量子力学习题解答与剖析

张鹏飞 阮图南 朱栋培 吴 强 著

曾谨言著《量子力学（第四版）》100%习题详解

- 中国科大资深教师担纲编写
- 内容组织编排贴近学生需求
- 知识方法并重启发学生思考
- 学习量子力学必备参考用书

科学出版社

内 容 简 介

本书是作者在中国科学技术大学多年从事量子力学教学的过程中编写而成的. 全书给出曾谨言先生所著《量子力学(第四版)(卷Ⅰ、卷Ⅱ)》(科学出版社)的全部习题解答, 每道题都力求解答详尽, 叙述清晰, 同时注重激发学生的学习主动性, 积极引导学生活学活用, 引导学生思考以深入发掘物理内涵.

对于具有一定科研背景的题目, 本书对其物理实质和内涵作了较多的剖析和发掘; 对于部分典型题的解答或相关背景材料, 本书还参考了国内外一些优秀著作, 充分吸收其精华. 所有这些丰富了本书的内容.

本书可作为量子力学、高等量子力学课程的学习辅导书或者教学参考书, 也可供物理学工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

量子力学习题解答与剖析/张鹏飞等著. —北京: 科学出版社, 2011

ISBN 978-7-03-030573-2

Ⅰ.①量… Ⅱ.①张… Ⅲ.①量子力学-高等学校-题解 Ⅳ.①O413.1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 044228 号

责任编辑: 窦京涛 / 责任校对: 刘小梅
责任印制: 张克忠 / 封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 5 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16
2011 年 5 月第一次印刷 印张: 24 1/2
印数: 1—4 000 字数: 580 000

定价: 49.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

要理解这个世界上我们所见到的几乎所有现象背后，自然界真正如何运行，我们非违背常识不可.

R. P. Feynman

前　　言

本书给出曾谨言先生所著《量子力学（第四版）（卷Ⅰ、卷Ⅱ）》（科学出版社）的全部习题解答，各章内容均遵照该书顺序排列. 这是我们在中国科学技术大学多年从事量子力学教学的过程中逐步编写而成的.

二十多年来，曾谨言先生所著教材在国内量子力学教学中一直被广泛采用. 尤其是《量子力学（第四版）（卷Ⅰ、卷Ⅱ）》，体系完整，内容全面，条理清晰，叙述透彻，因而深受青年学生以及教师的欢迎. 特别是曾先生还根据量子力学的前沿进展、国内量子力学教学情况以及读者反映的信息，对该书作了多次修订，使得它不断完善. 曾先生在该书的序言里说："卷Ⅰ适合作为本科生学习量子力学的进一步深入的参考书，卷Ⅱ则可作为研究生学习高等量子力学的主要参考书. 青年物理学工作者在学完本书以后，可以比较顺利地进入与量子力学有关的各前沿领域的研究工作." 我们还认为卷Ⅰ非常适合用于学时较多的本科量子力学课程（如中国科学技术大学 6 学分 120 学时的量子力学课程）教学，卷Ⅱ非常适合用作高年级本科生或者研究生的高等量子力学教材. 本书作为曾先生所著教材的学习辅导材料，可供本科生在初学量子力学时或者复习考研时参考之用，也可为研究生学习高等量子力学提供一定的帮助.

本书融汇编者多年来从事量子力学教学的经验与体会，力求解答详尽，叙述清晰. 此外，正如我们在教学中所做的那样，在编写过程中我们始终注意两点：(1) 贴近学生，书主要是给学生用的，应当根据学生的特点，在内容组织、编排上多从利于学生学习的角度考虑；(2) 知识与方法并重，注重启发，激发学生的学习主动性，积极引导学生活学活用，引导学生思考以深入发掘物理内涵.

只要你用心揣摩就会发现量子力学习题常有多种解法，即所谓解无定法，"不管白猫黑猫，能抓到老鼠的都是好猫"，本书中的很多习题正是有多种解法. 一些题存在的多种解法，我们并不试图列出全部，而是尽量选取其中较有启发性的. 若解法有繁有简，除少数特别巧妙的列出外，我们往往还有意给出较繁的解法，这样做主要是为了利于大多数同学学习. 同学懂了以后，自己会给出最简单的解法.

本书最先的底稿是阮图南教授所做的部分习题，以及编者之一（张）多年来做曾先生所著教材里的习题而积累起来的几个笔记本. 曾先生教材里的题目，不少都量子力学味道浓，或者具有一定科研背景. 对部分这样的题目，我们几位编者曾以较大的兴趣做了一些讨论和思考. 此外，在我们的教学过程中，学生与我们富有启发性的讨论以及我们与学生的交流，也促进了我们对一些问题的思考. 这些讨论和思考，使我们或者是得到了一些新的解法，或者是对一些题的物理实质和内涵作了更多的剖析和发掘，在书中以"解法二"、"解法三"等或者以"讨论"、"说明"等形式附上. 个别题因为这种附加的内容较多，以致于题目的解答显得冗长且不太合乎标准，这些从一般解题要求来看并不必须，我们却认为恰恰是这些附加的内容对于启发学生的学习和思考是有益的，因而是本书的重要特色之一. 还有若干题的巧妙解法（特别有一些解法，还是我们原先意想不到的）来源于历年选课同学的作业.

