\infty}q^{n-1}=0.$$

注　根据数列极限的定义,虽不能求数列的极限,但却能用来验证数列的极限.

数列 $\{x_n\}$ 极限的几何意义　如图 1.1 所示,当 $n>N$ 时,所有的点 x_n 都落在开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内,只有有限个点(至多有 N 个)落在开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之外.

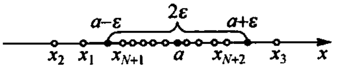

图 1.1

例 3　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0$.

分析　$|x_n-0|=\left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|=\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n+1}$. 对于 $\forall \varepsilon>0$,要使 $|x_n-0|<\varepsilon$,只要 $\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$,即

$$n>\frac{1}{\varepsilon}-1.$$

证　因为 $\forall \varepsilon:0<\varepsilon<1$, $\exists N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]\in\mathbf{N}$,当 $n>N$ 时,有

$$|x_n-0|=\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|=\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n+1}<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0.$$

2. 当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

引例 1.1.1　函数

$$y=1+\frac{1}{x},\quad x\neq0,$$

如图 1.2 所示,和数列 $\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$ 极限一样,

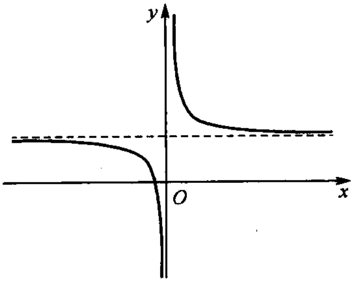

图 1.2

“当$|x|$无限增大时,y无限地接近于 1”,或者说,“当$|x|$无限增大时,$|y-1|$可以任意小”,即对于$\forall \varepsilon>0$,只要$|x|>\frac{1}{\varepsilon}$,

$$|y-1|=\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

恒成立.这时就称x趋于无穷大时,函数$y=1+\frac{1}{x}$以 1 为极限.

定义 1.1.2 设函数$f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义,如果存在常数A,对于任意给定的正数ε(无论多么小),总存在一个正数M,当$|x|>M$时,不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

都成立,则称**常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋于∞时的极限**,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

ε-M 定义为

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists M>0$,当$|x|>M$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

注 在定义 1.1.2 中,ε是用来描述$f(x)$与A的接近程度的,M表示$|x|$充分大的程度,其中ε为任意给定的不论多么小的正数,M通常随ε而确定,但不是唯一确定的.这里的M与定义 1.1.1 中的N所表示的意义相当.

例 4 证明$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

分析 设$f(x)=\frac{1}{x}$,对于$\forall \varepsilon>0$,要使

$$|f(x)-0|=\left|\frac{1}{x}-0\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon,$$

只要$|x|>\frac{1}{\varepsilon}$就可以了.

证 因为$\forall \varepsilon>0, \exists M=\frac{1}{\varepsilon}$,当$|x|>M$时,有

$$|f(x)-0|=\left|\frac{1}{x}-0\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

恒成立,所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

由中学所学的知识可知,直线$y=0$是函数$y=\frac{1}{x}$的图形的渐近线(图 1.3).

一般地,如果$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$,则直线$y=c$称为函数$y=f(x)$的图形的**水平渐近线**.

若考虑当$x\to+\infty$时函数$f(x)$的极限,则只需将定义 1.1.2 中的$|x|>M$改写为$x>M$即可.类似地,考虑当$x\to-\infty$时函数$f(x)$的极限,则只需将定义 1.1.2中的$|x|>M$改写为$x<-M$即可.因此有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists M>0,\text{当 } x>M \text{ 时,有 } |f(x)-A|<\varepsilon,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists M>0,\text{当 } x<-M \text{ 时,有 } |f(x)-A|<\varepsilon.$$

例 5　证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$.

分析　对于 $\forall\varepsilon>0$,要使

$$|f(x)-0|=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-0\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^x<\varepsilon,$$

只要 $2^x>\frac{1}{\varepsilon}$,即 $x>-\log_2\varepsilon$ 就可以了.

