OLYMPIC

浙江省教育学会中学数学教学分会 编写

GAOZHONG SHUXUE

高中数学

奥林匹克竞赛教程

AOLINPIKE JINGSAIJIAOCHENG

基础篇

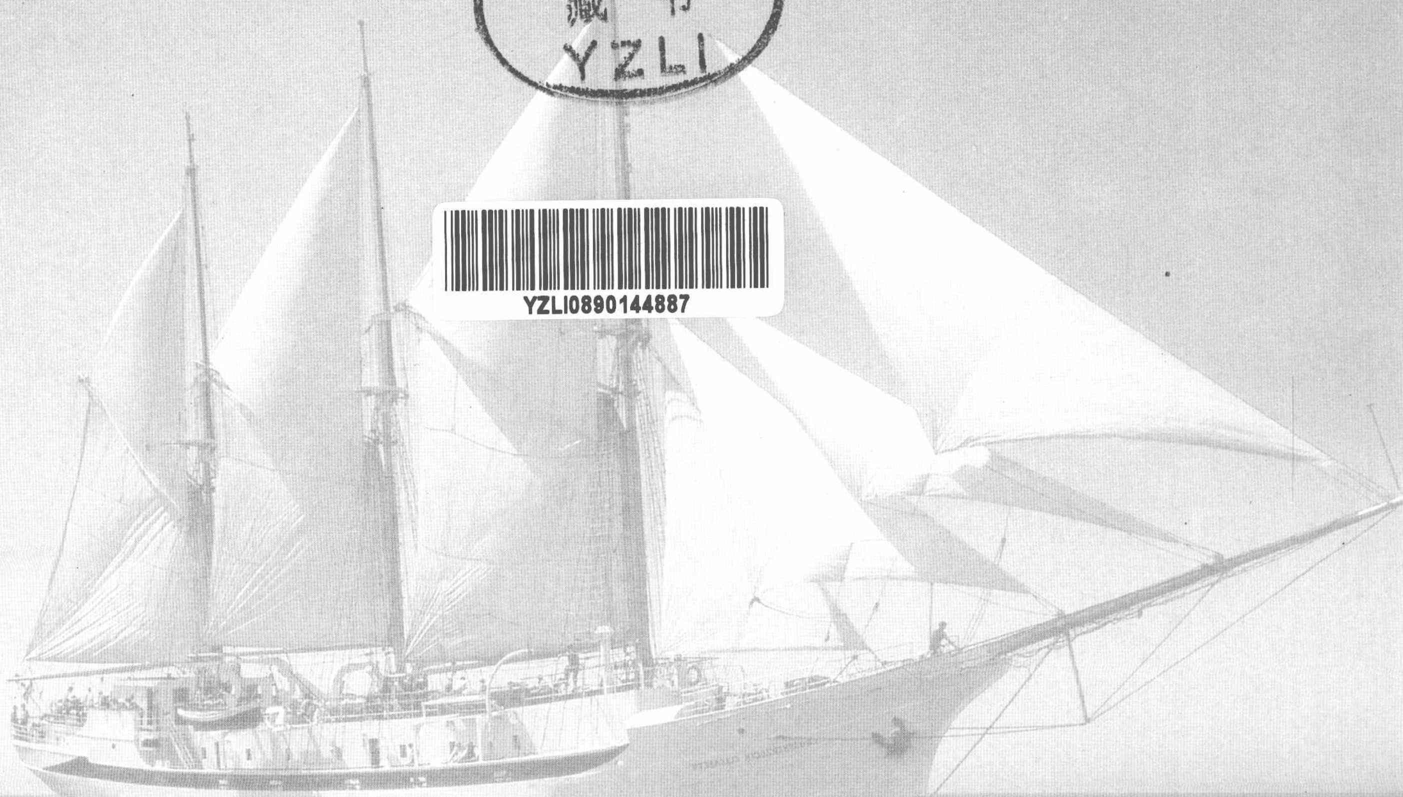
浙江省教育学会中学数学教学分会 编写

GAOZHONG SHUXUE

高中数学
奥林匹克竞赛教程

AOLINPIKE JINGSAIJIAOCHENG

基础篇



浙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学奥林匹克竞赛教程. 基础篇 / 张金良编. —杭州:浙江教育出版社,2011.3(2011.12 重印)

ISBN 978-7-5338-8771-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… Ⅲ.①数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 242524 号

责任编辑 金馥菊 **责任校对** 胡 星
封面设计 韩 波 **责任印务** 温劲风

高中数学
奥林匹克竞赛教程 基础篇

浙江省教育学会中学数学教学分会 编写

○ 出版发行:浙江教育出版社
(杭州市天目山路 40 号 邮编:310013)
▷ 图文制作:杭州富春电子印务有限公司
▷ 印 刷:杭州飞达工艺美术印刷厂
▷ 开 本:850×1168 1/16
▷ 印 张:15.5
○ 字 数:380 000
○ 版 次:2011 年 3 月第 1 版
▷ 印 次:2011 年 12 月第 2 次印刷
▷ 标准书号:ISBN 978-7-5338-8771-1
○ 定 价:25.00 元

