

高考数学不丢分必须掌握的N个妙招

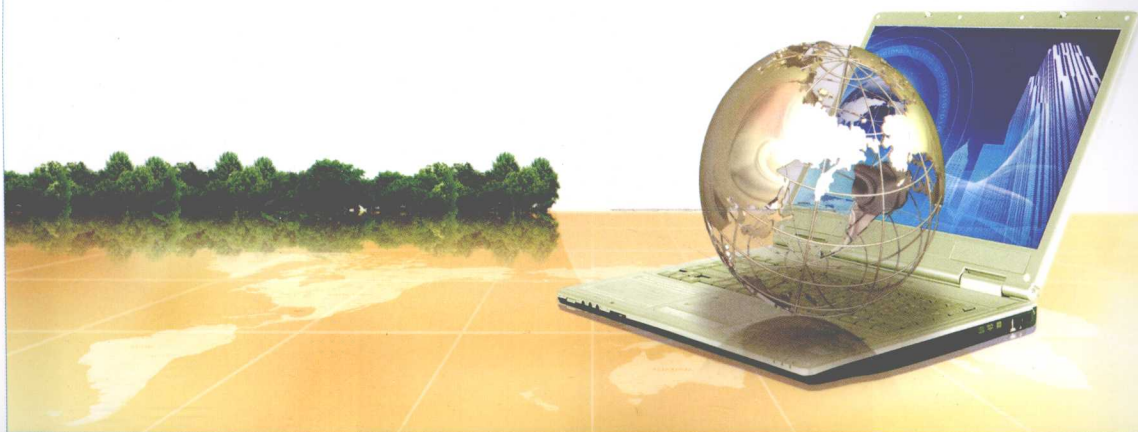
汇集全国六十多位高考状元的成功学习方法 总结全国八十多位名校名师的高效实用妙招

数学

◎总策划:李 景 ◎丛书主编:周贞雄

◎高一学考的导航仪 ◎高二学考的加速器

◎高考高分的金钥匙 ◎高中教学的妙锦囊



新课标 新内容



高考不丢分 一定有方法



湖南大学 出版社

高考不丢分必须掌握的N个妙招

高考不丢分

一定有方法 · 数学

汇集全国六十多位高考状元的成功学习方法
总结全国八十多位名校名师的高效实用妙招

总策划：李 景

丛书主编：周贞雄

本册主编：唐作明

副主编：眭小军 马义杰 欧阳日红

编委：唐作明 黄秋先 眭小军 马义杰 欧阳日红

冯小军 李民志 谢明春 杨迪兵 谢松茂

胡桂林 刘一彦 邓益阳 刘芳民 何新军

杨迪虹 罗雯婕 汤 灏 唐 馨 周友良

杨长文 程旭升 肖志成 秦小华 黄德明

刘成棋 刘璟琚



YZLI0890142679



湖南大学 出版社

内容简介

本书是一本集数学基础知识、高考常考点、高考易错点、高考不丢分策略以及备考应试技巧等于一体的高考多功能辅导书,是众多著名特、高级数学教师和教育界资深专家集体智慧的结晶。全书共分为18章,针对现行高中数学学科知识结构的特点,根据当前高考对数学综合能力的要求,不仅详细介绍了高考数学试题中可能出现的陷阱,还总结了解答各类题型的抢分技巧,帮助同学们在考试中跳出陷阱,真正做到少丢分、不丢分!

本书虽然不与任何版本的教材同步,但适用于任何教材,是帮助同学们不丢分、确保同学们考高分的好帮手。

图书在版编目(CIP)数据

高考不丢分一定有方法·数学 / 唐作明主编.

—长沙:湖南大学出版社,2011.6

ISBN 978-7-81113-727-9

I. ①高… II. ①唐… III. ①中学数学课—高中—升学参考资料

IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 117875 号

高考不丢分一定有方法·数学

Gaokao Budiufen Yiding Youfangfa·Shuxue

作 者:唐作明 主编

责任编辑:王桂贞

特约编辑:刘 东

封面设计:徐艳红 张 毅

出版发行:湖南大学出版社

社 址:湖南·长沙·岳麓山 邮 编:410082

电 话:0731-88821691(发行部),88821343(编辑室),88821006(出版部),88619166(经销)

传 真:0731-88649312(发行部),88822264(总编室)

电子邮箱:wanguia@126.com

网 址:<http://press.hnu.cn>

印 装:长沙鸿发印务实业有限公司

开 本:700×1000 16 开 印张:20.5 字数:412 千字

版 次:2011 年 7 月第 1 版 印次:2011 年 7 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 978-7-81113-727-9 / G·477