此外，对于部分典型题的解答或相关背景材料，我们参考了国内外一些优秀的而且是我们非常欣赏的习题解答书或者教材的内容（这些著作的名称也在本书正文的注释或者参考文献里列出），充分吸收其精华，其中有钱伯初教授与曾谨言教授所著《量子力学习题精选与剖析（第三

版）》一书. 该书内容丰富, 叙述清晰, 精到地演绎如何运用量子力学原理去分析处理各种具体问题, 特别是对于部分习题做了深入细致的物理剖析, 在细微处精彩展现了两位量子力学教学名师深湛的功底. 该书是编写本书的重要参考书之一, 我们在编写过程中从该书得到了很多启发, 也学到了它的很多优点.

本书可供学习量子力学或者高等量子力学参考使用, 主要目的是为了方便大家学习或者复习巩固. 当然我们最不希望同学图这样的"方便", 只是简单地拿本书的习题解答来应付作业. 我们愿意在此提醒各位同学, 只有自己动手用心做一定数量的习题, 才能把量子力学学到手①. 就如沈惠川教授在他的《经典力学题谱》一书的序言里所说"光说不练假把戏, 光练不说傻把戏, 又说又练才是真把戏", 也好比一个人学习游泳一定要下水一样. 我们向手头有这本书的同学建议, 当拿到一个习题时应当:（1） 自己先做;（2） 如果自己反复思考都不得要领, 那可以先查阅一下本书, 边看边思考, 想清楚解题要点后, 合上书, 仍是自己独立完成. 习题做完以后, 再翻开书看看, 把自己做的与书中的解法比较, 这样学得踏实, 等等. 我们希望本书给同学提供的不是思想的束缚, 也不是拐杖, 而是启发, 是灵感. 正如诗是做不完的一样, 量子力学习题的解法往往层出不穷. 我们期望, 同学们在自己用心做一些题以后会发现乐趣, 同时会给出一些更好的解法. 假若同学们发现了更多更好的解法, 本书也就起到了抛砖引玉的作用, 这正是我们最希望看到的.

同学可以针对自己的特点选择一些题来做, 像本书习题较为丰富, 有难有易, 数学上也是有繁有简. 每个同学特点不一样, 有些同学数学很好, 有些同学数学可能弱一点. 我们觉得, 数学稍弱的同学, 不妨选一些数学较简然而物理味足的题来做. 学习量子力学, 不应让繁琐的数学演算成为学习和领会量子力学物理实质的障碍. 数学是物理学的工具, 数学演算绝不是量子力学的全部. 量子力学除了要用心学, 学到脑子里, 还要学到手上. 通过做习题, 就会了解如何运用所学知识, 对它的领会也会更加深入. 做习题绝不仅仅是想明白怎么做, 还要动手一步一步把它做出来. "想通了"跟"做出来"是两码事. 思考可以跳跃, 有时也许会出错. 自己动手做的, 你只要一步一步都不含糊, 做完了一般都很有把握. 所以, 我们总是主张同学一定要自己动手做一些习题, 哪怕你时间不多, 只能做一部分. 平常学习中, 应在对所学知识作复习、总结的基础上, 在对相关原理和概念充分理解的基础上做题, 这样就不会盲目. 做题时, 应当先看清题目, 明白题目的全部条件和要求, 再回忆学过的知识, 多方面思考, 不妨画画草图或者写写算式作辅助, 寻找解题思路. 想通了怎么解题以后, 开始遵从逻辑的顺序, 利用题目的条件、已知的概念、原理、事实, 一步一步演绎, 直到到达结论.

题解完后, 最好再检查题目解答是否完整, 再琢磨琢磨题目有没有更妙的解法? 它能否运用到一些特例? 它能否推广? 条件能否减弱? 等等. 不过这时, 最重要的应该还不止于此, 这时最重要的应该是试着进一步思考这个题的物理实质和内涵, 思考它可能的更深的物理意义, 所谓"察物内之物, 思理中之理". 我们总是觉得, 量子力学最妙的地方也许就在于它有很多值得"玩味"的地方, 似是而非、似非而是容易糊涂的往往又是本质所在的地方很多, 这些地方常需要较深入的思考才能真正理解和领会, 所谓"浅尝难知其真味". 现在很多同学选一门课, 他/她最关心的只是最后他/她这门课的成绩有多高, GPA 是多少. 可是我们真正觉得, 就量子力学这门课的学习而言, 光会做题能考高分甚至能拿 100 分也许还是不太够的. 不少题有重要物理背景, 量子力学味道浓, 它的物理内涵、它深层的物理意义往往都值得"玩味"和"琢磨". 只有这种"玩味"、这种"琢磨", 才可能给你带来"顿悟"之喜, 才可能把你导向对物理原理真实和深入的领会, 才可能把你导向对量子力学精髓的真正领悟.

① 我们在《量子力学学习指导》一书的前言里写过一个量子力学学习的建议, 该文在互联网上也可以找到, 感兴趣的同学可以找来看.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

曾谨言先生非常信任的让我们编写本书, 并且一直关心本书编写的进展情况. 杨国桢院士曾在我校倡导加强量子力学教学. 为此, 中国科学技术大学本科教学从 2004 年秋季学期开始, 增设 6 学分 120 学时的量子力学（量子力学 A）. 这一远见之举一定程度上也促进了本书的编写, 因为它使我们在量子力学教学上投入了更多的时间和热情. 王安民、尹民教授等给予了许多鼓励和帮助. 沈惠川教授等则一直关心此书的编写, 而且与编者之一（张）平常富有启发的讨论也使本书在很多方面得到了改进. 张永德教授与编者之一（张）有过多次交流, 给了年轻人很多启发和教益. 本书的编写还得到了许多老师的关心和帮助. 对于所有这些, 我们在此一并深致谢意.

我们还特别感谢我校历年来选修我们量子力学课程的同学, 感谢他们对量子力学的兴趣, 感谢他们与我们富有启发性的讨论, 感谢他们的各种意见. 对历年来的助教王舸、葛红林、成斌、马小三、王安、刘键恒、邹冰、尹鹏程等人的工作也在此致以谢意.