联系电话:0571-85170300-80928
e-mail:zjjy@zjcb.com
网 址:www.zjeph.com

前 言

高中数学课程改革的基本理念之一是提供多样课程，适应个性选择，使不同的学生在数学上得到不同的发展。由中国数学会组织的“全国高中数学联赛”是为了激发学生学习数学的兴趣，培养数学优秀人才，使有数学爱好的学生在数学上获得更好的发展。近几年高中数学竞赛的命题原则是“试题所涉及的知识范围不超出教育部2000年颁布的《全日制普通高级中学数学教学大纲》”，并且竞赛试题分一、二两试。一试试题着眼于普及，重在考查数学的基础知识和基本技能，试题考查的方向和要求与高考综合性试题基本一致，略有提高；二试着眼于提高，着重考查学生运用数学知识、方法解决实际问题的能力，涉及平面几何、代数、数论、组合四个方面。因此近几年，数学竞赛活动越来越多地受到广大中学师生的欢迎，有越来越多的学校的师生加入竞赛行列，他们迫切需要一本依据教学大纲，源于教材又高于教材，以教材内容、高考要求为起点，逐步上升到高中数学联赛一试、二试水平的竞赛辅教、辅学用书。为此，我会组织了浙江省有丰富竞赛辅导经验的特级教师、高级教师和奥林匹克竞赛金牌教练员编写了本丛书。

本丛书分基础篇、提高篇和模拟篇三册，其中基础篇主要根据高考和竞赛一试要求编写，提高篇根据二试要求编写，模拟篇收集了28份奥林匹克竞赛模拟试卷。因此基础篇既可作为高考复习的提高用书，也可以作为竞赛辅导的同步教程，是高考、自主招生和竞赛一试取得好成绩的保障，也是通向二试的阶梯。

本丛书内容涵盖全国高中数学联赛命题要求的全部知识点，与高中教材内容同步，分章编写，每章设若干讲，每讲设“知识归纳”、“典型例题”、“方法导引与拓展”、“巩固练习”四个栏目。“典型例题”突出代表性和新颖性，解法简捷、分析到位，便于教师辅导和学生自学；“方法导引与拓展”起到画龙点睛的作用；“巩固练习”题量适中，紧扣高考要求，精心选编高考、自主招生和竞赛佳题、新题，凸现创新、综合和实践能力的培养。

本丛书基础篇第一章由宁波效实中学胡建军编写，第二章由宁波镇海中学黄维民编写，第三章由省教研室张金良编写，第四章由东阳中学吴国建编写，第五章由杭州二中蔡小雄编写，第六章由嘉兴一中吕峰波、沈新权编写，第七章由金华一中陶文强编写，第八章由杭州学军中学郑日锋编写，第九章由宁波镇海中学沈虎跃编写，第十章由杭州学军中学冯定应编写。提高篇第一章、

第四章由嘉兴一中沈新权、吕峰波编写，第二章由杭州二中蔡小雄编写，第三章由宁波北仑中学马洪炎编写，第五章由杭州二中楼肇庆编写，第六章由杭州外国语学校斯理炯编写。模拟试卷由嘉兴一中、杭州二中、宁波效实中学、杭州学军中学、杭州外国语学校、宁波镇海中学、金华一中、东阳中学提供。全书由张金良统稿。

本丛书凝聚着我省高中数学竞赛指导老师的教学精华，希望能为广大师生提供有益的参考，并恳请读者在使用过程中多提宝贵意见，使之更臻完美。

本次印刷时，对个别差错作了校正。

浙江省教育学会中学数学教学分会

2011 年 12 月

目　录

基础篇

学习札记

第一章 集合、常用逻辑用语、算法

第一讲 集合

知识归纳

集合的运算是高考和竞赛的热点之一，考查内容包括对子集、交集、并集、全集、补集概念的理解，集合间的转化，集合运算性质的应用等.

1. 集合的概念.

集合是数学中的原始概念，其表示方法有列举法、描述法和韦恩(Venn)图表示法，常用的集合还有约定的字母符号表示(如实数集用 $\mathbf{R}$，空集用 $\varnothing$ 表示等).

2. 集合之间的关系.

元素与集合之间具有"属于($\in$)"或"不属于($\notin$)"的关系，集合与集合之间的关系包括包含关系、相等关系和不包含关系. 包含关系与子集概念等价，即集合 A 包含于集合 B 等价于 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$；集合 A 真包含于集合 B 等价于 A 是 B 的真子集，记做 $A\subsetneqq B$；若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则集合 A,B 相等，记做 $A=B$.

3. 集合的运算.

除教科书上介绍的运算律外，还有下面的两个运算律(U 是全集)：

(1) 分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(2) 摩根律 $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$,

$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

4. 有限集的子集的个数.

若有限集 A 含有 n 个元素，则 A 的子集有 2^n 个，真子集有 (2^n-1) 个，非空子集有 (2^n-1) 个.

5. 有限集的元素个数.

对任意两个有限集合 A,B，有 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$，$\mathrm{card}[\complement_U(A\cup B)]=\mathrm{card}U-\complement_U A-\complement_U B+\complement_U(A\cap B)$. 此结论可以推广到任意 n 个有限集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$(称为容斥原理).

典型例题

例 1 已知集合 $A=\{2,4,6,8,9\}$，$B=\{1,2,3,5,8\}$. 集合 C 满足下列条件：若集合 C 中各元素都加 2，就变为 A 的一个子集；若集合 C 中各元素都减 2，就变为 B 的一个子集. 求集合 C.

解 集合 A 中各元素都减 2，得 $\{0,2,4,6,7\}$；集合 B 中各元素都加 2，得 $\{3,4,5,7,10\}$. 由题意，得集合 $C\neq\varnothing$，且 $C\subseteq\{0,2,4,6,7\}$，$C\subseteq\{3,4,5,7,10\}$，

$\therefore$ $C\neq\varnothing$，且 $C\subseteq\{4,7\}$. $\therefore$ $C=\{4\}$，或 $C=\{7\}$，或 $C=\{4,7\}$.