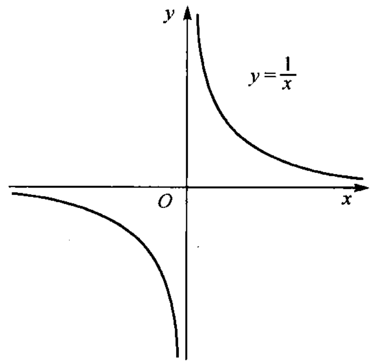

图 1.3

证　因为 $\forall\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$),$\exists M=-\log_2\varepsilon$,当 $x>M$ 时,有

$$|f(x)-0|=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-0\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^x<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0.$$

当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 以 A 为极限的几何意义　当 $x<-M$ 或 $x>M$ 时,函数 $y=f(x)$ 的图形完全落在以直线 $y=A$ 为中心线,宽为 2ε 的带型区域内,如图 1.4 所示.

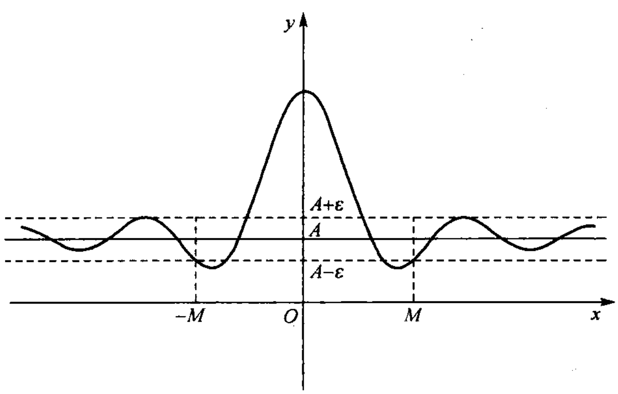

图 1.4

3. 当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

首先利用基础版所学的知识考察下面两个例子.

例 6　函数 $f(x)=x+1$,定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $x\to1$ 时,观察函数的变化趋势.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

如图 1.5 所示，当 $x\to 1$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于 2. 这时称当 $x\to 1$ 时，函数 $f(x)=x+1$ 的极限为 2，即

$$\text{当 } x\to 1 \text{ 时}, f(x) \text{ 无限接近于 } 2.$$

换一种说法则是

$$\text{当 } |x-1| \text{ 无限接近于 0 时}, |f(x)-2| \text{ 可以任意小}.$$

例 7　函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. 当 $x\to 1$ 时，观察函数的变化趋势.

如图 1.6 所示，当 x 无限接近于 1 而不等于 1 时，有 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$，则根据例 6 知，$f(x)$ 无限接近于 2 .因此，当 $x\to 1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 也以 2 为极限.

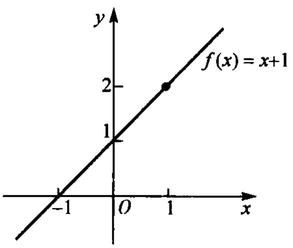

图 1.5

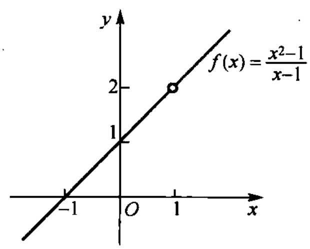

图 1.6

由上面两个例子可以看出，研究当 $x\to 1$ 时函数 $f(x)$ 的极限，是指当 x 充分接近于 1 时 $f(x)$ 的变化趋势，而不是求当 $x=1$ 时 $f(x)$ 的函数值.因此，研究当 $x\to 1$ 时函数 $f(x)$ 的极限问题，与 $f(x)$ 在 $x=1$ 是否有定义无关.一般地，有下列定义：

定义 1.1.3　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε(无论多么小)，总存在一个正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

都成立，则称**常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

ε-δ 定义为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \text{当 } 0<|x-x_0|<\delta \text{ 时，有 } |f(x)-A|<\varepsilon .$$

注　(1) ε 描述 $f(x)$ 与常数 A 的接近程度，δ 表示 x 与 x_0 的接近程度，通常 δ 随 ε 而确定，但不是唯一确定的，一般地，ε 越小，δ 也越小；

(2) $|x-x_0|<\delta$ 表示 x 与 x_0 的距离小于 δ，而 $0<|x-x_0|$ 表示 $x\neq x_0$，因此

$$0<|x-x_0|<\delta$$

表示 x_0 的去心邻域，所以当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 有没有极限，与函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是否有定义并无关系.

例 8　证明 $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)=4$.

