微積分

何典恭著

科學技術叢書／三民書局印行

微　　積　　分

何　典　恭　著

學歷：國立師範大學數學系畢業
經歷：清華大學助教
　　　淡水工商管理專科學校講師、副教授、
　　　科主任
　　　國立海洋學院兼任副教授
現職：私立淡水工商管理專科學校教務主任

三　民　書　局　印　行

行政院新聞局登記證局版臺業字第○二○○號

中華民國六十四年三月初版
中華民國七十一年九月三版

微積分(合)

基本定價叁元壹角壹分

著作者 何典恭
發行人 劉振強
出版者 三民書局股份有限公司
印刷所 三民書局股份有限公司
臺北市重慶南路一段六十一號
郵政劃撥九九九八號

微積分　目錄

序

第一章　實　數　系

第二章　函　　數

第三章　極限與連續

第四章　導　函　數

第五章 三角函數與反三角函數的導函數

第六章 導函數的性質

第七章 導函數的應用

第八章 積分法

第九章　對數函數，指數函數

第十章　積分的技巧

第十一章　積分的應用

第十二章　泰勒公式，不定型極限，瑕積分

第十三章　無窮級數

附　　錄

第一章 實　數　系

1-1 集　　合

集合 (*set*) 的概念，在目前的數學各領域中，佔了極重要的地位，它從創始迄今不過百年光景，爲德國數學家**康德** (*Cantor*) 所首創。當年創立集合論的時候，它本是一門獨立的研究對象，與當時已有的數學絲毫無關。其實在今日，許多數學的研究，如果完全不引用這一概念，仍然可以進行。祇是在數學的研究上，集合的符號和概念提供了極大的方便。所以近二三十年以來，幾乎每一門數學中都引用這一概念，而也因此使得數學有了非凡的發展。

集合是指一群相異的對象之整體而言。譬如，所有中國人全體爲一集合；校內所有姓陳的同學全體爲一集合；本市身高 160 公分以上的市民全體爲一集合等。組成一集合的各分子，稱爲此集合的**元素** (*element*)。一般的習慣，常以大寫字母，如A, B, C, ……, 等來表集合，而以小寫字母，如 x, y, z, ……, 等來表集合的元素。若 x 爲集合 A 的元素，即稱 x **屬於** (*belongs to*) A，或 A 包含 x，記爲 $x\in A$。集合的元素個數可以有無限多，這種集合稱爲**無限集合** (*infinite set*)，而元素個數爲有限的集合，則稱爲**有限集合** (*finite set*)。前面提到的幾個集合均爲有限集合，而所有的整數所成的集合，則爲無限集合。

表明集合的構成，通常有兩種方法：即**表列式** (*tabular form*) 與**集合構式** (*set-builder form*)。所謂表列式，是將組成集合的元素

列舉於一括號“{　}”之內，譬如，$A=\{1,2,3,4\}$ 表小於 5 的正整數所成的集合；$B=\{a,e,i,o,u\}$ 表英文字母中的母音字母所成的集合。無限集合以表列式表出時，通常須將其元素，按某種特定的次序列出才能表明。譬如，所有自然數（即正整數）所成的集合，可表為 $\{1,2,3,\cdots\cdots\}$，而所有的整數所成的集合則可表為 $\{\cdots\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\cdots\}$ 或 $\{0,-1,1,-2,2,-3,3,\cdots\cdots\}$。至於集合構式，則是描述集合之元素所具有的特性。譬如，集合 $A=\{6,7,8,9\}$，可表為

$$A=\{x|x \text{ 為大於 5 的一位整數}\},$$

其意義為：此集合乃使命題“x 為大於 5 的一位整數”為眞的所有 x 所成的集合。顯然，集合構式的表法並非唯一的。譬如，$\{x|x$ 為大於 5 的一位整數$\}$，與 $\{x|(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)=0\}$ 表同一集合。又集合構式中的 x 乃是集合元素的代表符號，當然可以用任何其他符號來取代，譬如 $\{x|x>1\}$, $\{y|y>1\}$, $\{t|t>1\}$ 均表同一集合，而這種代表性符號則稱為**啞變數** (*dummy variable*)。對任一含有變數的命題 $p(x)$（稱為**開放命題** (*open statement*)）而言，易知集合 $\{x|p(x)\}$ 乃表使 $p(x)$ 為眞的所有元素所成的集合。

