高等数学学习指导

GAODENGSHUXUE XUEXIZHIDAO

主 编 房 阁
主 审 王永森

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等数学学习指导

主　编　房　阁
副主编　徐连俊　石　坚
主　审　王永森

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是与王永森、房阁主编的《高等数学》教材同步配套的一本学生用书。全书包含与《高等数学》相对应的8章。各章由基本要求、重点、难点，主要解题方法，习题，参考答案，《高等数学》教材习题解析五部分内容组成。其中主要解题方法部分对每章的题型做了分类、总结，给出了每种类型题的解题思路。书后还配有上、下学期模拟题各两套，以备学生考前热身之用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导/房阁主编. —北京：北京理工大学出版社，2010.1
ISBN 978-7-5640-2819-0

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①房…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第014964号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址／http：// www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本／787毫米×960毫米　1/16
印　　张／16.5
字　　数／336千字
版　　次／2010年1月第1版　　2010年1月第1次印刷
印　　数／1~4000册　　　　责任校对／陈玉梅
定　　价／32.00元　　　　责任印制／边心超

前　言

高等数学是高等职业技术学院的一门重要基础课，是学生普遍感到学习困难的一门课程，内容多而难、学习进度快。为了帮助学生迅速掌握高等数学知识，提高解题能力，我们编写了此书，望能为广大学生起到排忧解难的作用。

本书按照王永森、房阁主编的《高等数学》章节顺序，共 8 章。每章由五部分内容组成。

第一部分基本要求、重点、难点：明确了每章应该理解、掌握、了解的基本概念和理论、方法和图像，指出了重点和难点，为学生迅速、准确地把握知识要领，指明了方向。

第二部分主要解题方法：对每章的题型进行了分类、总结，给出了每种类型题的解题思路。

第三部分习题和第四部分参考答案：相应于《高等数学》教材的每一节内容都配有一定量的习题，每一章末尾还配有两套总复习题，并给出了参考答案。

第五部分教材习题解析：对《高等数学》教材每一节后的习题，都作了详细解答，以方便学生参考。

另外，书后还配有上、下学期模拟题各两套，以备学生考前热身之用。

通过本书的学习，可以帮助学生加深对《高等数学》课程基本概念和基本原理的理解，灵活掌握高等数学的主要解题方法，较快提高分析问题和解决问题的能力，提高用数学方法解决实际问题的能力，并为其他课程的学习打好基础。

本书的第一章、第二章、第七章由房阁编写，第五章、第六章由徐连俊编写，第四章、第八章由石坚编写，第三章由项慧慧编写。参加编写的还有陈静、黄小平、周姝、赵丹、徐圳等。本书由房阁任主编，徐连俊、石坚任副主编，由王永森主审。感谢周智光老师在编写过程中给予的大力支持。

由于编者的学术水平有限及编写时间比较仓促，书中难免有不妥和疏漏之处，恳请广大师生、读者不吝赐教。

编　者

目　录

第一章　函数的极限与连续 ……………………………… 1
一、基本要求、重点、难点 ……………………………… 1
二、主要解题方法 ……………………………… 2
三、习题 ……………………………… 10
四、参考答案 ……………………………… 20
五、教材习题解析 ……………………………… 23
第二章　导数与微分 ……………………………… 33
一、基本要求、重点、难点 ……………………………… 33
二、主要解题方法 ……………………………… 33
三、习题 ……………………………… 41
四、参考答案 ……………………………… 52
五、教材习题解析 ……………………………… 60
第三章　导数的应用 ……………………………… 74
一、基本要求、重点、难点 ……………………………… 74
二、主要解题方法 ……………………………… 74
三、习题 ……………………………… 81
四、参考答案 ……………………………… 87
五、教材习题解析 ……………………………… 90
第四章　不定积分 ……………………………… 105
一、基本要求、重点、难点 ……………………………… 105
二、主要解题方法 ……………………………… 105
三、习题 ……………………………… 109
四、参考答案 ……………………………… 113
五、教材习题解析 ……………………………… 116