评注 通过本题，我们体会到列举法能直观地表示集合. 根据条件写出集合 C 所属的两个集合，而集合 C 是这两个集合交集的子集，得到交集即可得到集合 C.

学习札记

例 2 已知集合 $M=\{x|ax+1=0\}$，$N=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$M\cap N=M$，求实数 a 的值.

分析 $M\cap N=M$ 可转化为 $M\subseteq N$，化简集合 M,N 即可.

解 由 $M\cap N=M$，得 $M\subseteq N$，其中 $N=\{1,2\}$.

为了求集合 M，分下列两种情况讨论：(1) 当 $a=0$ 时，$M=\varnothing$，适合条件. (2) 当 $a\neq 0$ 时，$M=\left\{-\dfrac{1}{a}\right\}$，要使 $M\subseteq N$，只需 $-\dfrac{1}{a}=1$，或 $-\dfrac{1}{a}=2$， ∴ $a=-1$，或 $a=-\dfrac{1}{2}$.

综上所述，$a=0$，或 $a=-1$，或 $a=-\dfrac{1}{2}$.

评注 有关两个集合关系的问题不可忽视空集、全集的情况，本题极易漏掉 $a=0$.

例 3 (1) 已知集合 $A=\{x|x^2+2x-3=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|-x^2+2x+15=0,x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$.

(2) 已知集合 $A=\{y|y=x^2+2x-3,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y|y=-x^2+2x+15,x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$.

(3) 已知集合 $A=\{y|y=x^2+2x-3,x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{y|y=-x^2+2x+15,x\in\mathbf{N}\}$，求 $A\cap B$.

(4) 已知集合 $A=\{(x,y)|y=x^2+2x-3,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)|y=-x^2+2x+15,x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$.

解 (1) 集合 A,B 是二次方程的解集，求 $A\cap B$ 即求两个二次方程的公共解构成的集合. 由 $x^2+2x-3=0$，得 $x=-3$，或 $x=1$. 由 $-x^2+2x+15=0$，得 $x=-3$，或 $x=5$.

∴ $A\cap B=\{-3,1\}\cap\{-3,5\}=\{-3\}$.

(2) 集合 A,B 是二次函数的函数值 y 的取值范围，$A\cap B$ 即为两个二次函数值取值范围的公共部分构成的集合.

∵ $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4\geqslant -4$，$y=-x^2+2x+15=-(x-1)^2+16\leqslant 16$，

∴ $A\cap B=\{y|y\geqslant -4\}\cap\{y|y\leqslant 16\}=\{y|-4\leqslant y\leqslant 16\}$.

(3) 由 $x\in\mathbf{N}$，得 A,B 是变量 x 取自然数时，所对应的整数值构成的集合.

∵ $A=\{-3,0,5,12,21,\cdots\}$，$B=\{15,16,12,7,0,-9,\cdots\}$， ∴ $A\cap B=\{0,12\}$.

(4) 集合 A,B 表示抛物线上的点集(或二元二次方程的解集)，

∴ $A\cap B$ 是两条抛物线的交点构成的集合.

由 $\begin{cases}y=x^2+2x-3,\\ y=-x^2+2x+15,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\ y=12,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-3,\\ y=0.\end{cases}$ ∴ $A\cap B=\{(3,12),(-3,0)\}$.

评注 (1) 用描述法表示集合 $\{x|x\in p\}$ 时，要有代表元素 x 及它所具有的性质 p 这两项内容.

(2) 描述法表示集合具有概括、简练和抽象的特点，列举法表示集合具有直观、清晰和可数的特点，解题时要根据需要进行互化.

例 4 已知集合 $M=\{x|x^2-(k-3)x-4k=0\}$，$N=\{x|x>0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $M\cap N=\varnothing$，求实数 k 的取值范围.

分析 由 M 是一元二次方程的解集，N 是正实数集，得 $M\cap N=\varnothing$ 等价于二次方程无解或有两个非正实数解.

解 当 $M=\varnothing$ 时，$\Delta=(k-3)^2+16k=k^2+10k+9<0$，解得 $-9<k<-1$.

当 $M\neq\varnothing$ 时，$x^2-(k-3)x-4k=0$ 有两个非正实数解，则

$\begin{cases}\Delta=k^2+10k+9\geqslant 0,\\ x_1+x_2=k-3\leqslant 0,\\ x_1x_2=-4k\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}k\leqslant -9,\text{或 } k\geqslant -1,\\ k\leqslant 3,\\ k\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $k\leqslant -9$，或 $-1\leqslant k\leqslant 0$.

学习札记

∴　实数 k 的取值范围是 $k\leqslant 0$.

评注　集合是一种数学语言，根据集合运算进行等价转化是解决集合运算问题的基本思路. 而理解问题中集合表示的对象，联想有关知识，是正确转化的关键.

例 5　已知全集 $U=\{x\mid x^2<50, x\in\mathbf{N}\}$，$(\complement_U M)\cap L=\{1,6\}$，$M\cap(\complement_U L)=\{2,3\}$，$\complement_U(M\cup L)=\{0,5\}$，求 M 和 L.

分析　题中出现 $U, M, L, \complement_U M, \complement_U L$ 等多个集合，可以运用 Venn 图解题.