定 价:29.80 元

版权所有,盗版必究

湖南大学版图书,凡有印装差错,请与发行部联系

前言

《高考不丢分一定有方法》是《高考考高分一定有方法》的姊妹篇。从本质上说,确保不丢分也就是为了考高分,但比较而言,“考高分”系列侧重为同学们介绍答题方法和传授解题技巧,其直接目的就是快速轻松地“考高分”;而“不丢分”系列侧重分析同学们出错丢分的相关问题,如帮助同学们排除备考中的复习盲点,归纳知识中的易错类型,分析考题中的丢分陷阱,避开应试中的答题误区,等等,它的目的是帮助同学们在考试中尽量不丢分,从而最终获得考试高分。

本丛书由全国近百名特、高级一线名师和高考研究专家根据最新的高考考试大纲编写,其中既有众多名师根据多年经验总结的理论指导,也有切实可行的方法和技巧介绍,同时还有给出详细答案解析的模拟训练题。具体说来,本丛书具有以下四大特色:

一、系统归纳丢分类型

同学们在考试中丢分的原因是多方面的,出错的种类也可能各式各样,为帮助同学们尽可能避免出错丢分,我们在编写本丛书时充分考虑了同学们出错丢分的各种可能,其中既有同学们在知识方面的缺陷,也有解题思路方面的偏差,还有答题叙述方面的不规范以及思维定势的误导,等等,然后将各种各样的出错个案进行归类,总结出其中的规律性东西以及高考中最可能涉及的知识点,进行分类讲解。

二、详细剖析丢分陷阱

同学们在平时做题的过程中常常会碰到这样的现象:有些题目看起来似曾相识,于是在做题时就从原有的做题经验出发,机械地套用老方法,按某种固定的思路去思考问题,自以为轻而易举地得出了“正确答案”,结果却误入了命题者所设置的“陷阱”,从而白白地丢了分。为帮助同学们尽量避免类似情况的发生,我们在编写过程中充分研究了同学们各种各样的出错丢分案例,然后从众多个案中抓住最典型的、最重要的,同时也是最可能考的,进行分类总结,然后给出应对的方法和避免丢分的技巧,从而让同学们轻松答题,获得高分。

三、全面归纳答题技巧

前面我们讲到,“不丢分”其实也就是为了“考高分”,所以,如果同学们只是了解出

错丢分的陷阱还是不够的，还应该掌握各类题型的答题方法和获得高分的应试技巧。为此，本丛书还花了相当的篇幅来为同学们介绍切实可行的答题技巧——其中有些是经典实用的解题“通法”，有些是另辟蹊径将考题化繁为简的解题技巧，还有些则是专门攻克各类难题和易错题的“独门绝技”。通过本丛书的学习，同学们不仅会发现做题变得更容易了，考高分变得更轻松了，而且还会觉得学习更有趣了，考试更有成就感了！

四、详细分析答题思路

为了充分帮助同学们提高应试能力和在考试中的得分能力，我们在各个章节后面均为大家精心编写了一些高质量的模拟考题，同时给出了详细的解题分析，不仅对同学们在做题过程中可能遇到的易错丢分之处进行提醒，而且对一些答题难点进行解题思路点拨，在答题格式上帮助同学们规范表达，在争取得分点上为同学们巧妙支招。好好做题吧，你一定会有意想不到的收获的！

编 者

目录

Contents

第1章 集合的概念及运算

丢分陷阱	1	6. 忽视题目中的隐含条件	4
1. 忽视集合中元素的特性	1	7. 不能准确理解集合语言	4
2. 混淆 $0, \{0\}, \emptyset, \{\emptyset\}$ 等的含义	2	抢分技巧	6
3. 误解集合中代表元素的属性和含义	2	1. 准确把握集合概念	6
4. 在用区间 $[a, b]$ 表示数集时, 忽视条件 $a \leq b$	3	2. 充分运用数学思想	6
5. 表示方程(组)的解集出错	3	3. 巧用元素分析法	6
		4. 注意空集的特殊性	7
		纠错训练	7

第2章 常用逻辑用语

丢分陷阱	12	1. 掌握三个逻辑联结词	15
1. 对命题的概念理解不清	12	2. 理解复合命题的三种形式	15
2. 混淆逻辑与日常用语	12	3. 理解三个真值表	16
3. 忽视逻辑联结词的意义	13	4. 判断复合命题真假的步骤	16
4. 错写“ p 或 q ”和“ p 且 q ”的否命题	13	5. 慎重处理逻辑关系	16
5. 误判充分与必要条件	14	6. 判断充分条件和必要条件的方法	16
6. 不能正确理解四种命题	15	7. 密切关注创新型考题	18
抢分技巧	15	纠错训练	19