感谢尹甸、谷德阳等同学在 LATEX 排版上提供的热情帮助.

虽然我们希望做到最好并且也尽了力, 但由于我们的水平有限, 书中不当之处在所难免. 对此, 我们恳请广大读者谅解, 并诚挚欢迎读者提出宝贵的意见和建议. 我们的联系方式如下:

Email: zhpf@ustc.edu.cn

Tel: 0551-3600630

编　者

2009 年 9 月于合肥

目　　录

第 1 章　量子力学的诞生

1.1　试用量子化条件, 求谐振子的能量. 谐振子势能 $V(x)$ 取为

$$\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

解　设粒子质量为 m, 在题给势场中作一维运动, 其总能量表达式为

$$E=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{1.1}$$

由上式解出粒子动量为

$$p=\sqrt{2m\left(E-\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)} \tag{1.2}$$

要求 $E-\frac{1}{2}m\omega^2x^2\geqslant 0$, 即有 $-\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}$. 令 $x_m=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}$, 根据 Bohr-Sommerfeld 量子化条件得

$$\begin{aligned}nh&=\oint p\mathrm{d}x=\int_{-x_m}^{x_m}p\mathrm{d}x-\int_{-x_m}^{x_m}(-p)\mathrm{d}x=2\int_{-x_m}^{x_m}p\mathrm{d}x\\&=2\int_{-x_m}^{x_m}\sqrt{2m\left(E-\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)}\mathrm{d}x=4m\omega\int_0^{x_m}\sqrt{x_m^2-x^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中 n 取正整数, 即 $n=1, 2, \cdots$. 对上式积分 (可采用分部积分法, 或者对积分变量作代换 $x=x_m\sin\omega t$) 得

$$\begin{aligned}nh&=4m\omega\int_0^{x_m}\sqrt{x_m^2-x^2}\mathrm{d}x=4m\omega\,\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x_m^2-x^2}+x_m^2\arcsin\frac{x}{x_m}\right]\Bigg|_0^{x_m}\\&=4m\omega\frac{2E}{m\omega^2}\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi E}{\omega}\end{aligned} \tag{1.3}$$

所以 $E=\frac{nh}{2\pi}\omega=n\hbar\omega$①. 解完本题后, 我们请读者到后面看一看写在题 1.4 后的说明.

1.2　用量子化条件求限制在箱内运动的粒子的能量. 箱的长宽高分别为为 a, b 和 c.

解　选取坐标使得 x, y, z 轴分别沿箱的长、宽、高方向, 箱的一个顶点为 $(0,0,0)$, 其对角点为 (a,b,c). 粒子能量表达式为 $\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)$.

对箱中一个粒子的运动, 注意其 x 方向运动, 某一时刻从 $x=0$ 出发, 到 $x=a$, 与箱壁碰撞后动量 (速度) 反向返回再回到 $x=0$, 与箱壁碰撞后再沿正 x 方向运动. 这是一个周期运动, 根据 Bohr-Sommerfeld 量子化条件得

$$n_1h=\oint p_x\mathrm{d}x=\int_0^a p_x\mathrm{d}x-\int_0^a(-p_x)\mathrm{d}x=2\int_0^a p_x\mathrm{d}x=2ap_x$$

---

① 量子力学的结果则给出 $E=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$.

其中 $n_1=1,2,\cdots$, 所以 $p_x=n_1h/(2a)=\pi n_1\hbar/a$. 同理得 $p_y=n_2h/(2b)$, $p_z=n_3h/(2c)$, 而 n_2, n_3 均为正整数. 这样得粒子能量的可能取值为

$$E=\frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}+\frac{n_3^2}{c^2}\right) \tag{1.4}$$

式中 n_1, n_2, n_3 均为正整数, 即可取 $n_1,n_2,n_3=1,2,\cdots$.

1.3 平面转子的转动惯量为 I, 求它的能量允许值.

解 转子的转动惯量为 I, 则其能量表达式为

$$E=T=\frac{L^2}{2I} \tag{1.5}$$

其中 L 为角动量. 角动量量子化条件 (根据 Bohr-Sommerfeld 量子化条件) 给出①

$$L=n\hbar$$

其中 n 取正整数, 即 $n=1,\ 2,\ \cdots$ 代入式 (1.5) 得到

$$E=\frac{n^2\hbar^2}{2I},\qquad n=1,2,3,\cdots \tag{1.6}$$

1.4 有一个带电 q 质量为 m 的粒子在平面内运动, 垂直于平面方向有磁场 $\boldsymbol{B}$. 求粒子能量允许值.

解 设题给磁场的方向沿 z 轴, 则其磁矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A})$ 可以取为

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}=-\frac{1}{2}By\boldsymbol{e}_x+\frac{1}{2}Bx\boldsymbol{e}_y$$

即有 $A_x=-\dfrac{1}{2}By$, $A_y=\dfrac{1}{2}Bx$. 粒子运动方程 (磁场单位采用 Gauss 制) 为

$$m\boldsymbol{a}=\frac{q}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{1.7}$$

其中 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{a}=\ddot{\boldsymbol{r}}$. 由上式得 $m\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{a}=0$, 或者 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2\right)=0$, 即能量守恒. 式 (1.7) 即

$$m\left(a_1\boldsymbol{e}_x+a_2\boldsymbol{e}_y\right)=\frac{q}{c}\left(v_1\boldsymbol{e}_x+v_2\boldsymbol{e}_y\right)\times B\boldsymbol{e}_z=\frac{qB}{c}\left(v_2\boldsymbol{e}_x-v_1\boldsymbol{e}_y\right)$$