解　①全集 $U=\{x\mid x^2<50, x\in\mathbf{N}\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

②如图 1-1，将 $(\complement_U M)\cap L=\{1,6\}$，$M\cap(\complement_U L)=\{2,3\}$，$\complement_U(M\cup L)=\{0,5\}$ 中的元素在图中依次定位.

③将元素 4,7 定位.

④根据图中元素的位置，得 $M=\{2,3,4,7\}$，$L=\{1,6,4,7\}$.

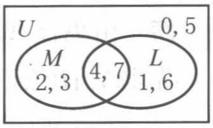


图 1-1

评注　集合问题比较抽象，解题时应尽可能借助韦恩图、数轴等直观图形，利用数形结合思想将抽象问题直观化、明朗化，从而使问题得到解决.

例 6　设集合 $M=\{1,2,\cdots,2\,010\}$，A 是 M 的子集，且满足条件：当 $x\in A$ 时，$15x\notin A$，则 A 中元素的个数最多是多少个？

解　由题设知，k 与 $15k$ 这两个数中至少有一个不属于 A.

∵　$\left[\dfrac{2\,010}{15}\right]=134$，　∴　$k=135,136,\cdots,2\,010$ 时，$15k$ 一定不属于 A.

同理，$\left[\dfrac{134}{15}\right]=8$，当 $k=9,10,\cdots,134$ 时，k 与 $15k$ 不能同时属于 A，此时至少有 $134-8=126$ 个数不属于 A，于是，$|A|\leqslant 2\,010-126=1\,884$.

因为可取 $A=\{1,2,\cdots,8\}\cup\{135,136,\cdots,2\,010\}$，所以 card$(A)$ 的最大值为 1 884.

例 7　设集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$.

(1) 当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有 2 个元素的集合？

(2) 当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有 3 个元素的集合？

分析　因为 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，所以只要求出 $A\cap C$ 和 $B\cap C$ 中的元素，再分别加以讨论即可.

解　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$A\cap C$ 与 $B\cap C$ 分别为方程组

(Ⅰ)$\begin{cases}ax+y=1,\\x^2+y^2=1,\end{cases}$(Ⅱ)$\begin{cases}x+ay=1,\\x^2+y^2=1\end{cases}$的解集.

由(Ⅰ)，得 $(x,y)=(0,1)$ 或 $\left(\dfrac{2a}{1+a^2},\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)$.

由(Ⅱ)，得 $(x,y)=(1,0)$ 或 $\left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2},\dfrac{2a}{1+a^2}\right)$.

(1) 要使 $(A\cup B)\cap C$ 含有 2 个元素，只需① $\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=0,\\\dfrac{1-a^2}{1+a^2}=1,\end{cases}$ 或② $\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=1,\\\dfrac{1-a^2}{1+a^2}=0.\end{cases}$

由①，得 $a=0$. 由②，得 $a=1$.

故当 $a=0$ 或 1 时，$(A\cup B)\cap C$ 含有 2 个元素.

(2) 要使 $(A\cup B)\cap C$ 含有 3 个元素，只需 $\dfrac{2a}{1+a^2}=\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$，解得 $a=-1\pm\sqrt{2}$.

学习札记

故当 $a=-1\pm\sqrt{2}$ 时，$(A\cup B)\cap C$ 含有 3 个元素.

评注 解决本题的关键是合理利用集合的运算律.

例 8 已知集合 $A=\{(x,y)\mid |x|+|y|=a,a>0\}$，$B=\{(x,y)\mid |xy|+1=|x|+|y|\}$. 若 $A\cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合，求 a 的值.

分析 由已知条件知，$A\cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合，故需先求出 $A\cap B$ 的具体元素，然后利用数形结合思想解题.

解 由集合 A,B，得 $A\cap B=\{(x,y)\mid |x|+|y|=a,|xy|=a-1,a\geqslant 1\}$.

先求 $A\cap B$ 位于第一象限内的点.

解方程组 $\begin{cases}x+y=a,\\xy=a-1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=a-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=a-1,\\y=1.\end{cases}$ 于是得到 $A\cap B$ 在第一象限内的两点 $(1,a-1)$，$(a-1,1)$. 注意到集合 $A\cap B$ 中的元素满足的式子都是绝对值方程，所以与第一象限内两点关于 x 轴、原点、y 轴对称的 6 个点仍然是 $A\cap B$ 中的元素，如图 1－2 所示.

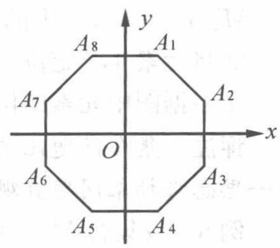


图 1－2

下面讨论 a 取何值时，这 8 个点构成正八边形.

①若点 $A_1(1,a-1)$，$A_2(a-1,1)$，则点 $A_8(-1,a-1)$. 于是 $2=A_1A_8=A_1A_2=\sqrt{(a-2)^2+(a-2)^2}=\sqrt{2}|a-2|$，得 $a=2+\sqrt{2}$ （$a=2-\sqrt{2}<1$，舍去）.

②若点 $A_1(a-1,1)$，$A_2(1,a-1)$，则点 $A_8(1-a,1)$. 于是 $2(a-1)=A_1A_8=A_1A_2=\sqrt{(a-2)^2+(a-2)^2}=\sqrt{2}|a-2|$，得 $a=\sqrt{2}$ （$a=-\sqrt{2}<0$，舍去）.

综上所述，a 的值为 $2+\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$.