第3章 函数的概念

丢分陷阱	23	抢分技巧	31
1. 对函数的概念理解模糊	23	1. 理解函数、对应、映射的法则	31
2. 求函数定义域的易错点	24	2. 掌握求函数值域的方法	31
3. 弄反象与原象的关系	27	3. 掌握求函数最值的方法	33
4. 求值域或最值时的错点	28	纠错训练	35

第4章 函数的图象和性质

丢分陷阱	41
1. 求函数单调性的易错点	41
2. 求函数奇偶性的易错点	44
3. 忽视三角函数的有界性	45
4. 有关反函数的常见错误	45
5. 忽视对底数 a 的分类讨论	47
抢分技巧	47

1. 掌握单调性和奇偶性的概念 ...	47
2. 掌握反函数的性质	48
3. 掌握图象变换法	50
4. 巧用函数图象解决实际问题	51
纠错训练	51

第5章 数列与数学归纳法

丢分陷阱	58
1. 有关数列通项的易错点	58
2. 错用数列的性质	59
3. 忽视数列公式成立的条件	59
4. 忽视等比数列中的隐含条件 ...	60
5. 误解数列的通项公式	61
6. 误解等差和等比中项的概念 ...	62
7. 运用通项公式的典型错误	62
8. 未弄清“首项”与“项数”	62
9. 忽略数列求和公式的适用范围 ...	63

10. 运用数学归纳法的原理不对	63
11. 运用数学归纳法的步骤不清	63
12. 运用数学归纳法的推理不严 ...	64
抢分技巧	64
1. 求递推数列通项的5种方法 ...	64
2. 数列求和的常用技巧	68
3. 解数列应用题的步骤	71
4. 数列创新题的命题趋势	73
纠错训练	75

第6章 三角函数的概念、图象和性质

丢分陷阱	82
1. 对基本概念理解不清	82
2. 解参数问题时忽略讨论参数的取值范围	84
3. 忽视角的旋转方向对角的正、负的影响	84
4. 对任意角三角函数的概念、性质理解不清	85
5. 三角函数图象变换易错点	85

6. 求复合函数单调区间的易错点 ...	86
7. 不能确定 $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)$ 中 φ 角的取值	86
8. 求解反三角函数的易错点	87
抢分技巧	89
1. 三角函数图象的四种变换方法 ...	89
2. 强化三角函数的应用意识	90
纠错训练	91

第7章 同角三角函数关系式、诱导公式与和差化积公式

丢分陷阱	100	6. 忽视对参数的分类讨论	104
1. 忽视所求角范围的两种类型	100	抢分技巧	105
2. 忽视题设隐含的条件	102	1. 三角函数求值问题的解题技巧	105
3. 由两角的正弦值关系得出角的关系式时产生漏解	103	2. 三角函数式的化简要求	106
4. 忽视正、余弦函数的有界性 ..	103	3. 求三角函数最值的类型和方法	107
5. 忽视三角代换后角的取值范围	104	4. 三角形中的三角问题	108
		纠错训练	109

第8章 向量的概念及运算

丢分陷阱	115	4. 空间向量解题中的常见陷阱	120
1. 平面向量中的常见陷阱	115	抢分技巧	123
2. 弄错起点和终点的顺序	118	1. 巧用平面向量的数量积解题	123
3. 对向量坐标平移公式的运用出错	118	2. 善于联系交汇知识解题	125
		纠错训练	126

第9章 不等式的性质、解法与证明

丢分陷阱	132	1. 了解不等式的考点	139
1. 忽视不等式成立的条件	132	2. 不等式应试策略	139
2. 利用均值不等式求函数最值的易错题	133	3. 不等式证明的8种方法	140
3. 解不等式的8类思维误区	134	4. 含参数不等式的求解技巧	140
抢分技巧	139	5. 高考不等式问题常考类型	141
		纠错训练	144

第10章 直线、圆与方程

丢分陷阱	152	5. 解曲线与方程问题的常见错误	157
1. 直线的倾斜角和斜率	152	6. 解直线与圆的位置关系题的陷阱问题	159
2. 求直线方程时的常见错误	153	7. 思考不严密	160
3. 忽略直线的存在性和两条直线重合的情形	155	8. 忽视截距为零的情况	161
4. 解答不符合实际情况	156		

9. 忽视二次方程表示圆的条件	161
10. 忽视参数的取值范围	161
11. 用直线系方程和圆系方程解题时 忽视其适用范围	162

抢分技巧	162
1. 解题时重视利用斜率	162
2. 抓住直线与圆的热点问题	163
纠错训练	169

第11章 圆锥曲线与方程

丢分陷阱	176
1. 与椭圆有关的陷阱问题	176
2. 与双曲线有关的陷阱问题	178
3. 与抛物线有关的陷阱问题	180
4. 解两曲线交点问题时忽视曲线 方程中的限制条件	182
5. 求点的轨迹方程时忽视轨迹的 纯粹性和完备性	183