也就是

$$m\dot{v}_1=\frac{qB}{c}v_2,\qquad m\dot{v}_2=-\frac{qB}{c}v_1 \tag{1.8}$$

这样得

$$\ddot{v}_1=-\left(\frac{qB}{mc}\right)^2v_1=-\omega^2v_1,\qquad \ddot{v}_2=-\omega^2v_2 \tag{1.9}$$

其中 $\omega=\dfrac{|q|B}{mc}$. 求解上述微分方程组可得

$$\begin{aligned}v_1&=-v\sin(\omega t+\phi)\\ v_2&=\frac{mc}{qB}\dot{v}_1=\frac{mc}{qB}\omega\cos(\omega t+\phi)=-\frac{q}{|q|}v\cos(\omega t+\phi)\end{aligned} \tag{1.10}$$

由此得

$$x-x_0=\frac{v}{\omega}\cos(\omega t+\phi),\qquad y-y_0=-\frac{q}{|q|}\frac{v}{\omega}\sin(\omega t+\phi)$$

① 量子力学的结果则给出 $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$.

可见粒子作匀速圆周运动, 速度大小为 v, 角速度大小为 ω, 轨道半径为 $r=\dfrac{v}{\omega}$. 不妨取 $x_0=y_0=0$, 则

$$x=\frac{v}{\omega}\cos(\omega t+\phi),\qquad y=-\frac{q}{|q|}\frac{v}{\omega}\sin(\omega t+\phi)$$

令 $\phi=0$, 则上式为 $x=\dfrac{v}{\omega}\cos\omega t,\quad y=-\dfrac{q}{|q|}\dfrac{v}{\omega}\sin\omega t$, 此式给出

$$\begin{aligned}&p_x=m\dot{x}=-mv\sin\omega t,\quad p_y=m\dot{y}=-\frac{q}{|q|}mv\cos\omega t\\&\mathrm{d}x=-v\sin\omega t\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}y=-\frac{q}{|q|}v\cos\omega t\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{1.11}$$

为了用量子化条件, 下面计算 $\oint\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$, 其中 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}+\dfrac{q}{c}\boldsymbol{A}$. 先分项计算 $\oint p_x\mathrm{d}x=\oint mv_x\mathrm{d}x+\oint\dfrac{q}{c}A_x\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\oint mv_x\mathrm{d}x&=\int_0^T(-mv\sin\omega t)v(-\sin\omega t)\mathrm{d}t=\frac{mv^2}{\omega}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{mv^2}{\omega}\pi\\\oint\frac{q}{c}A_x\mathrm{d}x&=\oint\frac{q}{c}\left(-\frac{1}{2}By\right)\mathrm{d}x=-\frac{qB}{2c}\oint y\mathrm{d}x=\frac{|q|Bv^2}{2c\omega^2}\sin\omega t\mathrm{d}\cos\omega t\\&=-\frac{|q|Bv^2}{2c\omega^2}\int_0^T\sin^2\omega t\mathrm{d}t=-\frac{|q|Bv^2}{2c\omega}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{|q|Bv^2}{2c\omega}\pi=-\frac{mv^2}{2\omega}\pi\end{aligned}$$

因而

$$\oint p_x\mathrm{d}x=\oint mv_x\mathrm{d}x+\oint\frac{q}{c}A_x\mathrm{d}x=\frac{qBv^2}{c\omega}\pi-\frac{qBv^2}{2c\omega}\pi=\frac{mv^2}{2\omega}\pi\tag{1.12}$$

同样的, 对于 $\oint p_y\mathrm{d}y$, 由

$$\begin{aligned}\oint mv_y\mathrm{d}y&=\int_0^T(mv\cos\omega t)v\cos\omega t\mathrm{d}t=\frac{mv^2}{\omega}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{mv^2}{\omega}\pi\\\oint\frac{q}{c}A_y\mathrm{d}y&=\frac{q}{c}\oint\frac{1}{2}Bx\mathrm{d}y=-\frac{|q|B}{2c}\oint x\mathrm{d}y=-\frac{|q|Bv^2}{2c\omega^2}\int_0^T\cos\omega t\mathrm{d}\sin\omega t\\&=-\frac{|q|Bv^2}{2c\omega^2}\int_0^T\cos^2\omega t\mathrm{d}t=-\frac{mv^2}{2\omega}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{mv^2}{2\omega}\pi\end{aligned}$$

得到

$$\oint p_y\mathrm{d}y=\oint mv_y\mathrm{d}y+\oint\frac{q}{c}A_y\mathrm{d}y=\frac{mv^2}{\omega}\pi-\frac{mv^2}{2\omega}\pi=\frac{mv^2}{2\omega}\pi\tag{1.13}$$

这样式 (1.12)、式 (1.13) 给出

$$\oint\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint p_x\mathrm{d}x+\oint p_y\mathrm{d}y=\frac{mv^2}{2\omega}\pi+\frac{mv^2}{2\omega}\pi=\frac{mv^2}{\omega}\pi=nh$$

其中 n 取正整数, 即 $n=1,2,\cdots$. 由上式得 $\dfrac{mv^2}{\omega}\pi=nh$. 这样粒子能量① 为

$$E=T=\frac{1}{2}mv^2=n\hbar\omega,\qquad n=1,2,\cdots$$

而 $\omega=\dfrac{|q|B}{mc}$.

① 量子力学的结果则给出 $E_n=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$.