若二個集合 A, B 的構成元素完全相同，則稱此二集合**相等** (*equal*)，記為 $A=B$。譬如，

$$\{1,2,3\}=\{3,1,2\}=\{x|(x-1)(x-2)(x-3)=0\}。$$

設 A 為一集合，其每一元素皆為 B 之元素，則稱 A 為 B 的**部份集合或子集合** (*subset*)，記為 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，讀作“A 包含於 B”或“B 包含 A”。換言之，對每一 $x\in A$ 而言，皆有 $x\in B$ 之關係時，則 $A\subset B$。

以集合來處理問題時，往往所討論的集合有一定的範圍，即皆為某一集合的部份集合。譬如，所討論者為個人的身高，則元素皆為正

數；討論因數倍數的問題，則考慮的數皆爲整數等。像上所述，包含了討論範圍內之任一集合的“最大”集合，稱爲**宇集合**(*universal set*)，通常以U來表示。此外，爲了討論方便起見，我們還設想一個不包含任何元素的集合，稱爲**空集合** (*empty set*)，記爲ϕ。譬如，身高五公尺以上的人所成的集合，據所知者，卽爲空集合。

設 A, B 爲二集合，則此二集合的元素全體所成的集合，稱A與B的**聯集** (*union*)，以 $A\cup B$表之，讀作“A聯B”；二集合中相同的元素全體所成的集合，稱爲A與B的**交集** (*intersection*)，以 $A\cap B$ 表之，讀作“A截B”，卽

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}。$$

譬如，令 $A=\{1,2,3,4,5,6\}, B=\{1,3,5,7,9\}$，則

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,9\},$$

$$A\cap B=\{1,3,5\}。$$

若 $A\cap B=\phi$，則稱A與B**互質** (*disjoint*)。在集合 A 中而不在集合B中之元素所成的集合，稱爲A 減B的**差集** (*difference*)，以 $A-B$ 表之，讀作 “A減B”，卽

$$A-B=\{x|x\in A, x\notin B\}。$$

宇集合U減一集合A的差集，稱爲 A 的**餘集或補集** (*complement*)，以 A^c 表之。因爲任何元素皆爲U的元素，故 A^c 卽表不在A之所有元素所成的集合，卽

$$A^c=\{x|x\notin A\}=U-A。$$

上述由二個集合，而對應定出集合 $A\cup B, A\cap B, A-B$均可視集合的二元運算，而由集合A定出集合 A^c 則可視爲一種單元運算。

有一個簡便的辦法，可以表明集合的運算與關係，稱爲**文氏圖** (*Venn diagram*)。以矩形區域表宇集合 U，並以其內部的圓區域表

示其部份集合。有時不必考慮宇集合U，則矩形可省略不畫。下面諸圖所表示的集合之運算與關係，甚為簡單明瞭。

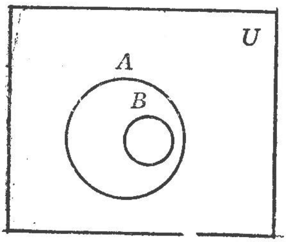
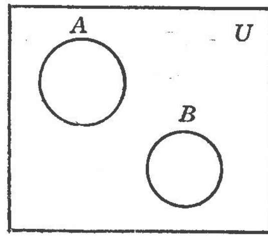
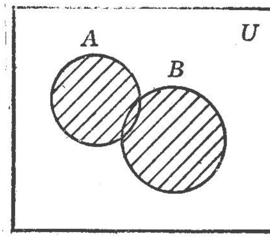