抢分技巧	183
1. 把握高考对圆锥曲线与方程的 考查重点	183
2. 应试基本策略	185
3. 圆锥曲线离心率问题求解方法	186
4. 圆锥曲线中的新题型	189
纠错训练	193

第12章 空间直线与平面的位置关系

丢分陷阱	202
1. 因概念不清而出错	202
2. 对线面关系的定理理解不清	204
3. 将平面图形的性质、定理和公理 机械地套用到空间图形中	204
4. 因推理不严而出错	205
5. 对“同理可证”的依据理解不清	205

6. 对线面位置关系分析不全面	206
7. 混淆同一法与反证法的原理	206
抢分技巧	207
1. 掌握平面的基本性质,学会画图	207
2. 掌握直线和平面的有关性质和 判定	207
纠错训练	209

第13章 空间角和距离及简单几何体的计算

丢分陷阱	212
1. 忽视直线与直线的夹角范围,直线 与平面的特殊位置关系	212
2. 对距离和球面距离的概念理解不清	212
3. 对简单几何体的性质认识不清	213

4. 对两异面直线所成的角的概念 理解不清	213
5. 忽略题中的隐含条件	213
6. 在解决平面折叠问题时缺乏空间 想象能力与推理能力	214
7. 在解决“无棱”二面角问题时找不 准二面角的平面角	214



8. 用向量的方法求二面角的大小时 忽略向量的夹角与二面角大小的 转化	215	1. 利用空间向量求角	217
9. 忽视对参数中隐含条件的适当 讨论	215	2. 利用空间向量求距离	219
抢分技巧	217	3. 灵活应用三垂线定理	220
		4. 掌握探索性试题的解题方法	221
		纠错训练	223

第14章 算法初步

丢分陷阱	230	6. 应用辗转相除法解题出错	240
1. 不理解算法的含义	230	7. 应用更相减损术解题出错	240
2. 不理解算法的特点	231	抢分技巧	241
3. 不理解程序框图的概念和构成	232	1. 了解课标和考纲要求	241
4. 不理解算法的三种基本逻辑结构 的特点和共性	233	2. 结合实例,领会算法思想	241
5. 不会用基本算法语句表达算法	235	3. 注重实践,体会算法思想	241
		4. 需注意的几个问题	241
		纠错训练	242

第15章 计数原理

丢分陷阱	248	8. 与四面体相关的组合问题	251
1. 在解决计数问题时混淆分类与 分步原理	248	9. 忽视对组合数公式 C_n^m 中 m , $n \in \mathbf{N}^+$, $m \leq n$ 等限制条件	251
2. 相异元素允许重复的计数法	249	10. 混淆二项展开式中项的系数与 二项式系数	251
3. 相异元素不允许重复的计数法	249	11. 审题不清致误	252
4. 不尽相同元素计数法	249	抢分技巧	252
5. 用排列、组合求解计数问题时考虑 问题不周全	250	1. 掌握排列组合题的解法	252
6. 在公约数问题中第一步的方法数 考虑不全	250	2. 了解二项展开式的特性	255
7. 拼组问题	251	3. 掌握二项式系数的性质	256
		纠错训练	256

第16章 概率与统计

丢分陷阱	262	或公式运用不当	262
1. 求事件的概率时对概念理解不清		2. 审题不清或不慎	263

3. 忽视公式成立的条件	264
4. 对有序、无序判断不准	264
5. “至多”“至少”问题处理方法不当	265
6. 忽视随机变量的概率分布列中的 概率之和为 1	265
7. 受思维定势的影响而导致错误	

.....	266
抢分技巧	266
1. 掌握概率与统计的高考重点	266
2. 概率中“至少”型问题的求解策略	266
3. 了解概率与统计的应用	268
纠错训练	271

第 17 章 导数及其应用

丢分陷阱	285
1. 对导数定义理解不清而出错	285
2. 忽视解题顺序而错求 $f'(x_0)$	285
3. 忽视原函数的定义域, 扩大了解集	286
4. 题意理解不透彻而出错	286
5. 忽视条件的正确使用	286
6. 忽视极值点的条件	287
7. 对字母参数的讨论不准而出错	287
抢分技巧	289
1. 利用导数研究函数的三大性质:	

单调性、极值、最值	289
2. 利用导数求函数解析式	291
3. 确定函数式中待定字母的值或 范围	292
4. 利用导数处理含参数的恒成立不 等式问题	293
5. 导数在解或证明方程中的应用	293
6. 利用导数求函数的值域	294
7. 利用导数解决最优化问题	294
纠错训练	295