评注 解本题的关键是用代数方法(解方程组)求出正八边形在第一象限内的两个顶点 A_1，A_2 的坐标，然后利用对称性求出顶点 A_8 的坐标，再利用 $A_1A_8=A_1A_2$，构造关于 a 的方程. 本题还有一种解法：点集 A 中的点构成顶点为 $(a,0)$，$(0,a)$，$(-a,0)$，$(0,-a)$ 的正方形的四条边；对于点集 B，可将 $|xy|+1=|x|+|y|$ 变形为 $(|x|-1)(|y|-1)=0$，所以点集 B 中的点构成四条直线 $x=\pm1$，$y=\pm1$. 以下可以利用数形结合思想，请读者自行完成.

例 9 集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足下列条件：

①$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A$.

②$A_i\cap A_j=\varnothing$，$1\leqslant i<j\leqslant n$.

那么称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为集合 A 的一个 n 划分.

求最小正整数 m，使得对 $A=\{1,2,\cdots,m\}$ 的任意一个 14 划分 $A_1,A_2,\cdots,A_{14}$，一定存在某个集合 A_i （$1\leqslant i\leqslant 14$），在 A_i 中有 2 个元素 a,b，满足 $b<a\leqslant\frac{4}{3}b$.

解 (1) 若 $m<56$，令 $A_i=\{a\mid a\equiv i(\mathrm{mod}\ 14),a\in A\}$，则 $\forall\, b<a\in A_i$ （$i=1,2,\cdots,14$），均有 $56>a>b$，且 $a-b\geqslant 14$. 故 $b\leqslant a-14<42$.

于是，$\frac{a}{b}=1+\frac{a-b}{b}\geqslant 1+\frac{14}{b}>1+\frac{14}{42}=\frac{4}{3}$. 故正整数 $m\geqslant 56$.

(2) 若 $m=56$，则对 A 的任意划分 $A_1,A_2,\cdots,A_{14}$，数 $42,43,\cdots,56$ 中，必有两个数属于同一个 A_i，它们满足 $b<a\leqslant\frac{4}{3}b$.

综上所述，所求 m 的最小正整数值为 56.

例 10 对集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 及其每一个非空子集，定义一个唯一确定的“交替和”如下：按照递减的次序重新排列该子集，然后从最大的数开始，交替地减、加后继的数所得的结果. 例如，集合 $\{1,2,4,7,10\}$ 的“交替和”是 $10-7+4-2+1=6$，$\{7,10\}$ 的“交替和”是 $10-7=3$，$\{5\}$ 的“交替和”是 5 等. 试求 A 的所有非空子集的“交替和”的总和.

分析 A 的非空子集共有 (2^n-1) 个，显然，逐个计算“交替和”然后相加是不可能的，必须通过分析“交替和”的特点，寻找解决问题的“窍门”. 为了分析“交替和”的特点，可以先令 n 为某一恰当的具体的数(如 $n=4$)，这是解决数学问题的常用方法(从特殊到一般的方法).

当 $n=4$ 时，$A=\{1,2,3,4\}$，非空子集共有 15 个. 它们的全部“交替和”如下：

$\{1,2,3,4\}$：$4-3+2-1$；

$\{1,2,3\}$：$3-2+1$；

$\{1,2,4\}$：$4-2+1$；

$\{1,3,4\}$：$4-3+1$；

$\{2,3,4\}$：$4-3+2$；

$\{1,2\}$：$2-1$；

$\{1,3\}$：$3-1$；

$\{1,4\}$：$4-1$；

$\{2,3\}$：$3-2$；

$\{2,4\}$：$4-2$；

$\{3,4\}$：$4-3$；

$\{1\}$：1；

$\{2\}$：2；

$\{3\}$：3；

$\{4\}$：4.

从以上写出的“交替和”中，我们可以发现，除集合 $\{4\}$ 以外，可以把 A 的子集分成两类：一类子集中包含 4，另一类不包含 4. 并且可以在这两类集合之间建立一个一一映射：设 A_i 是 A 的一个不包含 4 的子集，则令 A_i 与集合 $A_i\cup\{4\}$ 相对应. 显然 A_i 与 $A_i\cup\{4\}$ 的“交替和”之和是 4. 由于这样的 A_i 共有 $\frac{1}{2}(2^4-2)=7$ 个，故 A 的所有子集的“交替和”的总和是 $7\times4+4=32$.

解 集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空子集中，除去集合 $\{n\}$，还有 2^n-2 个非空子集. 现将这 2^n-2 个子集分成两类：第一类是包含元素 n 的子集，第二类是不包含 n 的子集. 在第二类子集与第一类子集之间建立如下对应关系，f：$A_i\to A_i\cup\{n\}$，其中 A_i 是第二类子集，显然这种对应是一一映射. 设 A_i 的交替和为 k，则 $A_i\cup\{n\}$ 的交替和为 $n-k$，这一对集合的交替和的和等于 n，故集合 A 的所有非空子集的“交替和”的总和是

$$\frac{1}{2}(2^n-2)\cdot n+n=2^{n-1}\cdot n.$$

方法导引与拓展

集合是一种数学基本语言，要正确理解集合语言，合理使用集合语言表示相关的数学对象，解决相关的数学问题. 在描述法表示的集合 $\{x\mid x\in p\}$ 中，有代表元素 x 及它所具有的性质 p 两项内容，不同形式的代表元素表示不同的集合(如例 3、例 7).

纠错笔记

解决有关集合之间的关系问题，要注意抓住元素这个关键，同时不能忽视空集这个特殊情况，否则极易漏解(如例 2、例 4).