另解 量子化条件为 $\oint \boldsymbol{p}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=nh$, 而

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{p}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}&=\oint_C\left(m\boldsymbol{v}+\frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_C m\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\frac{q}{c}\oint_C \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\\&=\int_0^T m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t+\frac{q}{c}\iint_S\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_0^T mv^2\mathrm{d}t+\frac{q}{c}\iint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\&=mv^2\int_0^T\mathrm{d}t-\frac{q}{c}BS=mv^2T-\frac{q}{c}B\pi R^2=mv^2\frac{2\pi}{\omega}-m\omega\cdot\pi\cdot\frac{v^2}{\omega^2}=\frac{mv^2}{\omega}\pi\end{aligned}$$

其中 $\omega=\dfrac{|q|B}{mc}$ 为粒子回旋 (cyclotron) 频率. 同样由量子化条件, 知 $mv^2T-\dfrac{q}{c}B\pi R^2=nh$, 这样粒子能量为

$$E=T=\frac{1}{2}mv^2=n\hbar\omega$$

其中 n 取正整数, 即 $n=1,2,\cdots$.

说明 按照量子力学, 上述几题中所采用的早期量子论的做法是不正确的, 特别其物理图像根本是错误的. 前面题 1.1、题 1.2 与题 1.4 都是先从经典轨道运动出发, 而经典轨道在量子力学中是从根本上被放弃的. 那么为什么这几个例子中用早期量子论的做法得到的量子化能量却是基本正确的呢? 其原因在于在问题中引入了 Plank 作用量子. 另外, 量子力学本身正是因为早期量子论的不足, 而建立起来并逐步得到完善的.

1.5 用量子力学可以证明 (WKB 近似, 见本书卷 II 第 2 章), 对于下列不同形式的势阱 (图 1.1), 量子化条件略有不同.

(a) $\oint p\mathrm{d}x=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)h,\quad n=0,1,2,\cdots$

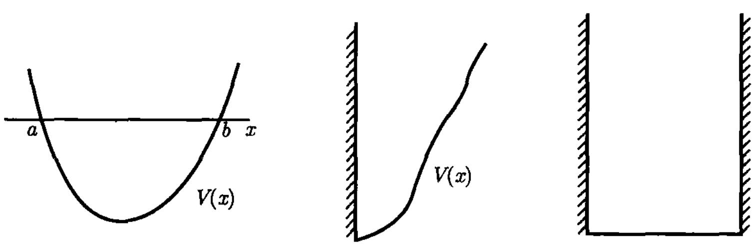
(b) $\oint p\mathrm{d}x=\left(n+\dfrac{3}{4}\right)h,\quad n=0,1,2,\cdots$

(c) $\oint p\mathrm{d}x=(n+1)\,h,\quad n=0,1,2,\cdots$

或

$$\oint p\mathrm{d}x=nh,\quad n=1,2,3,\cdots$$

上述公式中 $p=\sqrt{2m\,[E-V(x)]}$. 利用上述公式, 计算在下列势阱中粒子的能量允许值.



(a) (b) (c)

图 1.1 不同形式的势阱

(1) 势阱 (见图 1.2)

$$V(x)=g|x|$$

先进行量纲分析, 然后求能量允许值.

(2) 势函数

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & x<0\\ e\mathcal{E}x, & x>0\end{cases}$$

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

式中, $\mathcal{E}$ 为均匀电场强度, $-e$ 为粒子电荷 (见图 1.3).

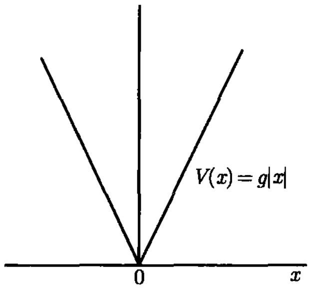


图 1.2　回复力大小恒定的势函数

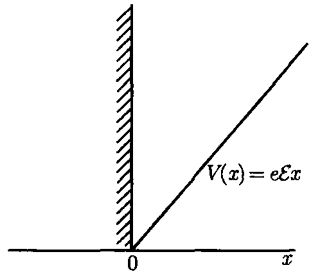


图 1.3　半空间中的线性势

解　(1) 先进行量纲分析. 粒子处在题给势场中, 其能量 E 可能值有关的量应包括粒子质量 m、势函数的唯一参数 g, 再加上一个 Plank 常量 $\hbar$. 这样可以令 $E = fg^{\alpha}m^{\beta}\hbar^{\gamma}$, 其中 f 为无量纲量. g 的量纲是 $[g] = [E/r] = [E]/[r]$, 即牛顿力学中力的量纲. 将有关量的量纲列表如下:

	g	m	$\hbar$	E
M	1	1	1	1
L	1	0	2	2
T	−2	0	−1	−2

若两个量相等, 其量纲必相等. 由此列出如下关于量纲指数的方程组:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=1 \\ \alpha+0+2\gamma=2 \\ -2\alpha+0-\gamma=-2 \end{cases}$$

解上面线性方程组, 得 $\alpha = 2/3$, $\beta = -1/3$, $\gamma = 2/3$. 由此得

$$E = f_1\left(\frac{g^2\hbar^2}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{1.14}$$

其中 f_1 为无量纲参数.