第 18 章 复数

丢分陷阱	307
1. 对复数的有关概念混淆不清	307
2. 忽视虚数集与实数集的不同性质	307
3. 对复数的几何意义理解不深	308
4. 缺乏整体思想, 给解题带来繁琐的 运算或思路受阻	308
5. 不能灵活应用概念的内涵	309
抢分技巧	310

1. 熟悉概念, 迅速寻找解题的突破口	310
2. 掌握复数运算的基本规律, 简化 运算过程	310
3. 巧用 ω 的性质, 化难为易	310
4. 理解复数的几何意义, 把握解题 方向	311
5. 整体代换, 巧求复数值	311
纠错训练	312

第 1 章

集合的概念及运算

A

丢分陷阱

1. 忽视集合中元素的特性

集合中的元素必须满足“确定性”，即对于一个给定集合来说，任取一个元素，则该元素要么在此集合中，要么不在此集合中，两者必居其一；集合中的元素还要求互不相同，如在求两个集合的交集时，两集合的公共元素在交集中只算一个元素；集合中的元素是不讲究排列顺序的，任意改变集合中元素的排列顺序，所得集合不变。

例 1 下列命题正确的是 ()

A. $\{x \in \mathbf{R} \mid x = 2n - 1, 1 \leq n \leq 5\}$ 是一个有限集

B. 方程组 $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ 的解是 $\{-1, 1\}$

C. 已知 $A = \{a, b\}$, $B = \{b, a\}$, 则 $A \neq B$

D. 如果 $A = \{x, y\}$ 表示一个数集, 那么 $x \neq y$

解析 容易错解为：集合中元素是 n 且为整数而选 A，不能准确理解方程组解的含义而选 B，忽略集合元素的无序性而选 C。

实际上，由集合元素的互异性可知，正确答案应选 D。

例 2 下列给出的四类对象中，构成集合的是 ()

A. 某班个子较高的同学

B. 好心的人

C. 所有很大的实数

D. 倒数等于它本身的实数

解析 容易错选为：A、B 或 C。

上述解答的错因是忽略了集合元素的确定性。

实际上，D 构成的集合是 $\{-1, 1\}$ ，故正确选项为 D。

例 3 已知集合 $M = \{1, a, b\}$, $N = \{a, a^2, ab\}$ ，若 $M = N$ ，求实数 a, b 的值。



解析 错解:由已知 $\begin{cases} a^2=1, \\ ab=b \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a^2=b, \\ ab=1, \end{cases}$ 解得 $a=1, b \in \mathbf{R}$ 或 $a=-1, b=0$.

上述解答的错因是忽视了集合中元素的互异性.

因为当 $a=1$ 时, $M=\{1,1,b\}$, $N=\{1,1,b\}$, 显然 M, N 都不满足集合中元素的互异性, 故正确结果是 $a=-1, b=0$.

2. 混淆 $0, \{0\}, \emptyset, \{\emptyset\}$ 等的含义

特殊元素 0 和集合 $\{0\}, \emptyset, \{\emptyset\}$ 之间的关系很容易混淆. 实际上, 0 是一个元素, 而 $\{0\}, \emptyset, \{\emptyset\}$ 都是集合. 其中, $0 \in \{0\}, \emptyset \subseteq \{\emptyset\}, \emptyset \in \{\emptyset\}, \emptyset \subseteq \{0\}$.

例 4 下列各项是一些元素与集合或集合与集合间的关系: (1) $0 \subsetneq \{0\}$; (2) $\mathbf{R} \in \{\mathbf{R}\}$; (3) $\emptyset \in \{\emptyset\}$; (4) $\emptyset \subsetneq \{\emptyset\}$; (5) $\emptyset = \{0\}$; (6) $\{0\} \in \{\emptyset\}$; (7) $\emptyset \in \{0\}$; (8) $\emptyset \subsetneq \{0\}$. 正确的序号是 ()

- A. (2)(3)(4)(8) B. (1)(2)(4)(5)
C. (2)(3)(4)(6) D. (2)(3)(4)(7)

解析 0 是一个元素, 而 $\{0\}, \emptyset, \{\emptyset\}$ 都是集合. 其中 $\emptyset$ 中没有元素, 集合 $\{0\}$ 中有一个元素 0 , 集合 $\{\emptyset\}$ 中有一个元素是 $\emptyset$. 故正确答案应为 A.

3. 误解集合中代表元素的属性和含义

讨论集合间的关系时, 首先应分清集合中元素的属性, 是数还是点. 如若集合 $M = \{(x, y) | y = x - 1\}$, $N = \{(x, y) | y = x^2 - 1\}$, 求 $M \cap N$. 这里的 M 与 N 实际上是两个点集, 所以此时 $M \cap N = \{(1, 0), (0, -1)\}$.

