总主编 单墫 熊斌

奥数教程学习手册

·配《奥数教程》第五版·

高三年级

余红兵 编著

本书配套 奥数教程 和 能力测试
一起使用效果更佳

总主编　单墫　熊斌

奥数教程
学习手册

·配《奥数教程》第五版·

华东师范大学出版社

高三年级　余红兵　编著

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程(第五版)学习手册. 高三年级/余红兵编著. —上海:华东师范大学出版社,2010
ISBN 978-7-5617-8326-9

Ⅰ. 奥…　Ⅱ. 余…　Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 243825 号

奥数教程(第五版)学习手册

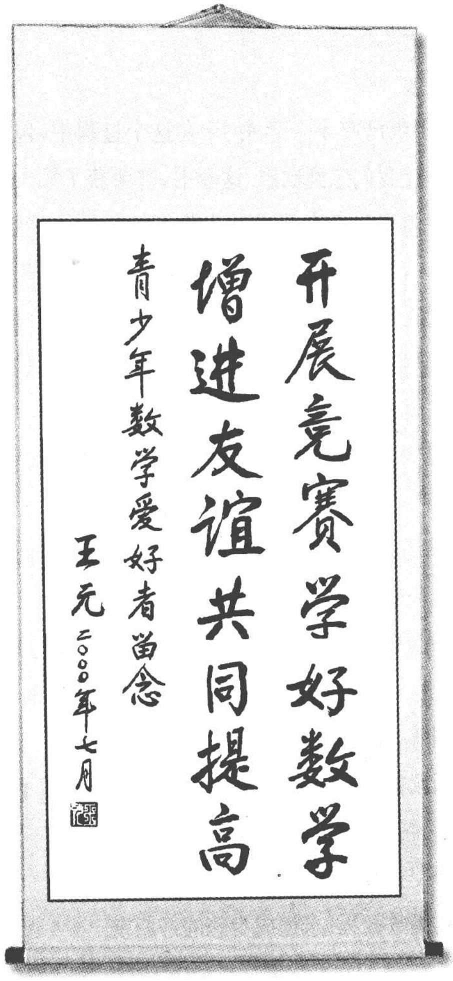
高三年级

总主编　单　墫　熊　斌
编　　著　余红兵
策划组稿　倪　明　孔令志
审读编辑　武文佳
封面设计　高　山
装帧设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://ecnup.taobao.com/

印 刷 者　常熟文化印刷有限公司
开　　本　890×1240　32 开
印　　张　4.5
字　　数　106 千字
版　　次　2011 年 3 月第一版
印　　次　2011 年 3 月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5617-8326-9/G·4881
定　　价　10.00 元

出 版 人　朱杰人



著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生致青少年数学爱好者

致读者

《奥数教程》的出版已有十个年头了.在这个过程中,包含了作者和编辑的辛勤劳作,更多的是让我们感到欣慰.这套书,曾荣获了第十届全国教育图书展的优秀畅销书奖;香港现代教育研究社出版了她的繁体字版和网络版,并成为香港的畅销图书之一,并因此获得了版权输出奖;据北京开卷图书市场研究所的监控销售数据,近几年《奥数教程》的销量名列同类书前茅,尤其是初一和高一分册分别获得数学竞赛图书初中段和高中段的第一.这些成绩的取得与作者们精到的创作,广大读者的支持、呵护是分不开的.

应广大读者的要求,方便读者自学,我们为《奥数教程》每个年级配套出版了相应的"学习手册"."学习手册"包括两个部分内容:

(1) 习题详细解答.《奥数教程》中的习题只提供答案,而"学习手册"中提供了详细的解答,为家长辅导或学生自学提供便利.

(2) 竞赛热点精讲.这部分分若干个专题,这些专题均为有关竞赛的热点.每一专题提供了一批典型题,并有详解.如果说"教程"中的讲解是帮你学习方法,习题作为巩固训练,那么"学习手册"中的这部分内容可让你读题,阅读是很重要的学习方法,阅读能力是重要的学习能力.阅读,打开你的思路,开阔你的眼界.一个个巧妙的、精到的解答一定会深深地吸引着你.

如果"学习手册"与"教程"配套使用,收效一定更佳.

我们衷心祝愿《奥数教程》永远成为您的好朋友.

