高职高专“十一五”规划教材

应用数学

张明昕 ◎ 主编　　张树江 ◎ 主审

化学工业出版社

高职高专“十一五”规划教材

应用数学

张明昕 ◎ 主编　　王宏杰 ◎ 副主编

张树江 ◎ 主审

化学工业出版社

·北京·

本书主要内容包括高等数学的级数、微分方程、二重积分、曲线积分，线性代数的行列式、矩阵、线性方程组，概率论与数理统计的随机事件、随机变量、统计初步以及数学建模。本书注重以实例引入概念和定理，对加强学生对数学的应用意识和兴趣，培养学生用数学的原理和方法解决问题大有裨益。

本书可作为高职高专各专业的应用数学教材，也可供各行业数学爱好者阅读。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学/张明昕主编. —北京：化学工业出版社，2010.1

高职高专“十一五”规划教材

ISBN 978-7-122-07267-2

Ⅰ.应… Ⅱ.张… Ⅲ.应用数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 225943 号

责任编辑：于 卉　　文字编辑：孙凤英

责任校对：周梦华　　装帧设计：关 飞

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm　1/16　印张 19　字数 492 千字　　2010 年 2 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：36.00 元

前　言

随着我国高等教育尤其是高职高专教育的飞速发展，无论是学生的实际水平还是相关专业课对高等数学知识的需要，原有的教材无论从内容上还是从体系上都不适应当今高职学生的特点．为了深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养创新人才、适应高职教育的发展趋势，我们依据《高职高专高等数学课程教学基本要求》，在总结多年教学改革经验的基础上，结合高职院校各专业学生的特点，编写了本教材．本书也是作者经过多年教学实践和在吸收“十五”规划教材成果的基础上编写而成的．本书主要内容包括高等数学的级数、微分方程等、线性代数、概率论与数理统计的一部分内容以及数学建模的相关介绍．力求用通俗的语言阐述基础知识和基本概念．在保持学科科学性和完整性的前提下，突出应用与计算，淡化理论，充分考虑高职学生的特点，增加趣味性和启发性的小问题等，教材内容注意高、中、低的结合，尽量满足不同层次学生的需求．本书可作为高职高专各专业通用的高等数学教材．

在本书的编写过程中，我们主要遵循以下原则．

1．淡化理论，突出实用．本书在理论上以学生易理解和不影响教学体系为尺度，多注重以几何图形直观启发学生．

2．通俗易懂．结合学生实际水平，在教材内容处理上力求通俗易懂，深入浅出．在介绍基本理论和重要定理时，没有采用传统的严谨数学论证方法，而是注重以实例引入概念和定理，并最终回到数学应用的思想，加强学生对数学的应用意识和兴趣，培养学生用数学的原理和方法解决问题的能力．

3．把方法的应用程序化、步骤化．

4．在每章或每节开始，用尽可能短的语言点题，以便起到承上启下的作用，增加可读性，方便学生复习和总结．

本书由张明昕主编（辽宁石油化工大学），王宏杰副主编（辽宁石油化工大学），张树江任主审（辽宁石油化工大学），本书具体编写情况为：第一、二、五、十四章由张明昕编写，第三、七、八、九章由王宏杰编写，第六、十三章由丁平（辽宁石油化工大学）编写，第十、十一、十二章由程文光（辽宁石油化工大学）编写，第四章由王新伟（辽宁石油化工大学）编写．

本书在编写过程中参考了国内外教材和图书，借鉴和吸收其他同行的研究成果，在此对相关作者表示衷心感谢；感谢化学工业出版社编辑为本书出版所付出的辛勤劳动．

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免有不妥之处，恳请广大读者批评指正．

编　者

2009 年 10 月

目　录

第一章　空间解析几何与向量代数

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

（1）将数轴（一维）、平面直角坐标系（二维）进一步推广建立空间直角坐标系（三维）如图 1-1，其符合右手规则.

（2）各轴名称、坐标面的概念以及卦限的划分如图 1-2 所示.

