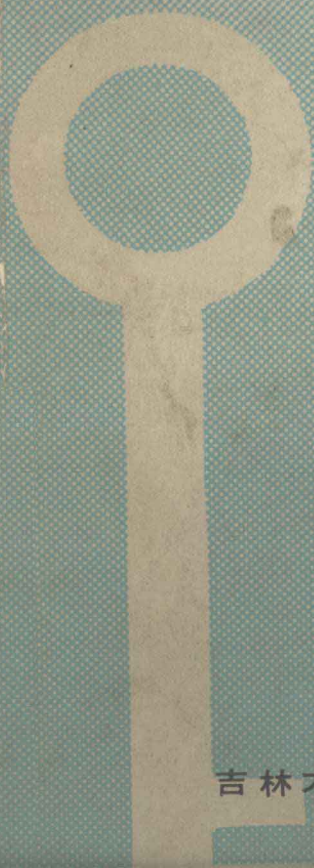


高等数学客观题

及其解法

主编：张可法
副主编：罗廷金
编委：麦建中
傅世球

张允豪
陈国鑫



吉林大学出版社

高等数学客观题及其解法

主编 张可法

吉林大学出版社出版
(长春市解放大路85号)

吉林大学出版社发行
吉林农业大学印刷厂印刷

开本: 787×1092 毫米 $1/32$

1989年12月第1版

印张: 15

1989年12月第1次印刷

字数: 335千字

印数: 1—2 000册

ISBN 7—5601—0398—7/O·52

定价: 4.80元

前 言

目前，中小学各类重大考试以及高等学校招生考试，正加快步伐向标准化考试过渡。这必然影响到大专院校，因此，大专院校各类考试命题标准化的程度，将会愈来愈高，而客观性试题（简称客观题）是标准化考试命题中的一类常见且非常重要的题型。特别是近些年来，我们在教学实践中，愈来愈看到了客观题在命题考试与平时教学中所显示的重要作用。鉴于有关高等数学客观题方面的书籍缺乏，我们根据自己多年来的教学经验和近些年从事考试命题标准化探讨的心得，加上平日搜集到的有关资料和文献，写成了这本《高等数学客观题及其解法》。

全书分两篇，共十章，第一篇着重介绍了客观题的结构和基本解法；第二篇以高等数学主要内容为线索，编写了460道例题和546道习题，其目的是让读者首先明确解客观题的基本思想和方法，然后通过各种类型例题和习题的练习，加深对高等数学基本概念和基本理论的理解，熟练掌握解答客观题的一般方法和技巧，从而提高分析问题和解决问题的能力。在编写时，我们尽可能的兼顾了大专院校理工科学生，电大、夜大、职大、函大学员以及自学高等数学读者的不同要求。

本书的编写计划由正、副主编拟定，分别由张可法（第

一篇，第二篇的第二章）、傅世球（第二篇的第一章）、麦建中（第二篇的第三、五章）、罗廷金（第二篇的第四章）、陈国鑫（第二篇的第六、七章）、张允豪（第二篇的第八章）写出初稿，后由张可法、张允豪修改，统稿成书。

由于水平所限，错误与不足之处一定不少，恳切地希望读者批评指正。

编 者

1988年8月

目 录

第一篇 高等数学客观题简介

第一章 客观题的类型和结构	(1)
§ 1 客观题的含义及其作用	(1)
一、什么叫客观题	(1)
二、客观题的作用	(1)
三、对客观题的评价	(3)
§ 2 客观题的类型及其结构	(5)
一、选择题	(5)
二、填空题	(11)
三、判断题	(14)
第二章 客观题的基本解法	(16)
§ 1 填空题的基本解法	(16)
一、直接推算法	(16)
二、猜想验证法	(17)
三、分析排除法	(18)
四、图解填空法	(19)
§ 2 判断题的基本解法	(20)
一、推算判断法	(21)
二、分析判断法	(22)
三、特值判断法	(23)
四、反例判断法	(25)
五、图解判断法	(26)
§ 3 选择题的基本解法	(28)
一、推算对照法	(28)

二、筛选法·····	(30)
三、验证法·····	(32)
四、逻辑分析法·····	(33)
五、图解选择法·····	(35)