分析　设 $f(x)=3x-2$，对于 $\forall\varepsilon>0$，要使

$$|f(x)-4|=|(3x-2)-4|=3|x-2|<\varepsilon,$$

只要 $|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$ 就可以了.

证　设 $f(x)=3x-2$，因为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\frac{1}{3}\varepsilon$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-4|=|(3x-2)-4|=3|x-2|<\varepsilon$$

恒成立，所以

$$\lim_{x\to 2}(3x-2)=4.$$

例 9　证明 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

分析　设 $f(x)=x$，对于 $\forall\varepsilon>0$，要使

$$|f(x)-x_0|=|x-x_0|<\varepsilon,$$

只要取 $\delta=\varepsilon$ 就可以了.

证　设 $f(x)=x$，因为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-x_0|=|x-x_0|<\varepsilon$$

恒成立，所以

$$\lim_{x\to x_0}x=x_0.$$

当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限的几何意义　根据定义 1.1.3，对于任意给定的正数 ε，作两条平行直线 $y=A+\varepsilon$，$y=A-\varepsilon$，总存在一个正数 δ，当 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 且 $x\neq x_0$ 时，有

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon,$$

则当 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 且 $x\neq x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图形上的点都落在两条平行直线 $y=A+\varepsilon$，$y=A-\varepsilon$ 所夹的带型区域内，如图 1.7 所示.

例 10　证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

分析　注意到函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 是没有定义的，但这与函数 $f(x)$ 在该点是否有极限并无关系.当 $x\neq 1$ 时，

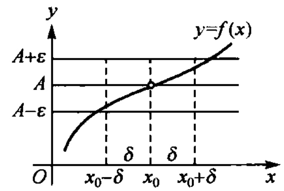

图 1.7

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x-1|.$$

因此,$\forall\varepsilon>0$,要使$|f(x)-A|<\varepsilon$,只要$|x-1|<\varepsilon$就可以了.

证　因为$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\varepsilon$,当$0<|x-1|<\delta$时,有

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x-1|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

在上述当$x\to x_0$时函数$f(x)$的极限定义中,x是既从x_0的左侧也从x_0的右侧趋于x_0的.若只需考虑当x从x_0的左侧($x<x_0$)或从x_0的右侧($x>x_0$)趋于x_0时,函数$f(x)$以A为极限,即函数$f(x)$的左极限与右极限,则有如下定义:

定义 1.1.4　设函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有定义,如果存在常数A,对于任意给定的正数ε(无论多么小),总存在一个正数δ,当$-\delta<x-x_0<0$时,不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

都成立,则称**常数A为函数$f(x)$当x趋于x_0时的左极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\quad 或\quad f(x_0-0)=A.$$

如果对于任意给定的正数ε,总存在一个正数δ,当$0<x-x_0<\delta$时,不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

都成立,则称**常数A为函数$f(x)$当x趋于x_0时的右极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\quad 或\quad f(x_0+0)=A.$$

根据$x\to x_0$时函数$f(x)$的极限的定义,以及左极限和右极限的定义,容易得到下列定理:

定理 1.1.1　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$成立的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

简言之,

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

例 11　设$f(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ x, & x\geqslant0,\end{cases}$试讨论$\lim\limits_{x\to0}f(x)$是否存在.

解　当$x<0$时,

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}1=1,$$

而当$x>0$时,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0,$$

因此，左、右极限都存在，但不相等，根据定理 1.1.1 可知，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

例 12　当 $x\to 0$ 时，讨论 $f(x)=|x|$ 的极限.

解　因为 $f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0.$$

因此

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=0,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0.$$

例 13　函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0,\end{cases}$ 证明$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

证　因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,\qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1,$$

因此

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

4. 函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处连续的定义

已经知道，如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $y=f(x)$的极限等于函数值 $f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 处连续，因此有下列“ε-δ”定义：

定义 1.1.5　函数 $y=f(x)$在 x_0 的某邻域内有定义，如果对于任意给定的正数 ε（无论多么小），总存在一个正数 δ，当$|x-x_0|<\delta$时，不等式

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

都成立，则称函数 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 处**连续**.

