普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

朱 捷　宋作忠　刘 龙　编
母丽华　主审

上册

ADVANCED MATHEMATICS

化学工业出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

上册

朱 捷 宋作忠 刘 龙 编
母丽华 主审

化学工业出版社
·北京·

本书根据普通高等院校理工类本科专业高等数学课程的教学大纲编写而成，并在深度和广度上进行了适当的调整，精选了大量具有专业背景的案例，以培养学生的数学素质、创新意识以及运用数学工具解决实际问题的能力。本书内容设计简明，但结构体系上又不失完整性。全书分上、下两册，共10章。其中上册4章，主要内容包括极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程初步。并在书中融入了数学家、数学文化等内容，以扩展学生的知识面。

本书结合现代教学的新要求，增加了结合教学、结合专业要求的数学实验，书中附有Matlab软件应用内容，并配备了内容丰富的习题和总复习题。这些设计将对学生的课后复习、自学提高以及创新能力的培养起到积极的作用。另外，在书末附有习题答案供读者参考。

本书可作为高等学校工科专业本科生的教材，也可供工程技术人员、科研人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册/朱捷，宋作忠，刘龙编．—北京：化学工业出版社，2011.7
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-122-11866-0

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①朱…②宋…③刘…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第139694号

责任编辑：唐旭华　袁俊红　　文字编辑：颜克俭
责任校对：周梦华　　装帧设计：刘丽华

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
710mm×1000mm　1/16　印张13¾　字数284千字　2011年8月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：29.80元

前　言

高等数学是工科院校最重要的基础课程之一，它不仅为后续的课程和科技工作提供必备的数学工具，而且对学生数学修养的培养和分析解决实际问题能力的提高起着重要而深远的作用．

本书符合国家教育部课程教学委员会提出的“高等数学教学基本要求”的应用型本科院校的培养目标，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，以掌握概念、强化应用为教学重点，内容结构严谨、语言简明易懂，基本理论和基本方法的介绍由浅入深，并根据我们多年的教改与科研实践，在教学内容上进行了适当的取舍．

本书适应近年来随社会进步出现的专业调整和专业知识更新，适当地引进了一些现代数学的知识窗口，介绍了数学家和数学文化等内容，使教材具有较宽的口径和较大的适用性．本书注重对学生数学素质、计算及应用能力、创新意识和工程意识的培养，介绍了 Matlab 软件在高等数学中的应用，并适度嵌入了与“高等数学”密切相关的数学实验课题．通过使用 Matlab 软件进行各种运算、绘制图形和完成实验课题，能够体验该软件的强大功能，大大拓宽了高等数学的应用范围，过去由于计算技术的局限“望洋兴叹”的问题，如今可以通过数学软件轻松解决．教材在加强应用能力培养、提高综合分析能力和创新能力方面为学生奠定了良好的数学基础．

本书分上下两册．上册内容为极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程初步．下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数的微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、数学实验．本书由朱捷、宋作忠、刘龙编著，母丽华主审．

在本书编写过程中，母丽华教授和徐静副教授等给予了许多宝贵意见和建议，在此表示感谢．

本书可作为高等学校工科专业本科生的教材，也可供工程技术人员、科研人员参考．

由于水平有限，书中不妥之处恳请广大读者批评指正，以期不断完善．

编者

2011 年 6 月

目　录

预 备 知 识

微积分研究的主要对象是函数．研究函数通常有两种方法.一种是代数方法和几何方法的综合．用这种方法常常只能研究函数的简单性质,做起来很复杂．初等数学中就是用这种方法来研究函数的单调性、奇偶性、周期性．另一种是微积分方法,或者说是极限方法．用这种方法能够研究函数许多深刻的性质,并且做起来相对简单．微积分就是用极限的方法研究函数的一门学问．因此,在介绍微积分之前,有必要先介绍函数的概念和有关知识.

0.1 集　　合

(1)集合的概念

一般地,具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**,用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.组成集合的每一个对象称为集合的**元素**,用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

若 x 是集合 A 的元素,则说 x 属于 A,记为 $x\in A$;若 x 不是集合 A 的元素,则说 x 不属于 A,记为 $x\notin A$.

含有有限个元素的集合称为有限集;含有无限个元素的集合称为无限集;不含任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$.

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,或者称 A 包含于 B,或 B 包含 A,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

集合一般有以下两种表示方法.

