明知白 等

高中数学

精读与测评

JING DU YU CE PING

下

天津人民出版社

高中数学精读与测评

下

贺信淳　明知白
魏仲和　藏龙光　张君达编

天津人民出版社

高中数学精读与测评
下
贺信淳　明知白　等
*
天津人民出版社出版
（天津市赤峰道130号）
天津新华印刷一厂印刷　新华书店天津发行所发行
*
787×1092毫米　32开本　16.5印张　340千字
1988年10月第1版　1990年9月第3次印刷
印数：35,451-50,250
ISBN 7-201-00194-9/G·64
定　价：5.00元

出版说明

已故著名数学家华罗庚说过，如果读书的时候，做不到由厚到薄，那么读书越多越麻烦，就会堕书堆的烟海之中不能自拔。高中生学习各门功课时，在学完每一单元，章、编和全册之后，都应该把学过的内容进行全面系统的温习，通过对所学知识进行比较、分析、归纳、综合，升华出知识的本质属性及其相互间的内在联系，做到由厚到薄。我社约请北京市东城、西城、海淀、朝阳等区有经验的教师和教研员按新颁布的教学大纲和各科教学具体要求编写的这套高中语文、数学、物理、化学《精读与测评》是这种由厚到薄的成功尝试。它可做为高中毕业班师生在总复习阶段，精读复习内容、测评复习效果的借鉴。这套丛书每科分上、下两册。

对书中可能出现的差错、不当之处，欢迎读者批评指正。

目　　录

第五编　专 题 选 讲

一、正确理解和掌握函数的基础知识

中学阶段所学的函数的内容是比较丰富的，有正比例函数、反比例函数，一次函数、二次函数，幂函数、指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数等．掌握这些函数的定义、图象和性质显然是十分重要的，但又是很不够的．要想提高分析和研究函数问题的能力，还应该对函数的一般概念、性质、图象和应用进行系统地归纳和全面地整理，以便从理论上深化我们对函数的一般概念和性质的进一步理解．这样，当我们需要研究一个新的未知的函数问题时，这些理论研究就会成为我们得心应手的工具．

（一）函数的一般概念

1．函数的概念

按映射的观点，函数被定义为：当集合A、B都是非空的数的集合，并且B的每一个元素都有原象时，这样的映射

f：$A\to B$就是定义域A到值域B上的函数.所以，函数是由定义域、值域以及定义域到值域上的对应法则这三部分组成的一类特殊的映射.

函数不同于一般映射有以下两点：第一，在一般映射中，集合A和B的元素可以是任何对象，而在函数概念中的集合A和B的元素必须是数；第二，在一般映射中，B中的每一个元素在A中可以有原象也可以没有原象，而在函数概念中，B中的每一个元素在A中必须要有原象.

【例1】 下列对应是不是从A到B的映射？是不是从A到B上的函数？

（1）$A=\{x|x\in R\}$，$B=\{y|y\in Q\}$，对应法则是$y=3x$；

（2）$A=\{x|x\in Q\}$，$B=\{y|y\in R\}$，对应法则是$y=3x$；

（3）$A=\{x|x\in Q\}$，$B=\{y|y\in Q\}$，对应法则是$y=3x$.

解：（1）不是从A到B的映射.因为A中有的元素，如$\sqrt{2}$，在B中没有元素和它对应.

（2）是从A到B的映射，但不是从A到B上的函数.因为B中有的元素，如$\sqrt{3}$，在A中没有原象.

（3）是从A到B的映射，也是从A到B上的函数.

函数的定义域、值域和对应法则是构成函数概念的三个要素.在函数概念中，定义域和对应法则是最基本的，值域受定义域和对应法则的制约.有人在学习函数时，往往把注意力都集中在对应法则上，而忽视函数的定义域.其实，函

数的性质并不单纯由对应法则决定，它还受着函数的定义域的制约．比如函数$f(x)=x^2(x\in R)$和函数$f(x)=x^2(x\in[1,2])$，它们的对应法则尽管相同，但由于它们的定义域不同，它们的性质也不同．函数$f(x)=x^2(x\in R)$是偶函数，不是单调函数，无最大值，有最小值零；函数$f(x)=x^2(x\in[1,2])$不是偶函数，是增函数，有最大值 4 和最小值1．如果在两个平面直角坐标系中分别做出它们的图象，它们在性质上的差别就会一目了然（如图5-1-1，图5-1-2）．