第五章　定积分及其应用……122
一、基本要求、重点、难点……122
二、主要解题方法……122
三、习题……129
四、参考答案……135
五、教材习题解析……137
第六章　多元函数微分学……152
一、基本要求、重点、难点……152
二、主要解题方法……153
三、习题……162
四、参考答案……168
五、教材习题解析……171
第七章　二重积分……186
一、基本要求、重点、难点……186
二、主要解题方法……186
三、习题……197
四、参考答案……205
五、教材习题解析……207
第八章　矩阵及其应用……216
一、基本要求、重点、难点……216
二、主要解题方法……216
三、习题……221
四、参考答案……230
五、教材习题解析……233
模拟题……245
模拟题参考答案……255
参考文献……258

第一章　函数的极限与连续

一、基本要求、重点、难点

1. 基本要求

（1）理解函数的概念，会求函数的定义域、表达式及函数值，会求分段函数的定义域、函数值，并会作简单分段函数的图像；

（2）理解和掌握函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性，会判断所给函数具有的特性；

（3）熟练掌握复合函数的复合过程；

（4）掌握基本初等函数的图像，并能根据图像说明性质；

（5）了解初等函数的概念；

（6）理解极限的概念，能根据极限的概念分析函数的变化趋势，会求函数在一点处的左极限与右极限，了解函数在一点处极限存在的充要条件；

（7）掌握极限的四则运算法则，掌握极限运算几种常见类型；

（8）熟练掌握用两个重要极限求极限的方法；

（9）理解无穷小与无穷大的概念，掌握无穷小的性质，无穷小与无穷大的关系，会进行无穷小阶的比较；

（10）理解函数在一点连续与间断的概念，掌握判断简单函数（包括分段函数）在一点连续的方法，理解函数在一点连续与极限存在的关系；

（11）会求函数的间断点及确定间断点的类型；

（12）理解初等函数在其所定义的区间上的连续性，并会利用连续性求极限；

（13）了解在闭区间上连续函数的性质（最值定理、介值定理），会运用这些性质推证一些简单命题.

2. 重点

（1）会分解复合函数；

（2）数列极限和函数极限的概念，极限运算法则和两个重要极限；

（3）连续函数的概念和初等函数的连续性，间断点的概念和间断点类型的判断，闭区间上连续函数的性质.

3. 难点

复合函数、极限概念、连续函数的概念.

二、主要解题方法

1. 求函数定义域的方法

思路：在研究函数时必须注意它的定义域. 如果是实际问题，函数的定义域应根据问题的实际意义来确定. 如果一个函数是用解析式来表示的，我们约定其定义域为使数学表达式有意义的自变量所能取的实数集合. 一般应考虑以下几个方面：

① 分母不等于零； ② 偶次根式根号内的式子大于或等于零；

③ $y=\tan x$ 中 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbf{Z})$； ④ $y=\cot x$ 中 $x\neq k\pi \quad (k\in\mathbf{Z})$；

⑤ $y=\log_a x$ 的真数须大于零； ⑥ $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$ 中，$|x|\leqslant 1$；

⑦ 表达式中含有以上 6 类函数式，应取各部分定义域的交集.

例 1.1 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$ （2）$y=\dfrac{\sqrt{\ln(x+2)}}{x(x-4)}$

解 利用求函数的定义域的方法.

（1）由已知函数知，在函数中有三种情况同时出现，即要求分母不为零，偶次根式的被开方式大于等于零和反正弦函数符号内的式子绝对值小于等于 1，可建立不等式组，并求出联立不等式组的解. 即

$$\begin{cases}\sqrt{3-x^2}\neq 0\\ 3-x^2\geqslant 0\\ \left|\dfrac{1}{2}x-1\right|\leqslant 1\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\\ 0\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

因此，所给函数的定义域为 $x\in[0,\sqrt{3})$.

（2）由已知函数知，在函数中有三种情况同时出现，即要求分母不为零、偶次根式的被开方式大于等于零和对数函数中真数大于零，可建立不等式组，并求出联立不等式组的解. 即

$$\begin{cases}x(x-4)\neq 0\\ \ln(x+2)\geqslant 0\\ x+2>0\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x \neq 4, x \neq 0 \\ x \geqslant -1 \\ x > -2 \end{cases}$$

因此，所给函数的定义域为 $x \in [-1,0) \cup (0,4) \cup (4,+\infty)$.

2. 判断两个函数是否相同的方法

思路：判断两个函数是否相同，要根据函数的两要素：定义域和对应规则. 若不相同，则这是两个不同的函数；若相同，则这是两个相同的函数.