集合问题是综合问题，它可能涉及代数、几何、数论、计数以及其他数学内容和数学思想方法. 如例 3、例 4 涉及函数、方程，例 5、例 8 运用了数形结合思想，例 10 运用了映射思想等.

巩固练习

1. 定义集合运算：$A\odot B=\{z\mid z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$. 设集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{2,3\}$，则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和为(　　).
(A) 0　　(B) 6　　(C) 12　　(D) 18
2. 设集合 $M=\{x\mid x=a+\sqrt{2}b,a,b\in\mathbf{Z}\}$，$m\in M$，$n\in M$，则下列结论错误的是(　　).
(A) $m+n\in M$　　(B) $m-n\in M$　　(C) $mn\in M$　　(D) $\dfrac{m}{n}\in M$ $(n\neq 0)$
3. 设全集 $U=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，$A=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{x-2}=1,x,y\in\mathbf{R},且\ x\neq 2\right.\right\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+1,x,y\in\mathbf{R}\}$，则$(\complement_U A)\cap B=$(　　).
(A) $\complement_U A$　　(B) $\complement_U B$　　(C) $\{(2,3)\}$　　(D) $\varnothing$
4. 两个集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l,m,n,l\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{u\mid u=20p+16q+12r,p,q,r\in\mathbf{Z}\}$ 的关系为(　　).
(A) $M=N$　　(B) $M\not\subseteq N,N\not\subseteq M$　　(C) $M\subsetneqq N$　　(D) $N\subsetneqq M$
5. 集合 A,B 的并集 $A\cup B=\{a,b,c\}$，当 $A\neq B$ 时，将(A,B)与(B,A)视为不同的集合对，则这样的集合对(A,B)的个数是(　　).
(A) 8　　(B) 9　　(C) 25　　(D) 27
6. 函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in P\\ -x, & x\in M\end{cases}$，其中 P,M 为实数集 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集. 又规定 $f(P)=\{y\mid y=f(x),x\in P\}$，$f(M)=\{y\mid y=f(x),x\in M\}$. 给出下列四个判断：
①若 $P\cap M=\varnothing$，则 $f(P)\cap f(M)=\varnothing$；
②若 $P\cap M\neq\varnothing$，则 $f(P)\cap f(M)\neq\varnothing$；
③若 $P\cup M=\mathbf{R}$，则 $f(P)\cup f(M)=\mathbf{R}$；
④若 $P\cup M\neq\mathbf{R}$，则 $f(P)\cup f(M)\neq\mathbf{R}$.
其中判断正确的有(　　).
(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个
7. 已知集合 $A=\{x\mid |x-a|\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+4\geqslant 0\}$，且 $A\cap B=\varnothing$，那么实数 a 的取值范围是________.
8. 已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且 $A=B$，那么 x,y 的值分别是________.
9. 某班 41 名学生参加数学、生物、化学 3 个科目的考试，考试不及格的学生人数如下表：

科目	数学	生物	化学	数学、生物	数学、化学	生物、化学	数学、生物、化学
不及格人数	12	5	8	2	6	3	1

三个科目都及格的学生人数是________.

纠错笔记

10. 已知集合 $A=\{x|x^3+2x^2-x-2>0\}$，$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$，$A\cup B=\{x|x+2>0\}$，$A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$，那么 $a=$________，$b=$________.

11. 已知非空集合 $A\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7\}$，且当 $a\in A$ 时，必有 $8-a\in A$，那么符合要求的 A 共有________个.

12. 已知集合 $A=\{x|x^2+(m+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cap\{x|x>0\}=\varnothing$，那么实数 m 的取值范围是________.

13. 已知集合 $A=\{y|y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)>0\}$，$B=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{5}{2},0\leqslant x\leqslant 3\right\}$.

(1) 若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

(2) 当 a 取使不等式 $x^2+1\geqslant ax$ 恒成立的 a 的最小值时，求 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$.

14. 已知一个集合含有 10 个互不相同的两位数，求证：这个集合必有两个无公共元素的子集，这两个子集的各元素之和相等.

15. 已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}(k\geqslant 2)$，其中 $a_i\in\mathbf{Z}\ (i=1,2,\cdots,k)$. 由 A 中的元素构成两个集合：$S=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a+b\in A\}$，$T=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a-b\in A\}$，其中 (a,b) 是有序数对，集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n. 若对于任意 $a\in A$，总有 $-a\notin A$，则称集合 A 具有性质 p.

(1) 检验集合 $\{0,1,2,3\}$ 与 $\{-1,2,3\}$ 是否具有性质 p，并对其中具有性质 p 的集合写出相应的集合 S 和 T.

(2) 对任何具有性质 p 的集合 A，求证：$n\leqslant\dfrac{k(k-1)}{2}$.

(3) 判断 m 和 n 的大小关系，并证明你的结论.

第二讲　常用逻辑用语、算法

学习札记

知识归纳

用 p,q 分别表示一个命题的条件和结论，$\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示条件和结论的否定，那么原命题：若 p，则 q. 逆命题：若 q，则 p. 否命题：若 $\neg p$，则 $\neg q$. 逆否命题：若 $\neg q$，则 $\neg p$. 命题有真有假，但互为逆否命题的两个命题具有相同的真假性，互为逆命题或互为否命题的两个命题不具有相同的真假性.

若命题"若 p，则 q"是真命题，即 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件；若命题"若 p，则 q"、"若 q，则 p"都是真命题，即 $p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充要条件. 判断充要条件的常用方法有定义法、集合法、逆否法等. 判断时要分清"条件"与"结论"，还要掌握其中存在的一些等价关系.