（3）空间点 $M(x,y,z)$ 的坐标表示方法，关于坐标轴、坐标面原点的对称点的表示法．通过坐标把空间的点与一个有序数组对应起来.

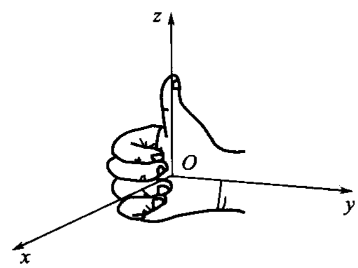

图 1-1

二、空间两点间的距离

若 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，则距离（见图 1-3）为：

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

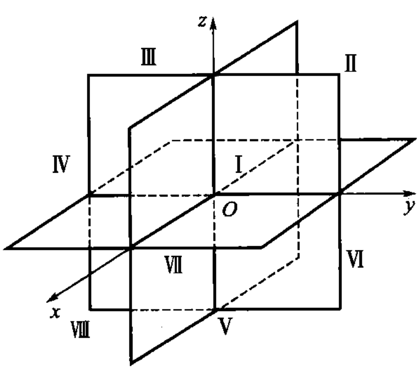

图 1-2

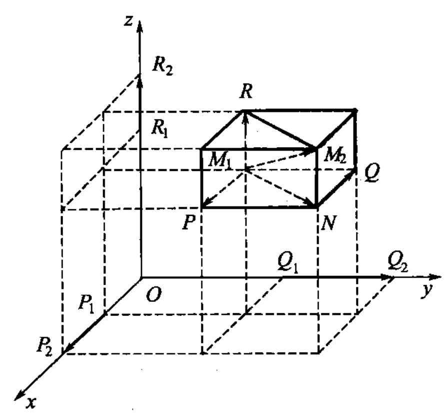

图 1-3

三、空间点坐标

空间特殊点的坐标的特点：

第 1 卦限上点坐标 $M(x,y,z)$ $(x,y,z>0)$；

第 2 卦限上点坐标 $M(x,y,z)$ $(x<0,y,z>0)$；

第 3 卦限上点坐标 $M(x,y,z)$ $(x<0,y<0,z>0)$；

第 4 卦限上点坐标 $M(x,y,z)$ $(x>0,y<0,z>0)$；

第 5、6、7、8 卦限上点坐标 $M(x,y,z)$ 的特点依次把第 1、2、3、4 中 z 改为 $z<0$.

位于坐标轴上点的坐标的特点：

若 $M(x,y,z)$ 为 z 轴上的点，则 x、$y=0$；

若 $M(x,y,z)$ 为 x 轴上的点，则 y、$z=0$；

若 $M(x,y,z)$ 为 y 轴上的点，则 x、$z=0$.

位于坐标平面上点的坐标的特点：

若 $M(x,y,z)$ 位于 xOy 面上，则 $z=0$；

若 $M(x,y,z)$ 位于 zOx 面上，则 $y=0$；

若 $M(x,y,z)$ 位于 yOz 面上，则 $x=0$.

例 1　求点 $M(2,3,2)$ 到坐标 x 轴的距离.

解　$d(M,x)=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

例 2　在 y 轴上求与点 $M_1(1,2,3)$ 和 $M_2(2,3,2)$ 等距离的点的坐标.

解　设点为 $M(0,y,0)$，则有 $|M_1M|^2=|M_2M|^2$，

即 $1^2+(2-y)^2+3^2=2^2+(3-y)^2+2^2 \Rightarrow y=\dfrac{3}{2}$，所以点为 $M\left(0,\dfrac{3}{2},0\right)$.

例 3　求证以 $A(2,1,9)$、$B(8,-1,6)$、$C(0,4,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰直角三角形.

解　$|AB|=\sqrt{(8-2)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=\sqrt{49}$

$|AC|=\sqrt{(0-2)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=\sqrt{49}$

$|CB|=\sqrt{(8-0)^2+(-1-4)^2+(6-3)^2}=\sqrt{98}$

因为 $|AB|=|AC|$，$|CB|^2=|AB|^2+|AC|^2$，所以 $\triangle ABC$ 是一个等腰直角三角形.