例 1.2　判断下列各对函数是否相同：

（1）$f(x) = x-1$　　　$g(x) = \sqrt{(x-1)^2}$

（2）$f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$　　　$g(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$

解　（1）$f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，定义域相同. 但由于 $g(x) = \sqrt{(x-1)^2} = \begin{cases} x-1 & x \geqslant 1 \\ 1-x & x < 1 \end{cases}$，在 $(-\infty,1)$ 内这两个函数的对应法则不同，所以这两个函数不相同.

（2）不同. 因为两个函数的定义域不同. $f(x)$ 的定义域是 $(2,+\infty)$. $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,1) \cup (2,+\infty)$.

3. 将函数分解成基本初等函数或简单函数的方法

思路：在将函数分解成基本初等函数或简单函数时，应注意从最外层开始分解，每一步都应分解成基本初等函数或简单函数，直到最后一步是基本初等函数或简单函数为止.

例 1.3　将下列函数分解成基本初等函数或简单函数：

（1）$y = \ln(\tan\sqrt{x^2+1})$　　（2）$y = \mathrm{e}^{\tan(\ln x)}$　　（3）$y = \arcsin\left(\tan\dfrac{1}{\sqrt[3]{2+x}}\right)$

解　由外层逐一向内层分解

（1）$y = \ln u$　　$u = \tan v$　　$v = \sqrt{w}$　　$w = x^2+1$

（2）$y = \mathrm{e}^u$　　$u = \tan v$　　$v = \ln x$

（3）$y = \arcsin u$　　$u = \tan v$　　$v = \dfrac{1}{\sqrt[3]{w}}$　　$w = 2+x$

4. 求数列极限的方法

思路：利用极限的四则运算法则以及已知极限结果求极限. 如

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p} = 0 \qquad (p>0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

数列的极限常呈现为以下几种形式之一："$\dfrac{\infty}{\infty}$"，"$\infty-\infty$"，"1^{∞}"，"无穷多个无穷小之和". 这些情形都不能直接利用极限的四则运算法则，通常要进行代数恒等变形，下面举例加以说明.

例 1.4 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n-1}{n^3+6n+1}$ （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^3-1)(n^2+2n+6)}{2n^5-8n^3+5}$ （3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+n^2-5}{n^3+n+2}$

解 这三个数列极限都呈"$\dfrac{\infty}{\infty}$"形式，且通项都是 n 的有理分式. 求这种形式的极限的主要方法是：用分母中 n 的次数最高的项同除分子、分母，然后运用极限的四则运算法则及已知极限式求极限.

（1）用 n^3 除分子、分母，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-1}{n^3+6n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}{1+\dfrac{6}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}=0$$

（2）用 n^5 除分子、分母，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3-1)(n^2+2n+6)}{2n^5-8n^3+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{n^3}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{6}{n^2}\right)}{2-\dfrac{8}{n^2}+\dfrac{5}{n^5}}=\frac{1}{2}$$

（3）用 n^3 除分子、分母，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n^2-5}{n^3+n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\dfrac{1}{n}-\dfrac{5}{n^3}}{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}}=\infty$$

例 1.5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$.

解 这里的极限呈"$\dfrac{\infty}{\infty}$"形式，用 n 除分子、分母，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$$

例 1.6 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

解 这里的极限呈"$\infty-\infty$"形式，方法是将其有理化后再求极限，得

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

例 1.7　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{n}$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{2n}$

解　这两个极限都呈“1^{∞}”形式，方法是利用第二重要极限.

（1）$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2-2}$$
$$=\lim_{(n+2)\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{-2}=\mathrm{e}$$

（2）$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{6}=\left[\lim_{\frac{n}{3}\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{6}=\mathrm{e}^{6}$$

例 1.8　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3}\right)$.

解　这个极限是“无穷多个无穷小之和”的形式，方法是可先算出通项的和，再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$$

5. 求函数极限的方法

（1）连续

思路：一切初等函数在其定义域内都是连续的，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

例 1.9　求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-1}{x+3}$.

解　$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-1}{x+3}=\frac{3^2+3-1}{3+3}=\frac{11}{6}$$

例 1.10　求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\lg(x^2-1)+3^x}{\sin x}$.