例 5 已知集合 $A = \{y | y = x, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ ()
A. $\{0, 1\}$ B. $\{(0, 0), (1, 1)\}$ C. $\{y | y \geq 0\}$ D. $\emptyset$

解析 错解: 由 $\begin{cases} y=x, \\ y=x^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases}$ 所以选 B.

上述错误解法显然是将数集理解成了点集合, 没正确理解集合中元素的含义. 实际上, 集合 A, B 分别是函数 $y=x$ 与 $y=x^2$ 的值域, 即 $A = \mathbf{R}, B = [0, +\infty)$, $A \cap B = [0, +\infty)$, 故应选 C.

例 6 设集合 $M = \{(x, y) | (x-2)^2 + y^2 = 4\}$, $N = \{(x, y) | (x-1)^2 + y^2 = 1\}$, 则 M 与 N 的关系是 ()

- A. $N \subsetneq M$ B. $M \cap N = \emptyset$
C. $N \subseteq M$ D. $M \cap N = \{(0, 0)\}$

解析 容易错解为: 因为 M 是以 $(2, 0)$ 为圆心, 2 为半径的圆上的点的集合, N 是以 $(1, 0)$ 为圆心, 1 为半径的圆上的点的集合, 易知圆 N 含在圆 M 内部, 所以 $N \subsetneq M$, 故选 A.



上述错解是因为混淆了圆与圆面的概念. 实际上, 集合 M, N 表示的图形应是两个圆. 由数形结合可知, 两圆的交点为 $(0, 0)$, 故正确答案应为 D. 若将原题的条件变为 $M = \{(x, y) | (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$, $N = \{(x, y) | (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$, 则应选 A.

◆4. 在用区间 $[a, b]$ 表示数集时, 忽视条件 $a \leq b$

连续数集可用区间 $[a, b]$ 的形式来表示, 由区间的定义可知, 区间的左端点值应不大于右端点值. 否则, 该区间是无意义的.

例7 已知集合 $A = [-2, 5]$, $B = [m+1, 2m-1]$, 满足 $B \subseteq A$, 求实数 m 的取值范围.

解析 容易错解为: 由 $B \subseteq A$ 得 $\begin{cases} m+1 \geq -2, \\ 2m-1 \leq 5, \end{cases}$ 解得 $-3 \leq m \leq 3$.

上述解答忽略了区间中的隐含条件 $m+1 \leq 2m-1$. 实际上, 由区间定义知 $m+1 < 2m-1$, 得 $m > 2$; 又因 $B \subseteq A$, 解得 $-3 \leq m \leq 3$.

综上所述, 实数 m 的取值范围应是 $2 < m \leq 3$.

◆5. 表示方程(组)的解集出错

如方程组 $\begin{cases} x+y=3, \\ y+z=4, \\ z+x=5 \end{cases}$ 的解集为 $\{(2, 1, 3)\}$ (列举法) 或 $\left\{ (x, y, z) \left| \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases} \right. \right\}$ (描述

法), 不可以写成 $\{(x, y, z) | (2, 1, 3)\}$, 也不能写成 $\{2, 1, 3\}$, 更不能写成 $\{x=2, y=1, z=3\}$ 或 $\{(x, y, z) | x=2, y=1, z=3\}$.

例8 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 - y^2 - y = 4\}$, $B = \{(x, y) | x^2 - xy - 2y^2 = 0\}$, $C = \{x | x - 2y = 0\}$, $D = \{(x, y) | x + y = 0\}$.

(1) 判断 B, C, D 间的关系; (2) 求 $A \cap B$.

解析 容易错解为:

$$(1) B = \{(x, y) | x^2 - xy - 2y^2 = 0\} = \{(x, y) | (x-2y)(x+y) = 0\} = \{(x, y) | x-2y=0 \text{ 或 } x+y=0\} = \{(x, y) | x-2y=0\} \cup \{(x, y) | x+y=0\} = C \cup D.$$

$$\begin{aligned} (2) A \cap B &= \left\{ (x, y) \left| \begin{cases} x^2 - y^2 - y = 4 \\ x^2 - xy - 2y^2 = 0 \end{cases} \right. \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \left| \begin{cases} x^2 - y^2 - y = 4 \\ x-2y=0 \end{cases} \right. \right\} \cup \left\{ (x, y) \left| \begin{cases} x^2 - y^2 - y = 4 \\ x+y=0 \end{cases} \right. \right\} \\ &= \left\{ \frac{8}{3}, \frac{4}{3}, -2, -1, 4, -4 \right\}. \end{aligned}$$