在上述量纲分析基础上, 我们不妨选取自然量纲, 取 $m = g = \hbar = 1$, 在最后只需将能量补上上述量纲即可. 这样题给势函数可记为 $V(x) = |x|$. 总能量为

$$E = \frac{p^2}{2} + |x|$$

由上式解出粒子动量为

$$p = \sqrt{2\left(E - |x|\right)}$$

要求 $E - |x| \geqslant 0$, 即有 $-E \leqslant x \leqslant E$. 令 $x_m = E$. 根据势函数特点, 应采用题给的 (a) 情形的量子化条件, 即有

$$\oint \sqrt{2\left(E-|x|\right)}\mathrm{d}x = \left(n+\frac{1}{2}\right)2\pi \tag{1.15}$$

其中 $n = 0, 1, 2, \cdots$. 上式等号左边的积分为

$$\oint \sqrt{2(E-|x|)}\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\int_{-x_m}^{x_m}\sqrt{E-|x|}\mathrm{d}x = 4\sqrt{2}\int_0^{x_m}\sqrt{E-x}\mathrm{d}x$$
$$= 4\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}(E-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{x_m} = \frac{8\sqrt{2}}{3}E^{\frac{3}{2}} \tag{1.16}$$

式 (1.15)、式 (1.16) 给出

$$E = E_n = \left[\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{2}{3}}$$

根据式 (1.14), 恢复能量量纲得题给势阱中粒子的能量允许值为

$$E_n = \left(\frac{g^2\hbar^2}{2m}\right)^{1/3}\cdot\left[\frac{3\pi}{4}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^{2/3}$$

(2) 粒子处在题给势场中, 其能量 E 可能值有关的量应包括粒子质量 m, 势函数的参数 $e\mathcal{E}$, 再加上一个 Plank 常量 $\hbar$. 除 $m,\hbar$ 与第 (1) 小题相同外, $e\mathcal{E}$ 的量纲也与第 (1) 小题的 g 相同, 因此按第 (1) 小题的量纲分析结果, 能量允许值应为

$$E = f_2\left(\frac{e^2\mathcal{E}^2\hbar^2}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{1.17}$$

其中 f_2 为无量纲参数. 我们不妨先选取自然量纲, 取 $m=g=\hbar=1$. 粒子在题给势阱中限于在 $x>0$ 区域运动, 在自然量纲下的总能量表示为

$$E = \frac{p^2}{2}+x$$

由上式解出粒子动量为

$$p = \sqrt{2(E-x)}$$

要求 $E-x\geqslant 0$, 即有 $0<x\leqslant E$. 令 $x_m=E$. 根据势函数特点, 应采用题给的 (b) 情形的量子化条件, 即有

$$\oint\sqrt{2(E-x)}\mathrm{d}x = \left(n+\frac{3}{4}\right)2\pi \tag{1.18}$$

上式等号左边的积分为

$$\oint\sqrt{2(E-x)}\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\int_0^{x_m}\sqrt{E-x}\mathrm{d}x = -2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}(E-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{x_m} = \frac{4\sqrt{2}}{3}E^{\frac{3}{2}} \tag{1.19}$$

式 (1.18)、式 (1.19) 给出

$$E = E_n = \frac{1}{2}\left[3\pi\left(n+\frac{3}{4}\right)\right]^{\frac{2}{3}}$$

根据式 (1.17), 恢复能量量纲得题给势阱中粒子的能量允许值为

$$E_n = \frac{1}{2}\left(\frac{9\pi^2e^2\mathcal{E}^2\hbar^2}{m}\right)^{1/3}\cdot\left(n+\frac{3}{4}\right)^{2/3}$$

其中 n 为非负整数, 即 $n=0,1,2,\cdots$.

1.6 中心力场 $V(r)$ 中, 角动量为 0 的粒子 (在经典力学中这是什么图像?) 的能量量子化条件为

$$2\int_0^\infty\sqrt{2mE-V(r)}\mathrm{d}r = \left(n+\frac{3}{4}\right)h,\quad n=0,1,2,\cdots$$

设 $V(r)=-\dfrac{e^2}{r}$(Coulomb 势), 求粒子能量允许值.

解 在经典力学中, 粒子角动量为 0, 意味着它的速度与位置矢量方向相同, 即粒子始终沿径向运动①. 我们姑且采用这种图像求解本题. 设题给 Coulomb 势场中运动的 0 角动量粒子能量为 $E(E<0)$, 按题给量子化条件

$$2\int_0^{\infty}\sqrt{2mE+\frac{e^2}{r}}\mathrm{d}r=\left(n+\frac{3}{4}\right)h \tag{1.20}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$. 式 (1.20) 左边被积函数要求 $2mE+\dfrac{e^2}{r}\geqslant 0$, 这给出 $r\leqslant -e^2/2mE$, 令 $r_m=-e^2/2mE$. 上式左边 $\displaystyle\int_0^{\infty}\to\int_0^{r_m}$, 再令 $x=-r/r_m$ 得

$$\begin{aligned}2\int_0^{r_m}\sqrt{2mE+\frac{e^2}{r}}\mathrm{d}r&=\frac{2e^2}{\sqrt{-2mE}}\int_0^1\sqrt{\frac{1}{x}-1}\mathrm{d}x=\frac{4e^2}{\sqrt{-2mE}}\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}\sqrt{x}\\&=\frac{4e^2}{\sqrt{-2mE}}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{4e^2}{\sqrt{-2mE}}\cdot\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)\Big|_0^1\\&=\frac{\pi e^2}{\sqrt{-2mE}}\end{aligned} \tag{1.21}$$

式 (1.20)、式 (1.21) 给出

$$E=E_n=-\frac{me^4}{2\hbar^2}\left(n+\frac{3}{4}\right)^{-2}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$. 或者为

$$E_n=-\frac{me^4}{2\hbar^2(n-1/4)^2}$$

其中 $n=1,2,\cdots$.

说明 量子力学相应计算结果为将上式分母中 $(n-1/4)^2$ 换为 n^2, 其余不变. 因此对于 n 较小的情况 (粒子基态或者低激发态), 上述计算与量子力学计算结果有较大出入, 对于 $n\gg 1$ 的情况, 上述计算与量子力学计算结果一致.