简单的逻辑联结词有"或（$\vee$）"、"且（$\wedge$）"、"非（$\neg$）"，它们能反映命题的构成，也能联结成新的命题. 量词分为"全称量词（$\forall$）"和"存在量词（$\exists$）". 逻辑联结词和量词都有相应的数学符号表，要正确理解它们的含义和作用，能判断由逻辑联结词构成的命题的真假，能正确地对含有量词的命题进行否定.

算法的思想贯穿整个高中数学，是重要的数学思想. 算法具有"明确"、"有限"和"有序"的特征，它的三种基本逻辑结构是顺序结构、条件结构和循环结构，常用表示方法包括自然语言描述、程序框图表示和计算机程序设计语言描述.

学习札记

框图是算法的一种表示方法，它能直观地表达算法的三种基本逻辑结构，通过“读框图”和“画框图”可以建立三种基本逻辑结构和程序框图的关系.

典型例题

例1 判断下列命题的真假：

(1) 对所有的正实数 p，$\sqrt{p}$ 为正数，且 $\sqrt{p}<p$.

(2) 不存在实数 x，使 $x<4$，且 $x^2+5x=24$.

(3) 存在实数 x，使 $|x+1|\leqslant 1$，且 $x^2\geqslant 4$.

(4) 对实数 x，若 $x^2-6x-7>0$，则 $x^2-6x-7\geqslant 0$.

分析 对复合命题，可以先分解，弄清构成它的简单命题的真假，再依据真值表进行判断.

解 (1) 假命题. (2) 假命题. (3) 真命题. (4) 真命题.

例2 已知 a,b 为实数. 给出命题：若 $x^2+ax+b=0$ 有实数解，则 $a^2-4b\geqslant 0$. 试写出该命题的逆命题、否命题和逆否命题，并判断这些命题的真假.

解 逆命题：若 $a^2-4b\geqslant 0$，则 $x^2+ax+b=0$ 有实数解.

否命题：若 $x^2+ax+b=0$ 无实数解，则 $a^2-4b<0$.

逆否命题：若 $a^2-4b<0$，则 $x^2+ax+b=0$ 无实数解.

由于原命题、逆命题均为真命题，因此，四个命题均为真命题.

评注 (1) 解本题的关键是分清原命题中的条件与结论，正确写出条件、结论的否定形式，并掌握四种命题的组成结构.

(2) 在四个命题中，任意两个命题之间的关系或是“互否”，或是“互逆”，或是“互为逆否”，而互为逆否命题的两个命题具有相同的真假性；互为逆命题或否命题的两个命题不具有相同的真假性.

例3 已知 p 是 r 的充分不必要条件，q 是 r 的充分条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件. 现有下列命题：

①s 是 q 的充要条件；

②p 是 q 的充分不必要条件；

③r 是 q 的必要不充分条件；

④$\neg p$ 是 $\neg s$ 的必要不充分条件；

⑤r 是 s 的充分不必要条件.

其中真命题的序号是(　　).

(A) ①④⑤　　(B) ①②④　　(C) ②③⑤　　(D) ②④⑤

分析 直接求解，由于条件较繁杂，容易出错. 根据条件构造网络图(如图1-3)可简便、准确地求解. 由此图可判断 s 是 q 的充要条件，p 是 q的充分不必要条件，$\neg p$ 是 $\neg s$ 的必要不充分条件. 故选 B.

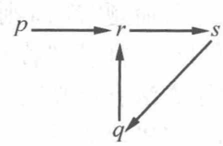


图1-3

解 B.

评注 充分条件与必要条件的判断是高考和竞赛的一个热点题型，因为这种题型一方面可以考查学生对充要条件概念的理解，另一方面能和其他相关数学知识联系起来，所以在近几年高考和竞赛试题中每年必考. 对于多个有联系的命题常常作出它们之间的一个网络图，根据图形，结合定义直观求解.

例4 写出下列命题的“$\neg p$”命题：

(1) 命题 p：所有的素数是奇数；

(2) 命题 p:存在正整数 n,使不等式 $2^n<2n+1$ 成立.

分析 上述两个命题分别是全称命题和存在命题.在命题陈述中,“所有的”、“存在一个”表示数量,它们分别被称为全称量词和存在量词,还可用“任意的”、“每一个”等代替全称量词;用“有些”、“至少一个”等代替存在量词.对于全称命题“任意 x 具有性质 p”,它的“$\neg p$”命题是特称命题“存在 x 不具有性质 p”;反之亦然.

解 (1) 此命题为全称命题,其“$\neg p$”命题为:存在一个素数不是奇数,或所有的素数不都是奇数.

(2) 此命题为特称命题,其“$\neg p$”命题为:对于任意正整数 n,有不等式 $2^n\geqslant 2n+1$ 成立.

评注 (1) 写命题 p 的否定形式时,不能一律在关键词前加“不”,而要搞清这个命题研究的对象是个体还是全体.如果研究的对象是个体,那么将“是”改成“不是”,或将“不是”改成“是”即可.如果研究的对象不是个体,那么不能简单地将“是”改成“不是”,或将“不是”改成“是”,而要分清命题是全称命题还是特称命题,全称命题的否定形式是特称命题,特称命题的否定形式是全称命题.学习时需掌握逻辑联结词“非”的含义.一个命题 p 用逻辑联结词“非”构成了一个命题,称为“$\neg p$”命题,并且规定 $\neg p$ 形式的命题的真假与命题 p 的真假相反.