正确解答应为:

$$(1) B = \{(x, y) | x^2 - xy - 2y^2 = 0\} = \{(x, y) | (x-2y)(x+y) = 0\} = \{(x, y) | x-2y=0 \text{ 或 } x+y=0\}. \text{ 所以 } D \subsetneq B, \text{ 集合 } B, D \text{ 与集合 } C \text{ 无任何关系.}$$

$$(2) A \cap B = \{(x, y) | x^2 - y^2 - y = 4 \text{ 且 } x^2 - xy - 2y^2 = 0\} = \{(x, y)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 - y = 4 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right\} \cup \left\{ (x, y) \mid \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 - y = 4 \\ x + y = 0 \end{array} \right\} \right\} = \left\{ \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3} \right), (-2, -1), (4, -4) \right\}.$$

6 忽视题目中的隐含条件

(1)在题目条件中出现 $A \subseteq B$ 时,容易忽略 $A = \emptyset$ 与 $A = B$ 这两种特殊情形而致错

例9 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{x \mid mx + 1 = 0\}$,若 $B \subseteq A$,求实数 m 的取值组成的集合.

解析 容易错解为:因为 $A = \{-3, 2\}$, $B \subseteq A$,所以,当 $x = -3$ 时,代入解得 $m = \frac{1}{3}$;当 $x = 2$ 时,代入解得 $m = -\frac{1}{2}$,所以实数 m 的取值组成的集合是 $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$.

上述解答过程忽视了空集是任何集合的子集这个特殊情形,即当 $B = \emptyset$ 时,也满足 $B \subseteq A$,此时解得 $m = 0$,所以实数 m 的取值组成的集合是 $\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}\}$.

例10 设 $A = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$, $B = \{x \mid ax - 1 = 0\}$,若 $A \cap B = B$,求实数 a 组成的集合的子集有多少个?

解析 易错点分析:此题由条件 $A \cap B = B$,易知 $B \subseteq A$,由于空集是任何非空集合的子集,但在解题中极易忽略这种特殊情况而造成漏解现象.

集合 A 化简得 $A = \{3, 5\}$,由 $A \cap B = B$,知 $B \subseteq A$.

(1)当 $B = \emptyset$ 时,方程 $ax - 1 = 0$ 无解,此时 $a = 0$ 符合已知条件;

(2)当 $B \neq \emptyset$ 时,方程 $ax - 1 = 0$ 的解为 3 或 5,代入得 $a = \frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{5}$.

综上满足条件的 a 组成的集合为 $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\}$,故其子集共有 $2^3 = 8$ 个.

(2)忽视 $A \cup \complement_U A = U$

例11 设全集 $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, $A = \{12a - 11, 2\}$, $\complement_U A = \{5\}$,求实数 a 的值.

解析 容易错解为: $\because \complement_U A = \{5\}$, $\therefore 5 \in U$, 且 $5 \notin A$, $\therefore a^2 + 2a - 3 = 5$,解之得 $a = 2$ 或 $a = -4$.

上述错解是因为忽视了 $A \cup \complement_U A = U$. 实际上, $\because \complement_U A = \{5\}$, $\therefore A \cup \complement_U A = \{2, 12a - 11, 5\} = U$.

$$\text{因此,有} \begin{cases} a^2 + 2a - 3 = 5, \\ |12a - 11| = 3, \end{cases} \quad \text{①} \quad \text{②}$$

解①得 $a = 2$ 或 $a = -4$;解②得 $a = 2$ 或 $a = -1$. $\therefore a = 2$.

7 不能准确理解集合语言

(a)判定两无限集合之间的关系,实际上是要准确判定元素与集合间的关系.



不能只就两集合中几个特殊元素间关系或表示两集合中元素的表面形式来判定两集合间的关系.

(b) 在对集合表达式进行变换时, 一定要注意保持变形前后的集合元素的等价性.

例 12 设数集 $M = \{x | x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$, $P = \{x | x = 3k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $Q = \{x | x = 3k + 2, k \in \mathbf{Z}\}$. $a \in M, b \in P, c \in Q$, 则 $a + b - c \in$ ()

A. P B. Q C. M D. $M \cup P$

解析 容易错解为 $a + b - c = 3k + 3k + 1 + 3k + 2 = 9k + 3 = 3(3k + 1) \in P$.

实际上, 上述每个集合中 k 不一样, 正确解法为设 $a = 3k_1, b = 3k_2 + 1, c = 3k_3 + 2$, 故 $a + b - c = 3k_1 + 3k_2 + 1 - 3k_3 - 2 = 3(k_1 + k_2 - k_3) - 1 \in Q$, 故选 B.

例 13 已知 $U = \{\text{实数对}(x, y)\}$, $A = \{(x, y) | \lg(y - 4) - \lg(x - 2) = \lg 3\}$, $B = \{(x, y) | 3x - y - 2 = 0\}$, 则 $\complement_U A \cap B =$ _____.

解析 容易错解为: 由 $\lg(y - 4) - \lg(x - 2) = \lg 3$, 得 $y = 3x - 2$, 故 $A = B$, 即 $\complement_U A \cap B = \emptyset$.