1.7 对于高速运动粒子 (静质量 m), 能量及动量由下式给出:

$$E=mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}\quad (v\text{ 是粒子速度})$$

$$p=mv/\sqrt{1-v^2/c^2}=Ev/c^2$$

试根据 Hamilton 量

$$H=E=\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}$$

及正则方程来验证这两式. 由此求出粒子速度与 de Broglie 波的群速之间关系. 计算其相速, 并证明相速大于光速 c.

解 Hamilton 方程组

$$\dot{q}_i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{1.22}$$

对于题给自由粒子的 Hamilton 量, 上面第二式给出 $p=\text{const.}$ 的平凡结果. 因 $v=\dot{q}_i$, 第一式为

$$v=\frac{\partial}{\partial p}\sqrt{m^2c^4+c^2p^2}=\frac{c^2p}{\sqrt{m^2c^4+c^2p^2}} \tag{1.23}$$

---

① 在量子力学中, 0 角动量态即 s 态, 则是在空间各个角度方向等概率出现, 它与经典力学中粒子角动量为 0 的状态无法对应. 实际上, 量子力学的 0 角动量态是没有经典对应的.

由此解得

$$p=\frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.24}$$

把上式代入题给 Hamilton 量表达式即得

$$E=\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}=mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2} \tag{1.25}$$

从而

$$p=mv/\sqrt{1-v^2/c^2}=Ev/c^2 \tag{1.26}$$

按 de Broglie 关系, 物质波的频率、波数分别为

$$k=\frac{p}{\hbar},\quad \omega=\frac{E}{\hbar} \tag{1.27}$$

因而 de Broglie 波的相速度

$$v_p=\frac{\omega}{k}=\frac{E}{p}=\frac{c^2}{v} \tag{1.28}$$

因为 $v<c$, 故相速度 $v_p>c$. 式 (1.25)、式 (1.27) 给出 de Broglie 如下色散关系:

$$\omega(k)=\frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m^2c^4}{\hbar^2}+c^2k^2} \tag{1.29}$$

从而得物质波的波包群速度为

$$v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\sqrt{\frac{m^2c^4}{\hbar^2}+c^2k^2}=\frac{c^2k}{\sqrt{\frac{m^2c^4}{\hbar^2}+c^2k^2}}$$

再由式 (1.25)、式 (1.27) 以及式 (1.26) 即得

$$v_g=\frac{c^2p}{\sqrt{m^2c^4+c^2p^2}}=\frac{c^2p}{E}=v \tag{1.30}$$

可见 de Broglie 波的群速与粒子速度相等.

1.8 按照特殊相对论, 粒子能量、动量和质量的关系式, $E^2=p^2c^2+m^2c^4$, 求:

(1) 非相对论近似下的能量展开式

$$E=mc^2\left[1+\left(\frac{pc}{mc^2}\right)^2\right]^{1/2}=mc^2+\frac{p^2}{2m}-\frac{p^4}{8m^3c^2}+\cdots$$

上式右边 mc^2 为静止能 (rest energy), $\frac{p^2}{2m}$ 为非相对论极限下的动能, $-\frac{p^4}{8m^3c^2}$ 为最低级相对论修正.

(2) 在极高速情况下 (高能物理实验中经常碰到), 求能量的近似展开

$$E=pc\left[1+\left(\frac{mc^2}{pc}\right)^2\right]^{1/2}=pc+\frac{1}{2}\frac{m^2c^4}{pc}+\cdots$$

对于无静质量 ($m=0$) 粒子 (例如光子), $E=pc$.

解 (1) 题给粒子能量、动量和质量的关系式 (三角关系) 又可写为

$$E=\left(p^2c^2+m^2c^4\right)^{1/2} \tag{1.31}$$

非相对论情形下, 粒子速度 $v\ll c$, 从而 $p=\dfrac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}v\approx mv\ll mc$, 也就是 $\dfrac{pc}{mc^2}\ll 1$. 将粒子能量关系式 (1.31) 按照 $\left(\dfrac{pc}{mc^2}\right)^2$ 作 Taylor 展开即得

$$E=mc^2\left[1+\left(\frac{pc}{mc^2}\right)^2\right]^{1/2}=mc^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{pc}{mc^2}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{pc}{mc^2}\right)^4+\cdots\right]=mc^2+\frac{p^2}{2m}-\frac{p^4}{8m^3c^2}+\cdots$$

(2) 在极高速情况下, 粒子速度 $v\approx c$, 而 $p=\dfrac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}v=\dfrac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}mc\gg mc$, 此时 $\dfrac{mc^2}{pc}\ll 1$. 将粒子能量关系式 (1.31) 按照 $\left(\dfrac{mc^2}{pc}\right)^2$ 作 Taylor 展开即得

$$E=pc\left[1+\left(\frac{mc^2}{pc}\right)^2\right]^{1/2}=pc\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{mc^2}{pc}\right)^2+\cdots\right]=pc+\frac{1}{2}\frac{m^2c^4}{pc}+\cdots$$

对于无静质量 ($m=0$) 粒子 (例如光子), 式 (1.31) 直接给出 $E=pc$.