一是列举法,在{ }中按任意顺序、不遗漏、不重复地列出集合的所有元素．如集合 A 由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成,可表示为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. 这种表示法一般适用于有限集和可数无限集.

二是描述法,若 A 是具有某种特征 P 的元素 x 全体所构成的集合,一般形式为

$$A=\{x\mid x\text{ 具有特征 }P\}.$$

(2)集合的运算

集合的基本运算有三种:交、并、差.

设 A,B 是两个集合,则集合

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\};$$

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 但 }x\notin B\}.$$

分别称为 A 与 B 的**并集**、**交集**、**差集**.

研究某一问题时所考虑的对象全体称为**全集**,并用 I 表示,把差集 $I\backslash A$ 称为 A 的余集或补集,记作 A^c.

(3)区间和邻域

区间是常用的一类数集,大体可以分为有限区间和无限区间.

符号	名称		定义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x \mid a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a,b]$		半开区间	$\{x \mid a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$		半开区间	$\{x \mid a\leqslant x<b\}$
$(a,+\infty)$	无限区间	开区间	$\{x \mid a<x\}$
$[a,+\infty)$		半开区间	$\{x \mid a\leqslant x\}$
$(-\infty,b)$		开区间	$\{x \mid x<b\}$
$(-\infty,b]$		半开区间	$\{x \mid x\leqslant b\}$
$(-\infty,+\infty)$		开区间	$\{x \mid \lvert x\rvert<+\infty\}$

定义 1 设 $a\in\mathbf{R},\delta>0$,数集 $\{x \mid \lvert x-a\rvert<\delta\}$,称为 ***a* 的 *δ* 邻域**,记为 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x \mid \lvert x-a\rvert<\delta\}.$$

a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径.

数集 $\{x \mid 0<\lvert x-a\rvert<\delta\}$ 表示在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉 a 的集合,称为 ***a* 的去心 *δ* 邻域**,记作

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x \mid 0<\lvert x-a\rvert<\delta\}.$$

为了方便,有时把开区间 $(a-\delta,a)$,称为 a 的左 δ 邻域,把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

如果无需指明邻域的半径 δ 时,常把 a 的某邻域(或去心邻域)表示为 $U(a)$ 或 $\mathring{U}(a)$.

0.2 函　　数

(1)概念

定义 2 设非空数集 $D\subset\mathbf{R}$,则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数,通常记为

$$y=f(x),x\in D$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 称为**定义域**,记作 D_f,即 $D_f=D$. 数 x 对应的数 y,称为 x 的**函数值**,函数值的集合 R_f 或 $f(D)$ 称为**函数 *f* 的值域**.

下面举几个函数的例子.

【例 1】 常数函数 $y=3$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{3\}$.

【例 2】 绝对值函数 $y=\lvert x\rvert=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域

$R_f=[0,+\infty)$,如图 1.

【例 3】 符号函数 $y=\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,如图 2.

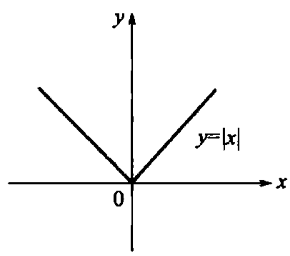


图 1

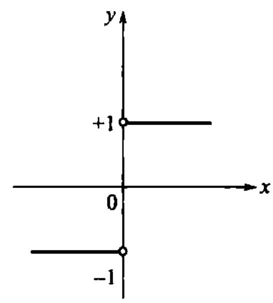


图 2

【例 4】 取整函数

对任意的 $x\in\mathbf{R}$,用记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数,从而得到定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数

$$y=[x],$$

称此函数为取整函数,$[x]$称为 x 的整数部分.

例如,$\left[\frac{5}{8}\right]=0$,$[\sqrt{3}]=1$,$[\pi]=3$,$[-2]=-2$,$[-3.5]=-4$.

$y=[x]$的定义域是 $\mathbf{R}$,值域是 $\mathbf{Z}$.

(2)函数的性质

奇偶性 设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称,若 $\forall x\in D$(符号"$\forall$"表示"对于任意给定的"或"对于每一个"),都有 $f(-x)=-f(x)$成立,则称 $f(x)$为**奇函数**;若 $\forall x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$成立,则称 $f(x)$为**偶函数**.