上述解答的错因是将条件进行了非等价变形而扩大了变量的取值范围. 实际上, 由 $\lg(y - 4) - \lg(x - 2) = \lg 3$, 得 $y = 3x - 2 (x > 2)$,

$$\therefore A = \{(x, y) | \lg(y - 4) - \lg(x - 2) = \lg 3\} = \{(x, y) | y = 3x - 2 (x > 2)\},$$

$$\complement_U A = \{(x, y) | y = 3x - 2 (x \leq 2)\}.$$

故正确答案为: $\complement_U A \cap B = \{(x, y) | y = 3x - 2 (x \leq 2)\}$.

例 14 已知集合 $A = \left\{ (x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1, x, y \in \mathbf{R} \right\}$, $B = \{(x, y) | y = ax + 2, x, y \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的值.

解析 容易错解为: 根据 $\frac{y-3}{x-2} = 1$, 得 $y = x + 1$, 由 $A \cap B = \emptyset$, 而认为函数 $y = x + 1$ 与 $y = ax + 2$ 的图象没有交点, 也即直线 $y = x + 1$ 与 $y = ax + 2$ 平行, 知 $a = 1$.

上述解答的错因是误认为 $\frac{y-3}{x-2} = 1$ 与 $y = x + 1$ 是等价的. 实际上, 由 $\frac{y-3}{x-2} = 1$ 得 $y = x + 1 (x \neq 2)$, 所以函数 $\frac{y-3}{x-2} = 1$ 与 $y = ax + 2$ 的图象没有交点, 也即直线 $y = x + 1$ 与 $y = ax + 2$ 平行, 或直线 $y = ax + 2$ 过点 $(2, 3)$ 且直线 $y = x + 1$ 与 $y = ax + 2$ 不重合, 解得 $a = 1$ 或 $a = \frac{1}{2}$.

1. 准确把握集合概念

集合单元的一个显著特点是包含有许多抽象的概念和符号术语,例如交集、并集、补集的概念及其表示方法,集合与元素的关系及其表示方法,集合与集合的关系及其表示方法,子集、真子集和集合相等的定义等. 这些概念、关系和表示方法,都可以作为求解集合问题的依据、出发点甚至是突破口.

例1 设集合 $A = \{(x, y) \mid x + 2y = 5\}$, $B = \{(x, y) \mid x - 2y = -3\}$, 求 $A \cap B$.

解析 由 $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ x - 2y = -3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$

从而 $A \cap B = \{(1, 2)\}$.

2. 充分运用数学思想

集合这章含有丰富的数学思想,例如数形结合的思想、分类讨论的思想、等价转化的思想、正难则反的思想等. 在学习过程中,注意对这些数学思想进行挖掘、提炼和渗透,不仅可以有效地掌握集合的知识,轻松应对集合问题的求解,而且对于开发智力,培养能力,优化思维品质,都具有重要意义.

例2 设全集为 $\mathbf{R}$, $A = \{x \mid x^2 - 5x - 6 > 0\}$, $B = \{x \mid |x - 5| < a\}$ (a 是常数), 且 $11 \in B$. 则 ()

A. $\complement_{\mathbf{R}} A \cup B = \mathbf{R}$

B. $A \cup \complement_{\mathbf{R}} B = \mathbf{R}$

C. $\complement_{\mathbf{R}} A \cup \complement_{\mathbf{R}} B = \mathbf{R}$

D. $A \cup B = \mathbf{R}$

解析 先求得 $A = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 6\}$. 再将 $|x - 5| < a$ 化为 $5 - a < x < 5 + a$. 即 $B = \{x \mid 5 - a < x < 5 + a\}$. 因为 $11 \in B$, 所以 $|11 - 5| < a$, 得 $a > 6$, $5 - a < -1$, $5 + a > 11$. 然后在数轴上画

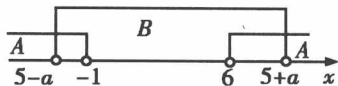


图 1-1

出集合 A 与 B (见图 1-1), 可直观得到 $A \cup B = \mathbf{R}$. 故选 D.

点评 在得到集合 B 的左端点 $5 - a < -1$ 及右端点 $5 + a > 11$ 后, 在数轴上画出集合 A 与 B , 马上得到 $A \cup B = \mathbf{R}$. 这就是数形结合的优越之处.

3. 巧用元素分析法

集合可以看成是一些对象的全体, 其中的每一个对象叫做这个集合的元素. 集合中的元素具有“三性”:

(1) 确定性: 集合中的元素应该是确定的, 不能模棱两可.

(2) 互异性: 集合中的元素应该是互不相同的, 相同的元素在集合中只能算作一个.