第二节　向量及其运算

一、向量的概念

(1) 向量：既有大小，又有方向的量.

(2) 在数学上用有向线段来表示向量，其长度表示向量的大小，其方向表示向量的方向.

(3) 在数学上只研究与起点无关的自由向量（以后简称向量).

(4) 向量的表示方法有 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{F}$、$\overrightarrow{OM}$等.

(5) 向量相等（$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$)：两个向量大小相等、方向相同（即经过平移后能完全重合的向量).

(6) 向量的模：向量的大小，记为 $|\boldsymbol{a}|$、$|\overrightarrow{OM}|$.

(7) 模为 1 的向量叫单位向量、模为零的向量叫零向量．零向量的方向是任意的.

(8) 向量平行（$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$)：两个非零向量的方向相同或相反．零向量与如何向量都平行.

二、向量的运算

1. 向量加法

设 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为边作平行四边形 $OABC$，则对角线 OC 所表示的向量 $\vec{c}$ 称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和向量，记为 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

向量加法也可由三角法则来定义．$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

2. 向量与数相乘

设数$\lambda\in\mathbf{R}$，向量$\vec{a}$与数λ相乘为一向量$\lambda\vec{a}$，其大小为$|\lambda||\vec{a}|$，方向为：当$\lambda>0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向，当$\lambda<0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向，当$\lambda=0$时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$，特别是当$\lambda=-1$时，$\lambda\vec{a}=-\vec{a}$.

由数乘定义：若$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，则有$\vec{a}//\vec{b}$，反之$\vec{a}//\vec{b}$且$\vec{a}\neq\vec{0}$，则有$\vec{b}=\lambda\vec{a}$. 这是两向量平行的判别法.

由单位向量的定义，若$\vec{a}\neq\vec{0}$，则$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$为与$\vec{a}$同向的单位向量，记为$\vec{a^0}$，即$\vec{a^0}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

向量的加法及向量与数相乘满足：

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$，$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$，$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$，$1\cdot\vec{a}=\vec{a}$，$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$，$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$，$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

向量的加法与数乘运算合称为向量的线性运算.

例 4　设平面上的一个四边形的对角线互相平分，证明它是平行四边形.

证明　见图 1-4. 因为$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$，又因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}$

所以$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$平行且长度相等．故四边形$ABCD$是平行四边形.

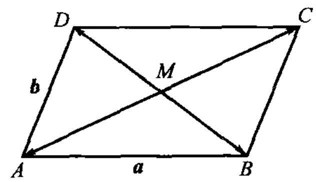

图 1-4

第三节　向量的坐标

一、向量的坐标

1. 向量在坐标系上的分向量与向量的坐标

通过坐标法，使平面上或空间的点与有序数组之间建立了一一对应关系，同样地，为了沟通数与向量的研究，需要建立向量与有序数之间的对应关系.

设$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$是以$M_1(x_1,y_1,z_1)$为起点、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为终点的向量，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$分别表示沿$x$，$y$，$z$轴正向的单位向量，并称它们为这一坐标系的基本单位向量，由图 1-3，并应用向量的加法规则知：

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

或
$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

式(1-1) 称为向量$\boldsymbol{a}$按基本单位向量的**分解式**.

有序数组a_x、a_y、a_z与向量$\boldsymbol{a}$一一对应，向量$\boldsymbol{a}$在三条坐标轴上的投影a_x、a_y、a_z就叫做向量$\boldsymbol{a}$的坐标，并记为

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\} \tag{1-2}$$

式(1-2) 叫做向量$\boldsymbol{a}$的**坐标表示式**.