第二篇 高等数学客观题荟萃

第一章 函数与极限·····	(40)
§ 1 变量与函数·····	(40)
§ 2 极限与连续性·····	(57)
第二章 一元函数微分学·····	(80)
§ 1 导数与微分·····	(80)
§ 2 中值定理与导数的应用·····	(99)
第三章 不定积分与定积分·····	(116)
§ 1 不定积分·····	(116)
§ 2 定积分·····	(133)
第四章 矢量代数与空间解析几何·····	(158)
§ 1 矢量代数·····	(158)
§ 2 空间平面与直线·····	(175)
§ 3 空间曲面与曲线·····	(197)
第五章 多元函数微分法·····	(213)
§ 1 多元函数微分法·····	(213)
§ 2 应用·····	(234)
第六章 多元函数积分学·····	(257)
§ 1 重积分·····	(257)
§ 2 曲线积分·····	(283)
§ 3 曲面积分·····	(304)
第七章 级数·····	(332)
§ 1 数项级数·····	(332)
§ 2 函数列与函数项级数·····	(355)

§ 3 幂级数与傅里叶级数	(376)
第八章 微分方程初步	(401)
习题答案	(420)
部分习题略解或提示	(436)

第一篇 高等数学客观题简介

第一章 客观题的类型和结构

§ 1 客观题的含义及其作用

一、什么叫客观题

在长期的考试实践中，发展出了多种多样的题目形式。根据评分是否客观，可分为客观性试题与主观性试题，那种能够客观评分，不受阅卷者的身份、爱好、兴趣以及其他外界因素影响的试题，我们称之为客观性试题（简称客观题），如选择题、填空题和判断题等。相应地，把问答题、计算题、证明题等难以客观评分的试题称为主观性试题（简称主观题）或非客观性试题。

二、客观题的作用

考试，无外乎是想全面地、客观地、比较准确地考查应试者对所学知识和应该具备的各种能力的掌握情况，这就要求试题的覆盖面要大，题量要多，试题布局要合理，并且便于准确、方便的评分，如果一份试卷全部是传统的主观性试题，是很难达到上述要求的，由于客观题有几个共同的特点：（1）题型小巧，（2）命题灵活，（3）解法多样，（4）评分客观，因此，如果在试卷中加进一定数量的客观题，这就将使实现上述要求成为可能。

多年来的实践，我们愈来愈看到了客观性试题在命题考

试与平时教学中所显示的重要作用。

1. 有利于学生对“三基”的掌握。

基本概念、基本理论、基本方法构成高等数学的“三基”，对于一个初学高等数学的人来说，如何搞清楚基本概念、掌握基本理论、熟悉基本方法，这是一个重要而又不易解决的问题。一个初学者往往不善于在给定的条件下，填出一个正确结论，往往不善于对于一个似是而非的命题，做出正确与否的判断，往往不善于在众多的答案（包括正确答案与错误答案）中，迅速而准确地挑选出正确答案。正因如此，填空题、判断题、选择题等客观题，对于一个初学者建立正确的基本概念和基本理论，熟悉基本方法有着特殊的作用。

2. 有利于培养学生分析问题、解决问题的能力。

客观题命题灵活，使试题考查的知识覆盖面扩大，同一内容在试题形式上可以从不同角度出题而不致重复，尤其是选择题这种题型把正确答案与错误答案交错排列，每一个错误答案都有较强的迷惑性，它是针对某种心理特征或容易犯的错误而设置的“陷阱”，这些“答案”对于应试者，则提供了丰富的“信息源”。每个“答案”都可能从正面或反面指示解答的途径，“答案”的总体，则告诉我们“解就在其中”、“非此即彼”。因此除采用主观性试题的“正面解答”外，又开辟了“验证法”、“筛选法”等解答方法。面临这样命题灵活、信息丰富、方法多样的客观题，对于那些只会死记硬背，分析问题、解决问题能力很差的人来说，往往只知“正面解答”，有时这不仅将是非常费时的，还可能会“束手无策”（有些客观题实际上是无法从正面解答的）。因此，客观性试题，尤其是选择题，更有利于分析问

题、解决问题能力的培养和考核，特别是对信息进行分析处理和运用的能力的培养和考核。

3. 有利于考试标准化。

所谓标准化考试，就是按照系统的科学程度组织，具有统一的标准，并对误差作了严格控制的考试，考试是一个系统的过程，每个环节都可能带来误差，因此必须从命题、施测、评分记分、分数合成到分数解释等各个环节，努力减少或避免各种误差，从而测出应试者比较真实的成绩，而客观性试题最大的特点是能客观评分，并评分简单，只要把应试者的答卷直接送入阅卷机就可评出分数，因此，客观题型被各类标准化考试大量采用。