解　$$\lim_{x\to 2}\frac{\lg(x^2-1)+3^x}{\sin x}=\frac{\lg(2^2-1)+3^2}{\sin 2}=\frac{9+\lg 3}{\sin 2}$$

（2）复合函数的连续性

思路：由连续函数复合而成的复合函数仍是连续函数. 复合函数取极限时，极限符号

“lim ”和函数记号“ f ”可以互换.

例 1.11 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{\sin 3x}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{\sin 3x}{x}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}}=\sqrt{3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\sqrt{3}$

例 1.12 求 $\lim\limits_{x\to\infty}x[\lg(x+1)-\lg x]$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}x[\lg(x+1)-\lg x]=\lim\limits_{x\to\infty}[\lg(x+1)-\lg x]^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\lg\frac{x+1}{x}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left[\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^x=\lg\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\lg e$$

（3）约去非零公因子

思路：当极限式是有理分式，可通过分解因式先消去使分母极限为零的因式，再取极限.

例 1.13 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x-3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-4)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x-4)=-1$

例 1.14 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+x+1)-3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=1$$

（4）极限式呈“$\dfrac{0}{0}$”型无理式

思路：可通过有理化方法消去使分母极限为零的因式，再取极限.

例 1.15 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}$$

（5）极限呈“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型

思路：分子、分母同除以分母的最高次幂.

例 1.16　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

例 1.17　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}\right)=1$

（6）极限呈“$\infty-\infty$”型

思路：方法是将分子（或分母）有理化后再求极限.

例 1.18　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

解　
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

（7）极限式中含有三角函数式的计算方法

思路：当极限式中含有三角函数式时，往往可通过三角恒等变换，再利用第一重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 来求极限.

例 1.19　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}=\dfrac{5}{7}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\dfrac{7x}{\sin 7x}=\dfrac{5}{7}\lim\limits_{5x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\lim\limits_{7x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 7x}=\dfrac{5}{7}$

例 1.20　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x\cdot 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{\frac{x}{2}\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2\cos\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}$

（8）极限呈“1^∞”型的计算方法

思路：只考虑极限式子中含有幂指函数，且可通过变换和直接凑的方法，再利用第二重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$.

例 1.21 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{(-2x)\to 0}[(1-2x)^{\frac{1}{-2x}}]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$

例 1.22 求 $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{4}{x-1}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{4}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\left\{[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}}\right\}^{4}=\mathrm{e}^{4}$

（9）有界函数与无穷小的乘积

思路：根据无穷小的性质，有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

例 1.23 求 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}$.

解 当 $x\to 1$ 时，$(x-1)$ 为无穷小，而 $\left|\sin\dfrac{1}{x-1}\right|\leqslant 1$，即 $\sin\dfrac{1}{x-1}$ 为有界函数，得

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\sin\frac{1}{x-1}=0$$

例 1.24 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cos x}{x^2+1}$.

解 当 $x\to +\infty$ 时，分子、分母的极限都不存在，但由于 $|\cos x|\leqslant 1$，即 $\cos x$ 为有界函数，而 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2+1}=0$，即当 $x\to +\infty$ 时，$\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2+1}$ 是无穷小，得

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}\cos x}{x^2+1}=0$$

（10）罗必达法则（参看第三章）

6. 求分段函数在分段点处的极限的方法

思路：如果在分段点两侧函数表达式不同，需根据函数在该点处极限存在的充分必要条件，考察函数在分段点处的左、右极限，仅当函数在分段点处的左、右极限存在且相等时，函数在该点的极限才存在. 求函数在一点的左、右极限的方法与求函数极限的方法相同.

例 1.25 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\cos\pi x} & x<1\\ x+a & x>1\end{cases}$，试求 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=1$ 的极限存在.

解 讨论分段函数在分段点处的极限. 由于函数在分段点 $x=1$ 处两边的表达式不同，因此，一般要考虑在分段点 $x=1$ 处的左极限与右极限. 于是有

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{\cos \pi x}=-1 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+a)=1+a$$

若 $f(x)$ 在 $x=1$ 的极限存在，必须有

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

即

$$a=-2$$

因此，当 $a=-2$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 的极限存在.

7. 利用已知极限求未知函数的方法

思路：如果已知函数的极限值，而函数表达式中含有待定的常数，要把待定常数求出来，这类问题的解法，主要涉及对极限概念的理解.