于是，起点为$M_1(x_1,y_1,z_1)$、终点为$M_2(x_2,y_2,z_2)$的向量可以表示为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

特别地，点$M(x,y,z)$对于原点O的向径

$$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$$

两向量夹角的概念：设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，规定不超过 π 的$\angle AOB$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

※**注意**：向量在坐标轴上的分向量与向量在坐标轴上的投影有本质区别.

向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的投影是三个数 a_x、a_y、a_z，向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的分向量是三个向量 $a_x\boldsymbol{i}$ 、$a_y\boldsymbol{j}$ 、$a_z\boldsymbol{k}$.

2. 向量运算的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

◆ 加法：　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}$

◆ 减法：　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}$

◆ 乘数：　$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}$

◆ 或

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$$

◆ 平行：若 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 时，向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，即

$$\{b_x,b_y,b_z\}=\lambda\{a_x,a_y,a_z\}$$

也相当于向量的对应坐标成比例，即

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

二、向量的模与方向余弦的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，可以用它与三个坐标轴的夹角 α、β、γ（均大于等于 0，小于等于 π）来表示它的方向，称 α、β、γ 为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，见图 1-5，其余弦表示形式 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为方向余弦.

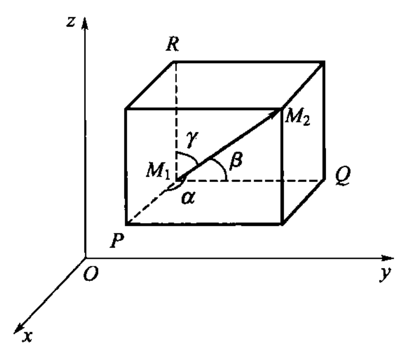

图 1-5

1. 模

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

2. 方向余弦

由上知 $\begin{cases}a_x=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha\\ a_y=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta=|\boldsymbol{a}|\cos\beta\\ a_z=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma\end{cases}$，当 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\neq 0$ 时，有

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\ \cos\beta=\dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\ \cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\end{cases}$$

◆ 任意向量的方向余弦有性质：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

◆ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为：

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{a_x,a_y,a_z\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

3. 例子

已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$、$M_2(1,3,0)$，计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦、方向角以及与$\overrightarrow{M_1M_2}$同向的单位向量.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-2,3-2,0-\sqrt{2}\}=\{-1,1,-\sqrt{2}\}$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\ \cos\beta=\frac{1}{2},\ \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\ \beta=\frac{\pi}{3},\ \gamma=\frac{3\pi}{4}$$

设 $\boldsymbol{a}^0$ 为与$\overrightarrow{M_1M_2}$同向的单位向量，由于 $\boldsymbol{a}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$
即得

$$\boldsymbol{a}^0=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

第四节　数量积和向量积

一、数量积

1. 定义

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，式中，$\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

2. 物理上

物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线位移 $\boldsymbol{s}$，力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角.

3. 性质

Ⅰ. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$

Ⅱ. 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直($\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$)的充分必要条件为：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

Ⅲ. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

Ⅳ. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

Ⅴ. $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})$　$(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b})$($\lambda$ 为常数)

4. 几个等价公式

Ⅰ. 坐标表示式：设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

Ⅱ. 两向量夹角可以由 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$式求解.

由数量积可得：

(1) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

(2) $|\vec{a}|\neq0$，$|\vec{b}|\neq0$：$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

例 5　设$\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，$\vec{b}=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$，求 $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

解 $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{8}{\sqrt{14}\times\sqrt{56}}=\dfrac{8}{28}=\dfrac{2}{7}$

例 6 设$\vec{a}\neq 0$，$\vec{b}\neq 0$ 且$\vec{c}\neq 0$，并有$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，问是否有$\vec{b}=\vec{c}$？

解 取$\vec{c}=\vec{i}$，$\vec{b}=\vec{j}$，$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，但$\vec{b}\neq\vec{c}$.

例 7 设$\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$，向量$\vec{x}$与$\vec{a}$共线，且$\vec{a}\cdot\vec{x}=-9$，求向量$\vec{x}$的坐标.