三、对客观题的评价

主观性试题与客观性试题各有优缺点。下面不妨从几个不同角度试作分析。

1. 效度。效度指的是考试对于考试目的测量的有效性程度，即试题是否考了应该考的内容？这是一个优良考试首先必须具备的指标。主观性试题一般比客观性试题有较高的效度。因为主观性试题易于根据考试需要直接命题。例如我们想考学生的计算能力，就直接让学生做一道计算题；想了解一下学生的推理能力，就直接让学生做一道证明题。

2. 信度。信度是指测量和评分的准确度，它反映考试分数可准确重现的程度。这也是一个优良考试必备的重要指标。就评分的客观性、可靠性而言，客观性试题具有无可比拟的优点，而主观性试题的评分误差则难以克服。再者，客观性试题的覆盖面广，从信度的计算原理来看，覆盖面越广、题量越大，信度也就越高。主观性试题的覆盖面不可能

很广，覆盖面窄，偶然性就会增多，因此，就信度而言，客观性试题明显优于主观性试题。

3. 测量综合能力。一般来说，主观性试题比客观性试题较宜于测量比较复杂的综合性的能力。但是，经过多年来的实践，客观性试题特别是选择题，已经发展出了多种变式。在内容上，可用文字、图形、数字、符号等不同性质的材料；在结构上，可构造简单式和复合式，可以只有一个正确选择，也可以把几个正确选择综合起来作为答案；在心智活动方式上，可有计算、推理、找不同类等多种题型，不仅可以考查对简单事实和基本结构的再认能力，而且可以考查分析辨别、比较判断、逻辑推理、空间想象以及对复杂定理、推论的理解和运用的能力。实践表明，主观性试题所能测量的绝大部分能力都可由客观性试题来测量。

4. 猜测的可能性。有人不赞成使用客观性试题，认为应试者可以靠猜测得分。对这个问题要具体分析，学生在解答选择题、判断题等客观性试题时，的确能够凭猜测得到一些分数，但纯粹靠猜测得高分是不可能的。而且，客观性试题在考试时，确实会引起一些猜测，但在考试前，就不大可能猜测，因为题小量大，无从猜起。相反，主观性试题在考试时，是很难猜测，但在考试前，却最易引起猜测，因为它题量小，占的比重大。因此，凭猜测得分并不是解答客观题所独有的弊病，一般来说，猜测并不取决于题目类型，他没有把握，就会引起猜测，这是一种正常的心理活动。更何况猜测能力无论对大学生、中学生，还是对科技工作者来说，也是十分重要的。

5. 常模的建立。考试的目的在于评价。我们将解释、评价考试分数的参照系，称为标准或常模。常模的建立必须

有稳定的试卷，才能保证标准的统一。一般情况下，客观性试题比主观性试题较易于稳定，因为它容易定型，易于掌握试卷的难易程度。

综上所述，我们看出，客观性试题与主观性试题各有千秋，彼此有着对方所不能替代的长处，也各有短处，且正好它们能相互补充。特别是不同的考试目的、不同的考试内容，需要不同的题目形式。因此在推广客观性试题，进一步加强研究其命题原则和方法的同时，也要研究主观性试题的命题和评分技巧，以便控制和尽量减少在评分过程中的误差。

§ 2 客观题的类型及其结构

现今出现的客观题型，基本上可划分为选择题、填空题和判断题三种类型。下面分别讨论它们的结构及其变体。

一、选择题

了解选择题的结构特征，对于理解选择题的实质和探究它的解答规律，是十分有益的。

选择题由下述三部分构成。

(1) 指示语。用于说明所给的若干个备选答案中，“有且只有一个是正确的”、“至少有一个是正确的”、“请把正确答案的代号填在括号内”等指令性语句。

(2) 题干。分问题式题干和填空式题干两种。问题式题干由一个问句构成；填空式题干由一个陈述句（可以是完整的，也可以是不完整的）构成。题干应围绕一个中心问题或思想来提问，语言要简洁、准确，要尽量有新意，避免重复书本上的措词。

(3) 选择支。位于题干后面的若干个备选答案，即为选择支（或称选项）。其中的错误答案称为迷惑支，正确答案称为正确支。选择支的语句要简短，共同的叙述或修饰语应全部置于题干中。所有选择支和题干在逻辑上、语法上都应一致。迷惑支应具有迷惑性，不要错得太明显。