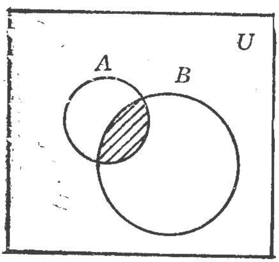
表 $B\subset A$



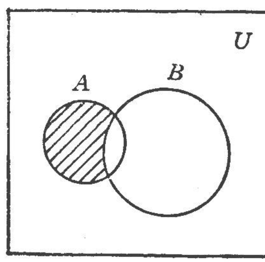
表$A\cap B=\phi$



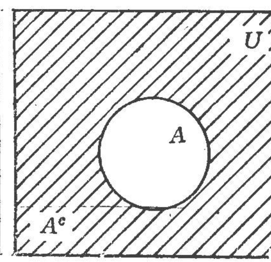
斜線區域表 $A\cup B$



斜線區域表 $A\cap B$



斜線區域表 $A-B$



斜線區域表 A^c

集合的運算有下面諸重要性質：A, B, C 表任意三集合，則

(1) 冪等律 (*idempotent law*)

$$A\cup A=A,\qquad A\cap A=A。$$

(2) 單位律 (*identity law*)

$$A\cup U=U,\qquad A\cap U=A;$$

$$A\cup\phi=A,\qquad A\cap\phi=\phi。$$

(3) 交換律 (*commutative law*)

$$A\cup B=B\cup A,\qquad A\cap B=B\cap A。$$

(4) 結合律 (*associative law*)

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);$$

$$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)。$$

(5) **分配律** (*distributive law*)

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)。$$

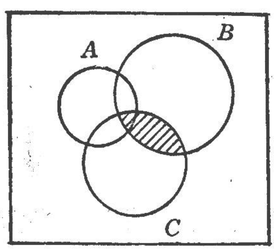
(6) **補充律** (*complement law*)

$$(A^c)^c = A, \qquad A\cup A^c = U, \qquad A\cap A^c = \phi。$$

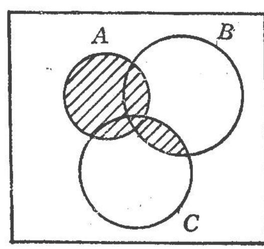
(7) **莫根律** (*De Morgan law*)

$$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c,\ (A\cap B)^c = A^c\cup B^c。$$

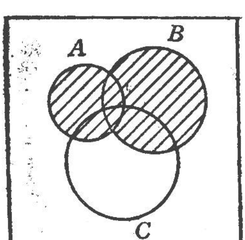
上面各性質，除了 (5), (7) 外，皆易由定義得知，而 (5), (7) 的性質亦可由文氏圖而得了解，今示例如下：



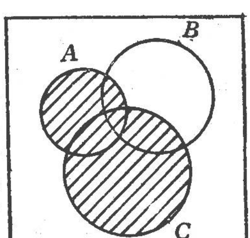
$B\cap C$



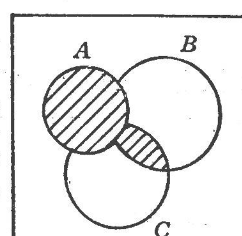
$A\cup(B\cap C)$



$A\cup B$



$A\cup C$



$(A\cup B)\cap(A\cup C)$

又由於 (4) 之結合律，我們可以 $A\cup B\cup C$ 表 $A\cup(B\cup C)$ 或 $(A\cup B)\cup C$，以 $A\cap B\cap C$ 表 $A\cap(B\cap C)$ 或 $(A\cap B)\cap C$。並可推而廣之，有下面二符號：

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots\cdots \cup A_n$$
$$= \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \{x \mid x \in A_k,\ \text{對某一}\ k \in \{1, 2, \cdots\cdots, n\}\},$$
$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots\cdots \cap A_n$$
$$= \bigcap_{k=1}^{n} A_k = \{x \mid x \in A_k,\ \text{對每一}\ k \in \{1, 2, \cdots\cdots, n\}\}。$$

在結束本節之前，特介紹往後本書常用的幾個符號。本書將以 N, I, Q, R 分別表自然數（*natural number*），整數（*integer*），有理數（*rational number*）及實數（*real number*）的集合，即

$$N = \{1, 2, 3, \cdots\cdots\},$$
$$I = \{0, 1, -1, 2, -2, \cdots\cdots\},$$
$$Q = \left\{\frac{q}{p} \middle| p, q \in I, p \neq 0\right\},$$
$$R = \{x \mid x\ \text{爲實數}\}。$$