解 设$\vec{x}=\lambda\vec{a}$，$-9=\vec{a}\cdot\vec{x}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{a})=9\lambda$，$\lambda=-1$，所以 $\vec{x}=-\vec{a}=(-2,1,-2)$

二、向量积

1. 概念

设向量 $\boldsymbol{c}$ 是由向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式定义：$\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，式中，$\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的平面，指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$.

※注意： 数量积得到的是一个数值，而向量积得到的是向量.

2. 公式

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

3. 性质

Ⅰ. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

Ⅱ. 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行（$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$）的充分必要条件为：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 或$\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$

Ⅲ. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

Ⅳ. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

Ⅴ. $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})$ （λ 为常数）

4. 几个等价公式

Ⅰ. 坐标表示式：设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

Ⅱ. 行列式表示式：
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

向量积的坐标表示法：单位坐标向量$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$的叉乘.

$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}$，$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$，$\vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}$，$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$，$\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$，$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

例 8 已知三角形 ABC 的顶点分别为：$A(1,2,3)$、$B(3,4,5)$和 $C(2,4,7)$，求三角形 ABC 的面积.

解 根据向量积的定义，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle C=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

由于$\overrightarrow{AB}=\{2,2,2\}$，$\overrightarrow{AC}=\{1,2,4\}$

因此$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

于是 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}$

第五节 平面及其方程

一、平面的点法式方程

1. 平面的法向量定义

垂直于一平面的非零向量叫做平面的法向量.

平面内的任一向量均与该平面的法向量垂直.

2. 平面的点法式方程

如图 1-6，已知平面上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$和它的一个法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$，对平面上的任一点 $M(x,y,z)$，有向量$\overrightarrow{M_0M}\perp\boldsymbol{n}$，即

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$$

代入坐标式有：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{1-3}$$

此即平面的点法式方程.

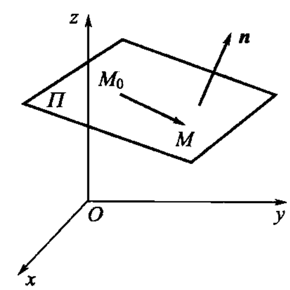

图 1-6

例 9 求过点(3,0,−5)且平行于平面 $2x-8y+z=0$ 的平面方程.

解 平面 $2x-8y+z=0$ 的法向量为{2,−8,1}，因所求平面与上平面平行，即其法向量也可取为{2,−8,1}，故所求平面方程为 $2(x-3)-8y+(z+5)=0$，即 $2x-8y+z-1=0$

例 10 求过三点 $M_1(2,-1,4)$、$M_2(-1,3,-2)$和 $M_3(0,2,3)$的平面方程.

解 先找出这平面的法向量 $\boldsymbol{n}$，

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=14\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

由点法式方程得平面方程为 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$，即

$$14x+9y-z-15=0$$

二、平面的一般方程

任一平面都可以用三元一次方程来表示.

平面的一般方程为：

$$Ax+By+Cz+D=0$$

几个平面图形的特点如下。

(1) $D=0$：通过原点的平面.

(2) $A=0$：法向量垂直于 x 轴，表示一个平行于 x 轴的平面.

同理，$B=0$ 或 $C=0$：分别表示一个平行于 y 轴或 z 轴的平面.

(3) $A=B=0$：方程为 $Cz+D=0$，法向量$\{0,0,C\}$，方程表示一个平行于 xOy 面的平面.

同理：$Ax+D=0$ 和 $By+D=0$ 分别表示平行于 yOz 面和 xOz 面的平面.

(4) 反之，任何的三元一次方程，例如，$5x+6y-7z+11=0$ 都表示一个平面，该平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{5,6,-7\}$.

例 11 若平面 π 与 x,y,z 轴分别交于 $P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$三点($abc\neq0$)，

则 π 的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

证 设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$

则
$$\begin{cases}aA+D=0\\bB+D=0\\cC+d=0\end{cases},\begin{cases}A=-D/a\\B=-D/b\\C=-D/c\end{cases}$$

代入得$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ——截距式，a,b,c 称为平面在 x,y,z 轴上的截距.