例 1.26　已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+6}{x-1}=-5$，求 a 的值.

解　这里极限式是有理分式函数. 现在已知极限存在且等于-5，而极限式的分母的极限为 0，所以分子的极限也必须是 0，即分子必能分解出 $(x-1)$ 的因子. 将 $x=1$ 代入分子，令其等于 0，即 $1+a+6=0$，故求得 $a=-7$.

例 1.27　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a、b 的值.

解　由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2+(2-a-b)x-1-b}{x+1}=0$

利用有理函数的极限知，上式分子 x 的次数必须低于分母的 x 的次数，即有 x^2 与 x 的系数都等于 0，即 $1-a=0$，且 $2-a-b=0$，所以 $a=1$，$b=1$.

8. 判断函数连续性的方法

思路：由于初等函数在它的定义区间内总是连续的，所以，函数的连续性讨论多指分段函数在分段点处的连续性. 对于分段函数在分段点处的连续性，若函数在分段点两侧表达式不同时，需根据函数在一点连续的充要条件进行讨论.

例 1.28　讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x & x\leqslant 0 \\ x\sin\dfrac{1}{x} & x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解　由于函数在分段点 $x=0$ 处两边的表达式不同，因此，一般要考虑在分段点处 $x=0$ 的左极限与右极限. 于是有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x=0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}=0 \qquad f(0)=0$$

即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续.

例 1.29 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2 & x\leqslant 0\\ \dfrac{\sin bx}{2x} & x>0\end{cases}$，在点 $x=0$ 处连续，问 a、b 应满足什么条件？

解 这里已知函数在点 $x=0$ 处连续，而函数表达式中含有待定常数，要把待定常数的值求出来. 这类问题的解法往往要根据函数在一点连续的充要条件. 这是分段函数，因此有

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a+bx^2)=a \qquad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{2x}=\frac{b}{2} \qquad f(0)=a$$

若 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$，有 $a=\dfrac{b}{2}$.

所以，当 $a=\dfrac{b}{2}$ 时，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

三、习　题

第一节　初 等 函 数

1. 求下列函数的定义域:

（1）$y=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$　　（2）$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+4}$

（3）$y=\lg\dfrac{x}{x-2}$　　（4）$y=\arcsin\dfrac{x-1}{3}$

2. 设 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=2^x$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$，$f[f(x)]$，$\varphi[\varphi(x)]$.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 1\\ 1 & x>1\end{cases}$，求 $f(0)$，$f(-2)$，$f(2)$，并作出它的图像.

4. 已知 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\ e^x & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(1)$，并作出它的图像.

5. 将 y 写成 x 的函数:

（1）$y=\sin u$　　$u=3x-2$

（2）$y=u^{\frac{2}{3}}$　　$u=1+5\tan v$　　$v=3x-1$

6. 下列函数是由哪些基本初等函数复合而成？

（1）$y=\sqrt[5]{(x+1)^2+3}$　　（2）$y=3^{(x+5)^2}$

（3）$y=\sin^2(2x-1)$　　（4）$y=\sqrt{\lg(\cos 2x+5)}$

（5）$y=\cos^2\dfrac{x-3}{2}$　　（6）$y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$

第二节　极限的概念

1. 观察下列数列当 $n\to\infty$ 时的变化趋势，指出哪些有极限，极限值为多少？哪些没有极限？

（1）$x_n=\dfrac{1}{3^n}$　　（2）$x_n=(-1)^n n^2$

（3）$x_n=2+\dfrac{1}{n^2}$　　（4）$x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leqslant 0\\ x+1 & x>0\end{cases}$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 有无左右极限？有无极限？

3. 讨论当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ 的极限是否存在？

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ 3 & x=1\\ 1 & x>1\end{cases}$，画出图像，讨论当 $x\to 1$ 时 $f(x)$ 有无左右极限？有无极限？

第三节　极限的运算

1. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+3x+4)$　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

（3）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$　　（4）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4}{2x+5}$　　（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-2x+8}{3x^2+1}$

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-x+3}{6x^4-3x^3}$　　（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

（9）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$　　（10）$\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{(x+a)^2-x^2}{a}$

（11）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^3-x^3}{x}$　　（12）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}$