注　由函数在点 $x=x_0$ 处连续的定义及 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$，有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=f(\lim_{x\to x_0}x).$$

这就是说，对于连续函数，极限符号与函数符号可以交换.例如，求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x$. 因为 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续，所以有

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=\sin(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}x)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

5. 变量的极限

如果将数列 $x_n=f(n)$ 及函数 $y=f(x)$ 统一概括为“变量 y”，而把自变量的变化趋势 $n\to\infty$，$x\to\infty(x\to-\infty,x\to+\infty)$，$x\to x_0(x\to x_0^-,x\to x_0^+)$ 统一概括为“在某个变化过程中”，那么在数列极限与函数极限定义的基础上，可得一般变量 y 的极限定义.

定义 1.1.6 设变量 y 在所讨论的范围内有意义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，在某个变化过程中，总存在那么一个时刻，在此时刻以后，不等式

$$|y-A|<\varepsilon$$

都成立，则称**常数 A 为变量 y 在此变化过程中的极限**，记作

$$\lim y=A.$$

注(1) 如果变量 y 是数列 $\{x_n\}$，则定义 1.1.6 中的“在某个变化过程中”是指“$n\to\infty$”，“总存在那么一个时刻”是指“总存在一个正整数 N”，“在此时刻以后”是指“当 $n>N$ 时”，而“$\lim y=A$”则为“$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$”；

(2) 如果变量 y 是函数 $y=f(x)$，当研究的变化过程是 $x\to\infty$ 时，则定义 1.1.6中“总存在那么一个时刻”是指“总存在一个正数 M”，“在此时刻以后”是指“当 $|x|>M$ 时”，而“$\lim y=A$”则为“$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$”；

(3) 如果变量 y 是函数 $y=f(x)$，当研究的变化过程是 $x\to x_0$ 时，则定义 1.1.6中“总存在那么一个时刻”是指“总存在一个正数 δ”，“在此时刻以后”是指“当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时”，而“$\lim y=A$”则为“$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$”.

定义 1.1.6 统一了常见的两种变量 $x_n=f(n)$ 和 $y=f(x)$ 在不同变化过程中的极限问题.因此，在陈述变量对于不同的变化过程均适用的定义、推理或规律性结论时，可使用通用记号“$\lim y=A$”.但如果变量 y 已给出为具体函数，则不能使用上述通用记号，而必须在极限符号下面标注伴随着所研究的变量的自变量的变化过程.例如，对于极限形式 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，但不能出现记号“$\lim\frac{1}{x}$”.

例 14 证明 $\lim C=C$(C 为常数).

证 设 $y=C$，对于 $\forall\varepsilon>0$，恒有

$$|y-C|=|C-C|=0<\varepsilon,$$

所以

$$\lim C=C.$$

注　结论“$\lim C=C$”表示对数列 $x_n=f(n)=C$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{n\to\infty}C=C$，同时对函数 $y=f(x)=C$ 有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}C=C$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}C=C$.

6. 部分极限性质的证明

定理 1.1.2（保序性定理）　设数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 的极限都存在，且

$$\lim_{n\to\infty}x_n>\lim_{n\to\infty}y_n,$$

则存在正整数 N，当 $n>N$ 时有 $x_n>y_n$.

证　不妨设 $x_n\to a$，$y_n\to b(n\to\infty)$ 且 $a>b$. 取 $\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}$，则由数列极限的定义知，$\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon,\quad |y_n-b|<\varepsilon.$$

因此有

$$x_n>a-\varepsilon=a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},\quad y_n<b+\varepsilon=b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},$$

故当 $n>N$ 时，有

$$x_n>\frac{a+b}{2}>y_n,$$

所以结论成立.

事实上，从几何意义上看，这一结论是显然的（图 1.8）.

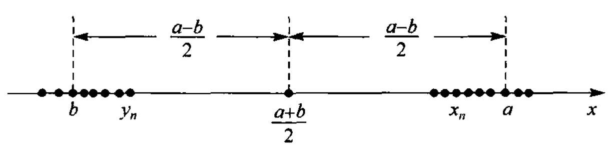

图 1.8

定理 1.1.3（局部保号性定理）　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则总存在一个正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

证　不妨设 $A>0$，取 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}$，则由函数极限的定义可知，总存在一正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon=\frac{A}{2},$$

由此可得

$$f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0.$$

类似可证 $A<0$ 的情形，留给读者自行证明.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com