华东师范大学出版社

前　言

据说在很多国家，特别是美国，孩子们害怕数学，把数学作为“不受欢迎的学科”．但在中国，情况很不相同，很多少年儿童喜爱数学，数学成绩也都很好．的确，数学是中国人擅长的学科，如果在美国的中小学，你见到几个中国学生，那么全班数学的前几名就非他们莫属．

在数(shǔ)数(shù)阶段，中国儿童就显出优势．

中国人能用一只手表示 1～10，而很多国家非用两只手不可．

中国人早就有位数的概念，而且采用最方便的十进制(不少国家至今还有 12 进制，60 进制的残余)．

中国文字都是单音节，易于背诵，例如乘法表，学生很快就能掌握，再“傻”的人也都知道“不管三七二十一”．但外国人，一学乘法，头就大了．不信，请你用英语背一下乘法表，真是佶屈聱牙，难以成诵．

圆周率 $\pi = 3.14159\cdots$．背到小数后五位，中国人花一两分钟就够了．可是俄国人为了背这几个数字，专门写了一首诗，第一句三个单词，第二句一个……要背 π 先背诗，这在我们看来简直是自找麻烦，可他们还作为记忆的妙法．

四则运算应用题及其算术解法，也是中国数学的一大特色．从很古的时候开始，中国人就编了很多应用题，或联系实际，或饶有兴趣，解法简洁优雅，机敏而又多种多样，有助于提高学生的学习兴趣，启迪学生智慧．例如：

“一百个和尚一百个馒头，大和尚一个人吃三个，小和尚三个人吃一个，问有几个大和尚，几个小和尚？”

外国人多半只会列方程解．中国却有多种算术解法，如将每个大和尚“变”成 9 个小和尚，100 个馒头表明小和尚是 300 个，多出 200 个和尚，是由于每个大和尚变小和尚，多变出 8 个，从而 $200 \div 8 = 25$ 即是大和尚人数．小和尚自然是 75 人，或将一个大和尚与 3 个小和尚编成一组，平均每人吃一个馒头．恰好与总体的平均数相等．所以大和尚与小和尚这样编组后不多不少，即大和尚是 $100 \div (3+1) = 25$ 人．

中国人善于计算，尤其善于心算．古代还有人会用手指计算（所谓“掐指一算”）．同时，中国很早就有计算的器械，如算筹、算盘．后者可以说是计算机的雏形．

在数学的入门阶段——算术的学习中，我国的优势显然，所以数学往往是我国聪明的孩子喜爱的学科．

几何推理在我国古代并不发达（但关于几何图形的计算，我国有不少论著），比希腊人稍逊一筹，但是中国人善于向别人学习．目前我国中学生的几何水平，在世界上遥遥领先．曾有一个外国教育代表团来到我国一个初中班，他们认为所教的几何内容太深，学生不可能接受，但听课之后，不得不承认这些内容中国的学生不但能够理解，而且掌握得很好．

我国数学教育成绩显著．在国际数学竞赛中，我国选手获得众多奖牌，就是最有力的证明．从1986年我国正式派队参加国际数学奥林匹克以来，中国队已经获得了14次团体冠军，可谓是成绩骄人．当代著名数学家陈省身先生曾对此特别赞赏．他说：“今年一件值得庆祝的事，是中国在国际数学竞赛中获得第一……去年也是第一名．”（陈省身1990年10月在台湾成功大学的讲演“怎样把中国建为数学大国”）

陈省身先生还预言：“中国将在21世纪成为数学大国．”

成为数学大国，当然不是一件容易的事，不可能一蹴而就，它需要坚持不懈的努力．我们编写这套丛书，目的就是：(1)进一步普及数学知识，使数学为更多的青少年喜爱，帮助他们取得好的成绩；(2)使喜爱数学的同学得到更好的发展，通过这套丛书，学到更多的知识和方法．

“天下大事，必作于细．”我们希望，而且相信，这套丛书的出版，在使我国成为数学大国的努力中，能起到一点作用．本丛书初版于2000年，现根据课程改革的要求对各册再作不同程度的修订．

著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生担任本丛书顾问，并为青少年数学爱好者题词，我们表示衷心的感谢．还要感谢华东师大出版社及倪明、孔令志先生，没有他们，这套丛书不会是现在这个样子．

单 墫 熊 斌

2010年5月

目　录

习题详细解答

专题选讲

第1讲

排列与组合

1 (i) P_6^3; (ii) 6^3.