(2) 常用的否定陈述如下表:

正面词语	否定	正面词语	否定
都是	不都是	至多有一个	至少有两个
都不是	至少有一个是	p 或 q	$\neg p$ 且 $\neg q$
所有的(任意一个)	某些(存在一个)	p 且 q	$\neg p$ 或 $\neg q$
有些(至少一个)	一个都没有		

例 5 已知命题 p:方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的正实数根,命题 q:方程 $4x^2+4(m+2)x+1=0$ 无实数根.若“$p\vee q$”为真命题,试求实数 m 的取值范围.

解 “$p\vee q$”为真命题,等价于 p 为真命题,或 q 为真命题.

当 p 为真命题时,有$\begin{cases}\Delta=m^2-4>0,\\ x_1+x_2=-m>0,\\ x_1x_2=1>0,\end{cases}$得 $m<-2$.

当 q 为真命题时,有 $\Delta=16(m+2)^2-16<0$,得 $-3<m<-1$.

综上所述,$m<-1$.

评注 逻辑联结词“且”、“或”、“非”与集合中的“交”、“并”、“补”对应,将两者结合起来,可使问题迎刃而解.

例 6 设计一个算法,在已知边 a,b 和角 B 的条件下,判断$\triangle ABC$ 的存在情况.

分析 如图 1-4,设点 C 到边 AB 的距离为 h,则 $h=a\sin B$.

存在下列情况:

(1) 当 $b<h$ 时,$\triangle ABC$ 不存在.

(2) 当 $b=h$ 时,存在一个 Rt$\triangle ABC$.

(3) 当 $h<b<a$ 时,存在两个$\triangle ABC$.

(4) 当 $b\geqslant a$ 时,存在一个$\triangle ABC$.

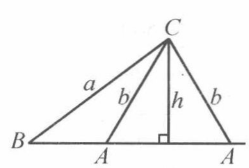


图 1-4

过程中存在条件结构,按顺序描述执行的步骤,即得答案.

解 算法步骤如下:

第 1 步,输入 a,b,B.

第 2 步，计算 $h=a\sin B$，判断 $b<h$ 是否成立. 若是，则输出“不存在三角形”；否则，执行第 3 步.

第 3 步，判断 $b=h$ 是否成立. 若是，则输出“存在一个直角三角形”；否则，执行第 4 步.

第 4 步，判断 $b\geqslant a$ 是否成立. 若是，则输出“存在一个三角形”，结束算法；否则，输出“存在两个三角形”，结束算法.

评注 我们可以根据算法画出程序框图，如图 1－5 所示，请思考：框图中的分支从何而来？

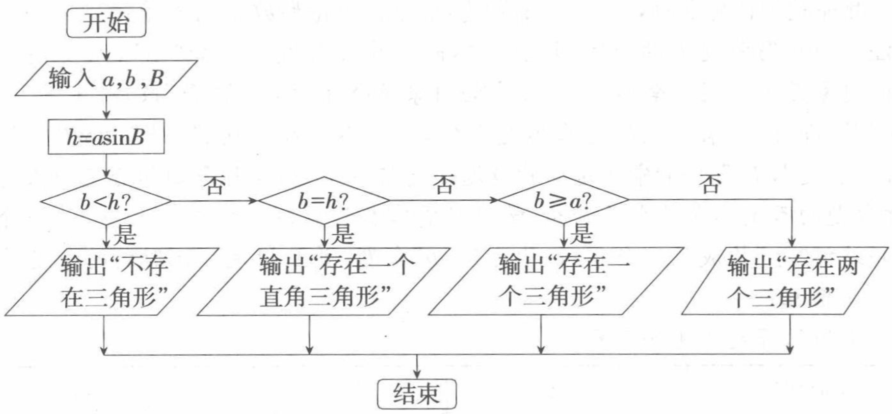


图 1－5

例 7 试设计一个求$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{49\times50}$的值的算法，并用框图表示此算法.

解 算法步骤如下：

第 1 步，输入 $k=49$.

第 2 步，令 $S=0$，$i=1$.

第 3 步，$S=S+\frac{1}{i(i+1)}$，$i=i+1$.

第 4 步，判断 $i>k$ 是否成立. 若是，则输出 S，结束算法；否则，返回第 3 步.

根据上述算法步骤画出程序框图：

第 1 步，算法步骤中的“第 1 步”、“第 2 步”可以用顺序结构来表示，如图 1－6 所示.

第 2 步，算法步骤中的“第 3 步”是循环体，其中对 S，i 的赋值是有顺序的，用顺序结构来表示，如图 1－7 所示.

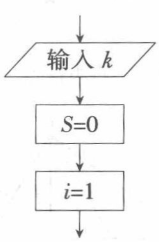


图 1－6

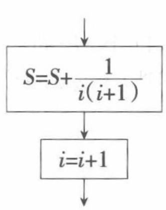


图 1－7

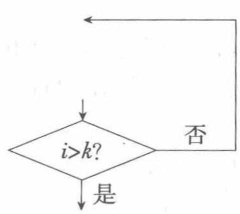


图 1－8

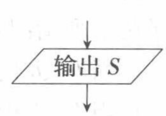


图 1－9

第 3 步，算法步骤中的“第 4 步”是条件结构，其“是”分支执行输出 S，可以用图 1－9 表示；“否”分支要返回算法步骤中的第 3 步，因此，流程线要转向上方循环结构，如图1－8 所示.

第 4 步，把上面四个图连接起来，并画出“开始”与“结束”两个终端框，就得到该算法