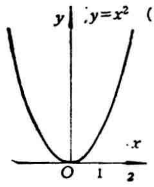

图 5-1-1

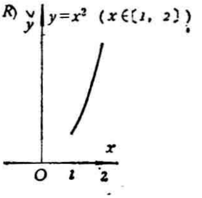

图 5-1-2

确定函数的定义域的一般原则是：当函数$y=f(x)$是用式子表示时，如果没有特别说明，它的定义域是指使$f(x)$有意义的实数x的集合．对于分式，要注意x取值时不使分母为零；对于偶次根式，要注意x取值时使被开方数大于或等于零；对于对数，要注意x取值时使真数大于零，底数大于零并且不等于1；对于正切函数$y=\mathrm{tg}x$和正割函数$y=\sec x$，$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$；对于余切函数$y=\mathrm{ctg}x$和余割函数$y=\csc x$，$x\neq k\pi(k\in Z)$；对于反正弦函数$y=\arcsin x$和反余弦函数$y=\arccos x$，$|x|\leqslant 1$．如果函数$y=f(x)$是由实际问题或几何问题确定的，那么函数的定义域还要根据问题的实际意义或几何意义来确定．

【例 2】求函数

$$f(x)=\frac{(2x-7)^0}{\sqrt{\log_{0.5}(x-3)}}$$

的定义域．

解：由不等式组

$$\begin{cases}2x-7\neq 0,\\ 0<x-3<1,\end{cases}$$

解得 $3<x<3.5$或$3.5<x<4$，所以函数的定义域是$(3, 3.5)\cup(3.5, 4)$．

【例3】 已知函数$f(x)$的定义域是$[0, 1]$，求$g(x)=f(x^2)$的定义域，

解：设$x^2=u$，则$g(x)=f(u)$．

$\because$ $f(x)$的定义域是$[0, 1]$，$\therefore 0\leqslant u\leqslant 1$，

$\therefore$ $0\leqslant x^2\leqslant 1$，$\therefore -1\leqslant x\leqslant 1$．

$\therefore$ $g(x)=f(x^2)$的定义域是$[-1, 1]$．

两个函数，如果它们的定义域不同，那么这两个函数是不同的；如果它们的定义域相同，而它们的对应法则能够保证同一个自变量对应着同一个确定的函数值，那么不管对应法则的形式是否一样，这两个函数就是相同的函数，否则，就不是相同的函数．两个函数如果是同一个函数，那么它们的图象也是相同的，反过来也是这样．

【例4】 做出下列各函数的图象，并指出其中相同的函数．

（1）$y=x$；（2）$y=\frac{x^2}{x}$；（3）$y=|x|$；（4）$y=\sqrt{x^2}$；（5）$y=(\sqrt{x})^2$；（6）$y=a^{\log_a x}$ $(a>0$且a

$\neq 1$）；（7）$y=\sin(\arcsin x)$。

解：（1）$y=x$，$x\in R$；（2）$y=\dfrac{x^2}{x}=x(x\neq 0)$；

（3）$y=|x|=\begin{cases}x(x\geqslant 0)\\-x(x<0)\end{cases}$；（4）$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x(x\geqslant 0)\\-x(x<0)\end{cases}$；（5）$y=(\sqrt{x})^2=x(\geqslant 0)$；（6）$y=a^{\log_a x}=x(x>0)$；（7）$y=\sin(\arcsin x)=x(-1\leqslant x\leqslant 1)$。

各函数的图象（图5-1-3）如下：

其中只有（3）和（4）是同一个函数。

y 是x的函数，用符号$y=f(x)$表示。其中 f 表示从定义

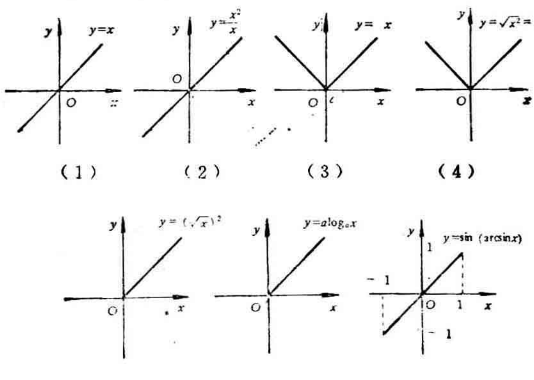

图 5-1-3

域到值域上的对应法则。当$y=f(x)$是由式子给出时，f 表示的是施加于自变量x上的某种运算。如$f(x)=x^2-x-2$，指的就是$f(\quad)=(\quad)^2-(\quad)-2$。于是$f(a)=a^2-a-2$；$f(-x)=(-x)^2-(-x)-2=x^2+x-2$；$f[f(x)]=$

$f(x^2-x-2)=(x^2-x-2)^2-(x^2-x-2)-2=x^4-2x^3-4x^2+5x+4$.

【例5】求$f(x)$和它的定义域.

（1）已知$f(e^x)=2x+1$；

（2）已知$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

解：（1）令$e^x=u$，则$u>0$且$x=\ln u$.