2 所求的数目等于 1，2，…，9 的 7-排列数减去 8，9 相邻的排列数. 这是 $P_9^7-2!\times6\times P_7^5=151\,200$.（8，9 相邻的 7- 排列数可这样确定：第一步，取 1,2，…，7 的一个 5- 排列，有 P_7^5 种方法；第二步，将 8，9 看作一个整体插在 5- 排列的首、尾或任两个数字之间，有 6 种方法；最后，将 8，9 作全排列有 2!种方法，由乘法原理知这样的排列数是 $2!\times6\times P_7^5$.）

3 6 个歌唱节目有 6! 种排法，每一种排法产生 7 个“空档”，将 4 个舞蹈节目插入这 7 个“空档”，共有 P_7^4 种方法. 因此节目单有 $6!\ P_7^4$ 种排法.

4 由有重复元素的全排列公式知，共有$\dfrac{9!}{2!\ 3!\ 4!}$种方案.

5 易知，所说的“单词”可分为三类：2 个 a，3 个 c；2 个 a，1 个 b，2 个 c；1 个 a，1 个 b，3 个 c. 于是由加法原理及有重复元素的全排列公式知，所求数目为 $\dfrac{5!}{2!0!3!}+\dfrac{5!}{2!1!2!}+\dfrac{5!}{1!1!3!}=60$.

6 先让男生围成一圈，由圆周排列公式知共有 $(n-1)!$ 种方法. 每两个男生之间都有一个空位，共有 n 个. 现在让 n 个女生在这n 个空位上排列，有 $n!$ 种方法. 所以共有 $(n-1)!n!$ 种排法.（应当注意，当男生排好之后，女生的排法便是(直线)排列，而不能再看作圆周排列.）

7 显然，有两个球放入一盒，而其余球各放入一盒. 第一

步，在 $n+1$ 个球中取两个，有 $\binom{n+1}{2}$ 种方法；第二步，将这两个球视为一体，与其余 $n-1$ 个球放入 n 个(不同的)盒子中，有 $n!$ 种方法. 故共有 $\binom{n+1}{2}n! = \frac{n}{2}(n+1)!$ 种放法.

8 掷出的结果是 1, 2, …, 6 的一个 k-可重组合. 故所求的数目等于 $\binom{k+6-1}{k} = \binom{k+5}{k}$.

9 将所说的整数被 3 除得的余数分为三类：$A=\{3, 6, \cdots, 300\}$, $B=\{2, 5, \cdots, 299\}$, $C=\{1, 4, \cdots, 298\}$. 所取的三个数之和被 3 整除有四种情况：三数同属 A, B, C 之一或三数分别取自 A, B, C. 由加法原理，取法共有 $3\binom{100}{3}+100^3$ 种.

10 设五个点为 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. 两两连成的直线有 $\binom{5}{2}=10$ 条. 每三点构成一个三角形，共有 $\binom{5}{3}=10$ 个三角形. 由其中任四点可连 $\binom{4}{2}=6$ 条直线，自另一点可作这 6 条直线的垂线，故总共可作 $5\times 6=30$ 条垂线. 这些垂线至多有 $\binom{30}{2}=435$ 个交点. 但在上述 10 条连线的每一条上有三条垂线互相平行(没有交点)，因而应减去 30 个交点；此外，10 个三角形中每三条高交于一点，因而又要减去 20 个交点；而每个点 A_i 都是 6 条垂线的交点，所以还要减去 $5\binom{6}{2}=75$ 个交点. 最后得交点至多为 310 个.