例 1 下列两题中，每题后面都给出了代号为 A、B、C、D 的答案，其中有且只有一个是正确的。请把正确答案的代号填入括号内。

(i) 函数 $y = |\sin^3 x|$ 的导数是 ()。

(A) $3\sin^2 x \cos x$; (B) $-3\sin^2 x \cos x$;

(C) $-\frac{3}{2} |\sin x| \sin 2x$; (D) 不存在。

(ii) 已知序列 $\left\{ \frac{n^{10}}{2^n} \right\}$ ，那么下述各数中哪一个 是它的最大项？ ()

(A) $\frac{14^{10}}{2^{14}}$; (B) $\frac{13^{10}}{2^{18}}$;

(C) $\frac{15^{10}}{2^{15}}$; (D) 以上都不是。

此例中，开头的一段是两题的公共指示语。第 (i) 题的题干是一个不完整的陈述句；第 (ii) 题的题干是一个问句。两题各有四个选择支。

一道选择题中选择支的个数，又称为该选择题的“支数”，其中正确支的个数称为它的“元数”。例如，某个选择题若有四个选择支，其中有且只有一个是正确的，则称它为一元四支选择题。如果四个选择支中，有两个或两个以上是正确的，则称它可多元四支选择题。多元选择题的指示

语，一般为“至少有一个是正确的”。我们约定，本书中的“选择题”均系一元选择题。“多元选择题”另外注明。

选择题有多种变式，经常采用的有以下几种题型：

(1) 配伍选择题。此种题目是几个问题共用一组答案。问题与答案的数目可不相等，每项答案可选用一次，也可重复多次选用或一次也不用。但每个问题有且只有一个正确答案。

例 2 给出有关充分、必要条件的四个答案：

- (A) 充分但非必要条件；
- (B) 必要但非充分条件；
- (C) 充分且必要条件；
- (D) 既非充分又非必要条件。

那么，下列的条件对其结论来说，应符合上述答案中的哪一个？

(i) 条件： $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = M$,

结论： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$. ()

(ii) 条件： $|f(x)|$ 在 x_0 连续，

结论： $f(x)$ 在 x_0 连续. ()

(iii) 条件： $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 可导，

结论： $f(x) + g(x)$ 在 x_0 可导. ()

略解 (i) 易证为充分且必要条件，故应选 (C)。

(ii) 易证若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $|f(x)|$ 在 x_0 必连续。反之，就不一定成立。例如：

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ -1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

$|f(x)| \equiv 1$, $|f(x)|$ 在任何点都连续, 但 $f(x)$ 在任何点都不连续. 故应选 (B).

(iii) 由导数的线性法则知, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 可导, 则 $f(x) + g(x)$ 在 x_0 也必可导.

反之, 不一定成立. 例如

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & -1 \leq x < 0 \\ x + 2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x < 0 \\ -x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

则 $f(x) + g(x) = 3$, $(-1 \leq x \leq 1)$ 在 $x = 0$ 可导, 而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x = 0$ 均不可导. 故应选 (A).

例 3 给出四个答案:

(A) 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2^x) \ln(1 + \frac{3}{x})$ 的值;

(B) 若 $f(0) = -2$, $f(3) = s$, 函数 $f(x) = ax + b$ 在 $x = 1$ 处的函数值;

(C) $f(x) = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

在 $x = 1$ 处的导数值;

(D) 定积分 $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ 的值,

那么下列各题的计算结果应与上述的哪一个答案相等?

(i) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; ()

(ii) 曲面 $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$ 所界体积; ()

(iii) $\oint_C \frac{(x-y) dy - (x+y) dx}{2(x^2 + y^2)}$, 其中 C 为依

反时针方向通过的圆周 $x^2 + y^2 = a^2$. ()

此题也是配伍选择题。首先必须将答案明朗化, 通过计算得四个明确答案: (A) $\ln 8$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{1}{2}$;

(D) π ; 然后分别对各题进行计算, 作出正确选择:

(i) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$, 故应选择 (D) .

(ii) 利用三重积分可得体积 $v = \frac{1}{2}$, 故应选择 (C) .

(iii) $\oint_C \frac{(x-y) dy - (x+y) dx}{2(x^2 + y^2)} = \pi$, 故也选

择 (D) .

(2) 组合选择题。此种题目的标准模式是在题干后面列出四个用数字标明的事件, 其中可以包括一个、二个、三个或四个是正确的 (根据题干判断), 解题时在排除错误事件或认定正确事件后, 按规定组合形式, 选择一个字母作为答案。

例 4 按照下述组合形式, 进行组合选择。