$\therefore\quad f(u)=2\ln u+1,\ u>0$,

即　$f(x)=2\ln x+1,\ x>0$.

（2）令$x+\dfrac{1}{x}=u$

当$x>0$时，有

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$$

当$x=\dfrac{1}{x}$，即$x=1$时，等式成立.

当$x<0$时，有

$$x+\frac{1}{x}=-\left(-x-\frac{1}{x}\right)\leqslant -2\sqrt{(-x)\left(-\frac{1}{x}\right)}=-2$$

当$-x=-\dfrac{1}{x}$，即$x=-1$时，等式成立.

因此，$u\leqslant -2$或$u\geqslant 2$.

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=u^2-2$$

所以　$f(u)=u^2-2,\ u\leqslant -2$或$u\geqslant 2$,

即　$f(x)=x^2-2,\ x\leqslant -2$或$x\geqslant 2$.

应该注意，e^x的值域才是$f(x)=2\ln x+1$的定义域，$x+\frac{1}{x}$的值域才是$f(x)=x^2-2$的定义域.如果从（2）中的$f(x)=x^2-2$得出定义域是全体实数，那就是错误的.

2.反函数的概念

如果确定函数$y=f(x)$的映射f：$A\to B$是$f(x)$的定义域A到值域B上的一一映射，那么这个映射的逆映射f^{-1}：$B\to A$所确定的函数$x=f^{-1}(y)$叫做函数$y=f(x)$的反函数.函数$y=f(x)$的定义域、值域分别是函数$x=f^{-1}(y)$的值域和定义域.按照习惯上的写法，用x表示自变量，用y表示函数，因此，函数$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$通常写成$y=f^{-1}(x)$.

学习反函数应该注意以下几点：

（1）从定义域到值域上的一一映射所确定的函数有反函数，特别是，单调函数有反函数.但要注意，单调函数一定是从定义域到值域上的一一映射所确定的函数，但是从定义域到值域上的一一映射所确定的函数不一定就是单调函数，比如函数$f(x)=\frac{1}{x}$（$x\in R$且$x\neq 0$）就不是单调函数，虽然它在区间（$-\infty$，0）或（0，$+\infty$）上是减函数，但如果取$x_1<0$，$x_2>0$，这时$x_1<x_2$，而$f(x_2)$却大于$f(x_1)$.函数$f(x)=\frac{1}{x}$（$x\in R$且$x\neq 0$）是从定义域到值域上的一一映射所确定的函数，它有反函数，就是它自己.一般说来，单调函数与从定义域到值域上的一一映射所确定的函数

的关系，可以用集合表示为：{单调函数}⊂{由一一映射所确定的函数}.

（2）反函数的定义域并不是从所求得的反函数的对应法则本身确定的，而是由原来函数的值域确定的.因此，在求反函数时，应先从原来的函数求出它的值域，在求出反函数以后，一定要把原来函数的值域做为反函数的定义域注在反函数的对应法则后面.

（3）如果原来的函数是增（减）函数，那么它的反函数仍然是增（减）函数.就是说，反函数并不改变原来函数的增或减的单调性.

【例6】 已知函数$f(x)=1+\sqrt{x-2}$（$x\geqslant 2$），

（1）判断$f(x)$的增减性；（2）求$f(x)$的反函数.

解：（1）设x_1和x_2是任意两个不小于2的实数，并且$x_1<x_2$.

$$f(x_2)-f(x_1)=(1+\sqrt{x_2-2})-(1+\sqrt{x_1-2})$$
$$=\sqrt{x_2-2}-\sqrt{x_1-2}$$
$$=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2-2}+\sqrt{x_1-2}}$$

$\because$ $x_1<x_2$ $\therefore x_2-x_1>0$.

又 $\sqrt{x_3-2}+\sqrt{x_1-2}>0$，$\therefore$ $f(x_2)-f(x_1)>0$，

即 $f(x_2)>f(x_1)$.

$\therefore$ 函数$f(x)=1+\sqrt{x-2}$（$x\geqslant 2$）是增函数.

（2）设$f(x)=y$，即$y=1+\sqrt{x-2}$.

$\because$ $x\geqslant 2$，$\therefore y\geqslant 1$.

由 $y=1+\sqrt{x-2}$ 解得$x=(y-1)^2+2$.

$\therefore$ 函数$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ $(x \geqslant 2)$ 的反函数是$f(x) = (x-1)^2 + 2$ $(x \geqslant 1)$.

这里要注意，不能把求得的反函数$f(x) = (x-1)^2 + 2$ 的定义域写成$x \in R$.

【例 7】已知函数$y = f(x)$为增函数，求证$y = f^{-1}(x)$也为增函数.