第 2 讲

二项式系数

1 对 k 归纳. $k=1$ 时结论显然成立. 设 $k-1$ 时等式成立($k\geqslant 2$),则由归纳假设及(5)可知

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}=(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}+(-1)^k\binom{n}{k}$$
$$=(-1)^{k-1}\left(\binom{n-1}{k-1}-\binom{n}{k}\right)$$
$$=(-1)^{k-1}\left(-\binom{n-1}{k}\right)=(-1)^k\binom{n-1}{k}.$$

2 设 $a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^k}(n\geqslant 1)$,则 $a_1=2$, 由(5)可得

$$a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1+k}{k}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+k}{k-1}\frac{1}{2^k}$$
$$=a_n+\binom{2n+1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+2}\binom{n+1+k-1}{k-1}\frac{1}{2^{k-1}}-\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{n+2}}$$
$$=a_n+\frac{1}{2}a_{n+1}.$$

故 $a_{n+1}=2a_n$ 对所有 $n\geqslant 1$ 都成立,由此及 $a_1=2$ 可得 $a_n=2^n$.

3 记所说的和为 a_n,则 $a_0=a_1=1$. 对 $n\geqslant 2$,我们有(利用(5)式)

$$a_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k}{4^k}\binom{n-k-1}{k}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k}{4^k}\binom{n-k-1}{k}.$$

在第一项中，如 n 是奇数，则 $\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right]$；如 n 是偶数，则当 $k=\frac{n}{2}$ 时 $\binom{n-k-1}{k}=0$，而 $\left[\frac{n}{2}\right]-1=\left[\frac{n-1}{2}\right]$. 故上面第一项是 $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^k}{4^k}\binom{n-1-k}{k}=a_{n-1}$. 类似地，第二项是 $\sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k}{4^k}\binom{n-1-k}{k}=-\frac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\frac{(-1)^k}{4^k}\binom{n-2-k}{k}$. 因此我们导出 $a_n=a_{n-1}-\frac{1}{4}a_{n-2}(n\geqslant 2)$. 此即

$$a_n-\frac{1}{2}a_{n-1}=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}-\frac{1}{2}a_{n-2}\right).$$

易知 $a_n-\frac{1}{2}a_{n-1}=\frac{1}{2^n}$. 故对 $n\geqslant 1$ 有

$$a_n=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}a_{n-1}=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2}a_{n-2}\right)$$

$$=\cdots=\frac{n}{2^n}+\frac{a_0}{2^n}=\frac{n+1}{2^n}.$$

4 利用 $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$ 及二项式定理易得结果. 参考例 1 中(i)的变形方法.

5 记所说的和为 a_n. 利用

$$\frac{1}{k}\binom{n}{k}=\frac{1}{k}\left(\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right)=\frac{1}{k}\binom{n-1}{k}+\frac{1}{n}\binom{n}{k}$$

及二项式定理，可得

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\binom{n}{k}+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\binom{n-1}{k}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

$$=a_{n-1}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}=a_{n-1}+\frac{1}{n}.$$

因为 $a_1=1$，由上式及归纳法即得结果.

6 当 $n<m$ 和 $n=m$ 时易知结论成立. 当 $n>m$ 时，用(12)及(9)，我们得出

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k+m}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k+m}\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}\ (\text{记 } i=k-m)$$

$$=\binom{n}{m}\sum_{i=0}^{n-m}(-1)^{i}\binom{n-m}{i}=0.$$

7 记所说的和为 a_n，并记 $b_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}$，这是与 a_n“互补”的数列，则 $a_n+b_n=2^{2n}$，又由(4)得

$$b_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{2n-k}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}=a_n-\binom{2n}{n}.$$

由此易得结果.

8 记 $a_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left\{\binom{n}{k}^2+\binom{n}{k-1}^2\right\}$，$b_n=2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}$.

我们证明 $a_n-b_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

当 n 为偶数时，由(4)及范德蒙恒等式易知(参考注 4).

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n},$$

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\binom{n}{k-1}=\binom{2n}{n-1}=\binom{2n}{n+1}.$$

故 $a_n-b_n=\binom{2n}{n}\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. 如 n 是奇数,则

$$a_n=\binom{2n}{n}-\binom{n}{\frac{n+1}{2}}^2,\ b_n=\binom{2n}{n-1}-\binom{n}{\frac{n-1}{2}}^2.$$

由此即得 $a_n-b_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

9 假设有 n, k 使所说的四个数成等差数列,则从 $2\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+2}$ 得出

$$\frac{k+1}{n-k}+\frac{n-k-1}{k+2}=2. \qquad ①$$

再由 $2\binom{n}{k+2}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+3}$ 可推出,将 k 换为 $k+1$ 时①也成立. 此外,用 $n-k-2$ 代换 k, ①的左边不变. 因①去分母后是关于 k 的二次方程,上面的讨论表明,该二次方程有四个根: k, $k+1$, $n-k-2$, $n-(k+1)-2$. 因此必须有 $k=n-k-3$, $k+1=n-k-2$. 由此得 $n=2k+3$, 故 n 是奇数,而 $k=\frac{n-3}{2}$,所以问题中说的四个数是 n 阶二项式系数中的中间四项,由二项式系数的单峰性,即知它们不能成等差数列.