符號“$\forall$”表“對每一”（*for every*）或“對所有”（*for all*）。譬如，當 $A \subset B$ 時，則必

$$x \in B, \forall x \in A,$$

意即對 A 之任一元素 x 而言，必爲 $x \in B$。符號“$\exists$”表“存在有”亦即“至少有一”的意思。譬如，$A \not\subset B$ 時，則必

$$\exists x \in A,\ \text{而}\ x \notin B,$$

即 A 中至少有一元素 $x \notin B$。通常 $\exists$ 多與符號“$\ni$”連用，後者表“使得”的意思。譬如上述 $A \not\subset B$ 時，則必

$$\exists x \in A \ni x \notin B。$$

若對每一使得開放命題 $p(x)$ 爲眞的 x_0 而言，必能使開放命題 $q(x)$ 亦爲眞，則以符號

$$p(x) \Rightarrow q(x)$$

表出，符號“$\Rightarrow$”稱爲**導致**或**蘊涵**（*imply*）符號，而上式則稱爲 $p(x)$ 導致 $q(x)$。譬如

$$p(x)=1 \Rightarrow [p(x)]^2=1,$$

又如

$$x^2=1 \Rightarrow x=1 \text{ 或 } x=-1;$$

$$\sqrt{x^2+1}=x-1 \Rightarrow x^2+1=x^2-2x+1 \Rightarrow x=0。$$

當 $p(x)\Rightarrow q(x)$ 時，則稱 $p(x)$ 為 $q(x)$ 的**充分條件** (*sufficient condition*) 而 $q(x)$ 稱為 $p(x)$ 的**必要條件** (*necessary condition*)，此時 $\{x|p(x)\}\subset\{x|q(x)\}$。若 $p(x)\Rightarrow q(x)$ 且 $q(x)\Rightarrow p(x)$ 時，則以符號

$$p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

表出，此時 $p(x)$ 既為 $q(x)$ 的充分條件又為其必要條件，反之亦然。我們稱 $p(x)$ 與 $q(x)$ 互為**充要條件** (*necessary and sufficient condition*)。

易知，

$$(p(x) \Leftrightarrow q(x)) \Leftrightarrow (\{x|p(x)\}=\{x|q(x)\});$$

$$(A\subset B) \Leftrightarrow (x\in A \Rightarrow x\in B);$$

$$(A=B) \Leftrightarrow (A\subset B \text{ 且 } B\subset A)。$$

習 題

1. 設 $A=\{x, y\}, B=\{1, 2, 3\}, C=\{y, \{y\}\}, D=\{1, x, y, B, C\}$。則下面各命題是否為真？

(i) $x\in D$ (ii) $A\in D$ (iii) $A\subset D$ (iv) $B\subset D$

(v) $C\in D$ (vi) $y\in C$ (vii) $\{y\}\in C$ (viii) $\{y\}\subset D$。

2. 下面各命題是否為真？

(i) $\{1, \{2, 3\}, 4\}$ 有三個元素

(ii) $\{1, 3, 2, 1, 2\}\subset\{3, 1, 2\}$

(iii) $\{0, 1, 2\}=\{\{0\}, 1, 2\}=\{\{0\}, 0, 1, 2\}$

3. 設ϕ表空集合，U表宇集合，$E=\{1,0\}$，下面各命題是否爲眞？

(i) $\{0\}\in E$　(ii) $\phi\in E$　(iii) $\{0\}\subset E$

(iv) $\{0\}\subset U$　(v) $0\in U$　(vi) $0\in E$

(vii) $0\subset E$　(viii) $\phi\subset E\subset U$

4. 設 $A\subset B$ 且 $B\subset C$, $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$, $d\notin A$, $e\notin B$, $f\in C$, 於下列各命題中，恆爲眞者記"T"，恆爲假者記"F"，有時可能爲眞者記"S"。

(i) $a\in C$　(ii) $b\in A$　(iii) $c\notin A$　(iv) $d\in B$

(v) $e\in A$　(vi) $f\in A$　(vii) $d\notin B$　(viii) $f\in B$

5. 用文氏圖核驗下式。

(i) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(ii) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