或
$$\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-a&b&0\\-a&0&c\end{vmatrix}=bc\boldsymbol{i}+ac\boldsymbol{j}+ab\boldsymbol{k},$$

故平面方程为 $bc(x-a)+cay+abz=0$，即$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

例 12 求过 x 轴与点$(4,-3,-1)$的平面方程.

解 平面过 x 轴，故可设其方程为 $By+Cz=0$

又平面过$(4,-3,-1)$，有 $B(-3)+C(-1)=0$，$C=-3B$，得平面方程为 $y-3z=0$.

例 13 平面在 y,z 轴上的截距为 30,10，且与$\vec{r}=\{2,1,3\}$平行，求平面方程.

解 设平面方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{30}+\frac{z}{10}=1$,

依题意其法向量$\vec{n}=\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{30},\frac{1}{10}\right\}$ 与 $\vec{r}=\{2,1,3\}$垂直，即$\vec{n}\cdot\vec{r}=\frac{2}{a}+\frac{1}{30}+\frac{3}{10}=0$，$a=-6$

故平面方程为$\frac{x}{-6}+\frac{y}{30}+\frac{z}{10}=1$.

三、两平面的夹角

1. 定义

两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.

设平面 Π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，Π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

$\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$，$\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$，按照两向量夹角余弦公式有：

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

2. 几个常用的结论

设平面 π_1 和平面 π_2 的法向量依次为 $\boldsymbol{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$和 $\boldsymbol{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$.

(1) 两平面垂直：$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$（法向量垂直）

(2) 两平面平行：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$（法向量平行）

(3) 平面外一点到平面的距离公式：设平面外的一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，平面的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，则点到平面的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

例 14 设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

解 设平面为 $Ax+By+Cz+D=0$，由平面过原点知 $D=0$

由平面过点$(6,-3,2)$知 $6A-3B+2C=0$,

因为 $\vec{n}\perp\{4,-1,2\}$，所以 $4A-B+2C=0 \Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C$

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0$

例 15　研究以下各组里两平面的位置关系：

(1) $-x+2y-z+1=0$，$y+3z-1=0$

(2) $2x-y+z-1=0$，$-4x+2y-2z-1=0$

(3) $2x-y-z+1=0$，$-4x+2y+2z+2=0$

解　(1) $\cos\theta=\frac{|-1\times0+2\times1-1\times3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\times\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{60}}$，

两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\frac{1}{\sqrt{60}}$

(2) $\vec{n}_1=\{2,-1,1\}$，$\vec{n}_2=\{-4,2,-2\}$　$\Rightarrow\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2}$，两平面平行，

因为 $M(1,1,0)\in\Pi_1$，$M(1,1,0)\in\Pi_2$，两平面平行但不重合.

(3) 因为$\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2}$，两平面平行

因为 $M(1,1,0)\in\Pi_1$，$M(1,1,0)\in\Pi_2$，所以两平面重合.

四、点到时平面的距离

例 16　设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，则 P_0到这平面的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

证　$d=\left||\overrightarrow{P_1P_0}|\cos\theta\right|=|\overrightarrow{P_1P_0}||\cos\theta|$

又$\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_0}=|\vec{n}||\overrightarrow{P_1P_0}|\cos\theta$，得

$$d=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{n}|}=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{|\vec{n}|}$$

因 $P_1(x_1,y_1,z_1)$在 π 上，即 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$

故
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

第六节　空间直线及其方程

一、空间直线的对称式方程与参数方程

平行于一条已知直线的非零向量叫做这条直线的方向向量.

已知直线上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$和它的一方向向量 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$，设直线上任一点为 $M(x,y,z)$，那么$\overrightarrow{M_0M}$与 $\boldsymbol{s}$ 平行，由平行的坐标表示式有：

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

此即空间直线的对称式方程.

如设

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

就可将对称式方程变成参数方程(t 为参数)