证明：设x_1和x_2是函数$y = f^{-1}(x)$的定义域中任意 两 个实数，并且$x_1 < x_2$，则有$y_1 = f^{-1}(x_1)$和$y_2 = f^{-1}(x_2)$.
因为$y = f(x)$和$y = f^{-1}(x)$互为反函数，所以$x_1 = f(y_1)$和$x_2 = f(y_2)$.
因为$y = f(x)$是增函数，所以当$x_1 < x_2$时，有$y_1 < y_2$，这就证明了函数$y = f^{-1}(x)$也是增函数.

（二）函数的性质

1.函数的单调性

讨论函数的单调性包括两部分内容：对于单调函数，要根据单调函数的定义证明它是增函数还是减函数；对于非单调函数，要求出它的单调区间，然后逐一证明函数在每一个单调区间上的增减性.

要掌握判断函数增减性的方法.按照定义证明函数 的 增减性，就是要证明当$x_1 < x_2$时，$f(x)_2 > f(x_1)$ 或 $f(x_2) < f(x_1)$.为此，通常采用差比法，即求出$f(x_2) - f(x_1)$以后，与零比较；有时也用商比法，即求出$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}$后，与 1 比较，不过要注意$f(x_1)$的符号.

【例 8】函数$f(x)=x^2-\frac{1}{x}$在（0，$+\infty$）上是增函数还是减函数？

解：设x_1和x_2是区间（0，$+\infty$）上的任意两个实数，并且$x_1<x_2$。

$$f(x_2)-f(x_1)=\left(x_2^2-\frac{1}{x_2}\right)-\left(x_1^2-\frac{1}{x_1}\right)$$

$$=(x_2^2-x_1^2)-\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)$$

$$=(x_2+x_1)(x_2-x_1)-\frac{x_1-x_2}{x_2x_1}$$

$$=(x_2-x_1)\left(x_2+x_1+\frac{1}{x_2x_1}\right),$$

$\because$ $0<x_1<x_2<+\infty$,

$\therefore$ $x_2-x_1>0$，$x_2+x_1+\frac{1}{x_2x_1}>0$。

$\therefore$ $f(x_2)-f(x_1)>0$。

$\because$ $f(x_2)>f(x_1)$,

$\therefore$ 函数$f(x)=x^2-\frac{1}{x}$在（0，$+\infty$）上是增函数。

【例 9】试证明指数函数$f(x)=a^x$（$a>0$且$a\neq1$），当$a>1$时，是增函数，当$0<a<1$时，是减函数。

证明：设x_1和x_2是任意两个实数，并且$x_1<x_2$。

显然 $$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}=a^{x_2-x_1}。$$

当$a>1$时，因为$x_2-x_1>0$，所以$a^{x_2-x_1}>1$，于是

$\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}>1$．又因为$a^{x_1}>0$，即$f(x_1)>0$，因此，$f(x_2)>f(x_1)$，这说明$a>1$，指数函数$f(x)=a^x$是增函数。

当$0<a<1$时，因为$x_2-x_1>0$，所以$a^{x_2-x_1}<1$，于是$\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}<1$．又因为$a^{x_1}>0$，即$f(x_1)>0$，因此，$f(x_2)<f(x_1)$，这说明$0<a<1$时，指数函数$f(x)=a^x$是减函数。

【例10】 设$m>n>0$，$a>0$且$a\neq 1$，试比较a^m+a^{-m}和a^n+a^{-n}的大小。

解：

$$\begin{aligned}&(a^m+a^{-m})-(a^n+a^{-n})\\=&(a^m-a^n)+(a^{-m}-a^{-n})\\=&a^n(a^{m-n}-1)+a^{-m}(1-a^{m-n})\\=&(a^{m-n}-1)(a^n-a^{-m})\end{aligned}$$

如果$a>1$，因为$m-n>0$，就有$a^{m-n}>1$，于是$a^{m-n}-1>0$；因为$m>n>0$，所以$a^n>1$，$a^m>1$，从而$a^{-m}<1$，于是$a^n-a^{-m}>0$．因此，$(a^m+a^{-m})-(a^n+a^{-n})>0$，也就是$a^m a+{}^{-m}>a^n+a^{-n}$。

如果$0<a<1$，因为$m-n>0$，所以$a^{m-n}<1$，于是$a^{m-n}-1<0$；因为$m>n>0$，所以$a^n<1$，$a^m<1$，从而$a^{-m}>1$，于是$a^n-a^{-m}<0$．因此，$(a^m+a^{-m})-(a^n+a^{-m})>0$，也就是$a^m+a^{-m}>a^n+a^{-n}$．

综上所述，对于$a>0$且$a\neq 1$，总有$a^m+a^{-m}>a^n+a^{-n}$。

【例11】 设$a>0$，$b>0$，试比较$a^a b^b$和$a^b b^a$的大小。