1.9 (1) 试用 Fermat 最短光程原理导出光的折射定律: $n_1\sin\alpha_1=n_2\sin\alpha_2$. (2) 光的波动说的拥护者曾经向光的微粒论者提出下列非难: 如认为光是“粒子”, 则其运动遵守最小作用原理, $\delta\int p\mathrm{d}l=0$. 若认为 $p=mv$, 则 $\delta\int v\mathrm{d}l=0$, p 指粒子“动量”, v 指粒子“速度”. 这样将导出下列折射定律: $n_2\sin\alpha_1=n_1\sin\alpha_2$, 这明显违反实验事实. 即使考虑相对论效应, 对于自由粒子, $p=Ev/c^2$ 仍然成立, E 是粒子能量, 从一种介质到另一种介质, E 不改变. 因此, 仍然得到 $\delta\int p\mathrm{d}l=0$. 矛盾依然存在. 你怎样解决这矛盾?

参阅 L. de Broglie, *Le Journal de Physique et la Radium*, **7**(1926),1.

解 (1) 由 Fermat 最短光程原理知光线在同一均匀各向同性介质中沿直线传播. 因此光线从介质 I(折射率设为 n_1) 的一点 A 传播到介质 II (折射率设为 n_2) 的一点 B 走的路程是两段直线. 我们将根据 Fermat 最短光程原理确定光线与两种介质分解面 S 的交点 P.

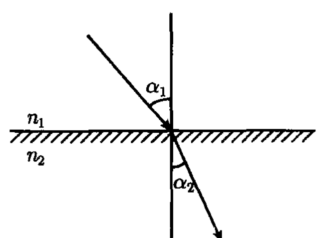


图 1.4 光的折射

设过 A,B 且与两种介质分界面 S 垂直的平面为 Π, 则 P 必在平面 Π 内. 若否, 则可以过 P 点作平面 Π 的垂足 P'. $AP'P$ 为直角三角形, 其直边长度 $|AP'|$ 必小于斜边长度 $|AP|$; 同样 $|BP'|$ 小于斜边长度 $|BP|$, 因此 $n_1|AP'|+n_2|BP'|<n_1|AP|+n_2|BP|$. 这样 APB 不是最短光程. 由矛盾知 P 必在平面 Π 内. 平面 Π 既是入射光线与分解面垂线构成的面 (入射面), 也是折射光线与分解面垂线构成的面 (折射面). 因此入射面与折射面共面, 这是由 Fermat 最短光程原理得到的折射定律的第一个内容.

设 A,B 到分界面距离分别是 a,b(都是定值), 入射角与折射角分别为 α_1,α_2, 则光线从 A 到 B 的总光程为

$$l=n_1|AP|+n_2|BP|=n_1a\sec\alpha_1+n_2b\sec\alpha_2 \tag{1.32}$$

由于 A,B 都是确定点, 因此若过 A,B 点向平面 S 的垂足 A',B', 则 $|A'B'|=c$ 为常数, 即有

$$a\tan\alpha_1 + b\tan\alpha_2 = c \tag{1.33}$$

为常数. Fermat 最短光程原理要求式 (1.32) 中 l 最小, 即有

$$0 = \delta l = n_1 a\delta\sec\alpha_1 + n_2 b\delta\sec\alpha_2 = n_1 a\sec\alpha_1\tan\alpha_1\delta\alpha_1 + n_2 b\sec\alpha_2\tan\alpha_2\delta\alpha_2 \tag{1.34}$$

再对式 (1.33) 求微分得

$$a\sec^2\alpha_1\delta\alpha_1 + b\sec^2\alpha_2\delta\alpha_2 = 0 \tag{1.35}$$

式 (1.34)、式 (1.35) 消去 $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2$ 即得

$$n_1\sin\alpha_1 = n_2\sin\alpha_2$$

即为折射定律的第二个内容, 即入射角与折射角.

(2) 此论证存在两个错误: 一是由于光子不同于具有确定静质量的实物粒子, 不能把基于确定静质量的关于实物粒子的动量关系用到光子上. 二是更不能把实物粒子运动的速度 v 与光波在介质中的速度 (相速)

$$v_p = \frac{c}{n}$$

(n 为介质的折射率) 混淆, 此处认为 $v = v_p$ 是造成错误的根源.

解决上述矛盾的关键在于分清波的相速 v_p、波包的群速 v_g 以及实物粒子的运动速度 v 三个不同的概念, 并找出其中的关系. 最小作用量原理与 Fermat 最短光程原理本身也并不是"矛盾"的, 关键要用正确的光子动量关系.

波的相速 v_p 为

$$v_p = \frac{\omega}{k} \tag{1.36}$$

而波包的群速 v_g 为

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{1.37}$$

因此, 若波包的色散关系 $\omega(k)$ 是线性的, 则 $v_p = v_g$; 若色散关系 $\omega(k)$ 是非线性的, 则一般 $v_p \neq v_g$. 而实物粒子速度为

$$v = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{1.38}$$

对于光波而言, 色散关系为

$$\omega(k) = \begin{cases} ck, & \text{真空} \\ \dfrac{c}{n}k, & \text{介质} \end{cases}$$

式中 c 是真空中的光速, n 为介质折射率. 光在真空中传播, 色散关系为线性, 故真空中

$$v_p = v_g$$

但在介质中, 通常 n 与频率 ω 有关. 此时

$$\mathrm{d}\omega = \frac{c}{n}\mathrm{d}k - \frac{ck}{n^2}\mathrm{d}n = v_p\mathrm{d}k - \frac{ck}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}\omega$$

故一般

$$v_g = \frac{v_p}{1 + \dfrac{ck}{n^2}\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}} \neq v_p$$

光子不同于具有确定静质量的实物粒子, 不能把基于确定静质量的关于实物粒子的动量关系用到光子上. 对于真空中或者介质中的光子, 其动量、能量由 de Broglie 关系给出

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad E = h\nu \tag{1.39}$$

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook.com