10 从 $2n$ 个不同元素中取 2 个元素,有 $\binom{2n}{2}$ 种取法. 另一方面,这也可按下面的方式计数:将 $2n$ 个元素(任意)分为两个 n 元集合,可在同一个集中取 2 个元素,或各在一个集合中取 1 个元素. 前者有 $2\binom{n}{2}$ 种取法,后者(由乘法原理)有 n^2 种取法. 这两类取法显然没有重复,故共有 $2\binom{n}{2}+n^2$ 种取法,由此得到结果.

11 由(11)、(4)及范德蒙恒等式，我们有

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{n-k}\binom{n}{k}$$
$$= n\binom{2n-1}{n} = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

考虑下面的计数问题，可导出等式的一个组合证明：从 n 个男士、n 个女士中选取 n 人组成委员会，并规定委员会的主席必须为女士.

首先，从 n 个女士中选一人作为主席的方式共 n 种；选定主席后，再从剩下的 $2n-1$ 个人中选取 $n-1$ 人(作为委员会的成员)，共有 $\binom{2n-1}{n-1}$ 种选法. 由乘法原理，所说的 n 人委员会的选取方式共有 $n\binom{2n-1}{n-1}$ 种.

另一方面，对任意 k $(1\leqslant k\leqslant n)$，先从 n 个女士中选取 k 个人作为委员会成员的方式有 $\binom{n}{k}$ 种，而其中一人任主席的方式有 k 种选法；再于 n 位男士中选取 $n-k$ 人作为委员的方式有 $\binom{n}{n-k}$ 种，因此，有 k 位女士(其中一人为主席)的 n 人委员会有 $k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=k\binom{n}{k}^2$ 种选法. 由加法原理，对 $k=1, \cdots, n$ 求和，则所说的选法共有 $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2$ 种. 综合这两种计数结果，即得求证的等式.

第 3 讲

计数:对应与递推

1 设 f 是满足要求的任一映射,并设 $f(1)$, $f(2)$, $\cdots$, $f(n)$(从左往右)依次有 x_1 个 1, x_2 个 2, $\cdots$, x_n 个 n,则(x_1, $\cdots$, x_n)是方程 $x_1+\cdots+x_n=n$ 的一组有序非负整数解. 反过来,由方程的任一组非负整数解(x_1, $\cdots$, x_n)可作出一个符合要求的映射 f(取 $f(1)=\cdots=f(x_1)=1$, $f(x_1+1)=\cdots=f(x_1+x_2)=2$, $\cdots$, $f(x_1+\cdots+x_{n-1}+1)=\cdots=f(x_1+\cdots+x_n)=n$). 从而由例 1 知所求的个数是 $\binom{2n-1}{n}$.

2 第 i 种明信片的寄法等于 $x_1+\cdots+x_n=a_i$ 的(有序)非负整数解的个数,即为 $\binom{a_i+n-1}{n-1}$. 故所求的方法数是 $\binom{a_1+n-1}{n-1}\cdots\binom{a_k+n-1}{n-1}$.

3 用例 1 的解法:将 n 个相同的球排成一行,每两个球之间有一个空隙,共有 $n-1$ 个空隙,每个空隙均有"插"与"不插"隔板两种选择. 而一种插隔板的方式对应了 n 的一个有序分拆,且一个有序分拆也对应了一种插隔板的方式. 因此所求的分拆数是 2^{n-1}.

4 圆周上每四个点构成一个凸四边形,其对角线(是所考虑的两条弦)交于一点. 因此每四点的集合对应于一个交点. 由于无三弦交于一点,所以不同的四点集对应于不同的交点. 反过来,对任一交点,易知有一个四点集合(如上所说的)与之对应. 所以,