(iii) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

6. 證明: $\{3n|n\in N\}\supset\{6n|n\in N\}$。

7. 證明: $A\subset B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A$。

6. 證明: $A-B=A\cap B^c$。

9. 證明: $A\cup C=B\cup C$ 且 $A\cap C=B\cap C \Rightarrow A=B$。

10. 證明: $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$。

11. 設 $A=\{3n|n\in N\}, B=\{2n|n\in N\}$，求 $A\cap B$。

12. 設命題p表"本市的每一市民都至少有一親人住在歐洲"，試以集合及符號 $\exists, \forall, \ni$ 等表出p，並求p的否定命題。

1-2 實數及其次序

微積分 (*calculus*) 的數學結構，是以實數爲基礎的。相信讀者在其過去所受的數學訓練中，必定對實數有着相當的認識。本節的目的，在於將實數作一個概要的敍述，並提出一些重要的性質。而實數的一個有別於有理數的重要性質——**完全性** (*completeness*)，將於第1-4節中介紹。

自然數集合是指:

$$N=\{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\},$$

此集合的元素對**加法** (*addition*) 與**乘法** (*multiplication*) 具有**封閉性** (*closure*), 即

$$x+y,\ x\cdot y\in N,\ \ \forall x, y\in N。$$

它具有下面所述的重要性質:

數學歸納法原理 (*principle of mathematical induction*)

設 $S\subset N$ 且有下面二性質:

(i) $1\in S$,

(ii) $k\in S \Rightarrow k+1\in S$,

則 $S=N$。

整序性 (*well ordering*)

設 $\phi\neq A\subset N$, 則 A 有最小元素, 即 $\exists n_0\in A\ni$

$$n_0\leqq n, \forall n\in A。$$

整數集合是指:

$$I=\{0, 1, -1, 2, -2, \cdots\cdots\},$$

此集合包含 N, 其部份集合

$$E=\{2n\,|\,n\in I\}$$

的元素稱爲**偶數** (*even number*), 而 $I-E$ 的元素則稱爲**奇數** (*odd number*)。E 對加法與乘法皆有封閉性; 而 $I-E$ 對乘法有封閉性, 對加法則無。

有理數集合是指

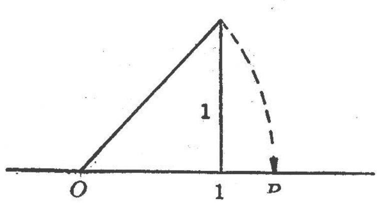
$$Q=\left\{\frac{q}{p}\,\middle|\,p, q\in I, p\neq 0\right\},$$

此集合之元素亦稱**分數** (*fraction*), 但它亦能表爲有限小數或無限循環小數。有理數幾乎具備了實數的所有性質, 當然 1-4 節的完全性除

外。實數中不爲有理數的元素，稱爲**無理數** (*irrational number*)，集合 $R-Q$ 即表所有無理數所成的集合。無理數可表爲無限不循環的小數。

若於直線上任取一點，以代表實數0，並稱爲**原點** (*origin*)，然後於右方任取一點，以代表實數1，稱爲**單位點** (*unit*)，在直線上以原點和單位點爲基準，依相等間隔取點，則可由小而大依次將整數排列於直線上，如下圖所示:

若將上述的間隔等分，則可將$\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$……等有理數排列於直線上。同樣的，用各種不同的方法細分各間隔，則可將所有的有理數，適當的排列於直線上。因爲對任意二有理數 x, y 而言，$\frac{x+y}{2}$爲介於其間的一個有理數，從而知任意二有理數之間有無限多個有理數，這稱爲有理數的**稠密性** (*density*)，所以將所有有理數如上列於直線上後，有理數已緻密的佈於其上了，雖然如此，有理數仍未"佈滿"直線。譬如，下圖中的點 P，即不表任何有理數：其實，不表有理數的點要比



表有理數的點"多得多"！必須依大小把無理數亦排列於直線上（其排列方法，在此不論），才能佈滿直線。而此時，直線上的點與集合 R 形成**一對一之對應** (*one-to-one correspondence*)，即直線上每一點恰表一實數，且一實數皆恰有直線上的一點來代表它，此一直線則稱爲**實數線** (*real line*) 或**直線坐標系** (*line coordinate system*)，各點所表