例如,函数 $y=x^4-2x^2$,$y=\sqrt{1-x^2}$,$y=\frac{\sin x}{x}$都是偶函数;函数 $y=\frac{1}{x}$,$y=x^3$,$y=x^2\sin x$ 都为奇函数;函数 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数,称为非奇非偶函数. 显然,奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.

单调性 设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$,若 $\forall x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$,都有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

成立,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调增加**或称递增,$f(x)$是区间 I 上的单调增加函数,区间 I 称为单调增加区间;若对于 $\forall x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$,都有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

成立,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调减少**或称递减,$f(x)$是区间 I 上的单调减少

函数，区间 I 称为单调减少区间．单调增加或单调减少函数统称为单调函数．

从几何直观上看单调递增是指随着自变量 x 的增加，函数的图像逐渐上升；单调递减是指随着自变量 x 的增加，函数的图像逐渐下降．

关于函数单调性的讨论，将在后续导数的几何应用中研究．

有界性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，若存在正数 M，使得 $\forall x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上**有界**，或称 $f(x)$ 为区间 I 上的有界函数；否则称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**，或称 $f(x)$ 为区间 I 上的无界函数．

可以证明，函数 $f(x)$ 在 I 上有界的充分必要条件是存在数 m，M 且 $M>m$，使得 $\forall x\in I$，都有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$. 其中 m 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个下界，M 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个上界．

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的，因为 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $|\sin x|\leqslant 1$. 而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上是无界的，在 $[1,+\infty)$ 上是有界的．

周期性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在正数 T，使得 $\forall x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的一个周期．满足上式的最小正数 T，称为函数 $f(x)$ 的最小正周期．

(3)复合函数和反函数

按照通常函数的记号，复合函数的概念表述如下．

定义 3 设有函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，若 $R_g\cap D_f\neq\varnothing$，则称定义在

$$\{x\,|\,x\in D_g,g(x)\in D_f\}$$

上的函数 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数，其中 u 为中间变量．

利用复合函数的概念，可以把一个复杂函数分解成若干个简单的函数，也可以利用几个简单函数复合成一个较复杂的函数．例如，$y=\cos\ln x$ 可以看作是由 $y=\cos u$，$u=\ln x$ 复合而成的；$y=\sqrt{u}$，$u=\sin x$ 可以复合成函数 $y=\sqrt{\sin x}$. 另外，还可以将复合函数的概念推广到有限个函数生成的复合函数．例如，$y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=2x+3$ 可以复合成函数 $y=\sqrt{\ln(2x+3)}$，$x\in[-1,+\infty)$.

定义 4 设函数 $f:D\to f(D)(x\mapsto y=f(x))$ 是单射，所以它存在逆映射 f^{-1}：$f(D)\to D(y_1\to x,f^{-1}(y)=x)$，则称 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数．

习惯上，常以 x 为自变量，y 表示函数，于是反函数又记为 $y=f^{-1}(x)$.

注意：①$y=f(x)$ 的定义域为 $y=f^{-1}(x)$ 的值域，$y=f(x)$ 的值域为 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域；②$y=f^{-1}(x)$ 的图形与 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称；③单调函数 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 具有相同的单调性．

【例 5】 求 $y=1+\log_3(x+3)$ 的反函数.

解 由 $y=1+\log_3(x+3)$，得 $\log_3(x+3)=y-1$，解得 $x=3^{y-1}-3$，故所求反函数为 $y=3^{x-1}-3$.

(4)基本初等函数

函数是微积分的研究对象，常用的函数有常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，我们将这六类函数称为基本初等函数.

① 幂函数　$y=x^{\alpha}$（α 是常数）.

$y=x^{\alpha}$ 的定义域取决于 α. 无论 α 取何值，$y=x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，图形都过 $(1,1)$ 点. 常用的幂函数有 $y=x, y=x^2, y=x^{\frac{1}{2}}, y=x^{-1}$（图 3）.

② 指数函数　$y=a^x$（$a>0, a\neq 1$）.

$y=a^x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 单调减少，指数函数的图像均在 x 轴上方（图 4）.

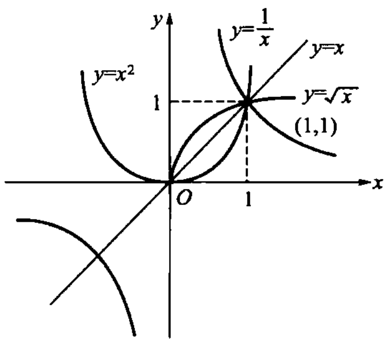


图 3

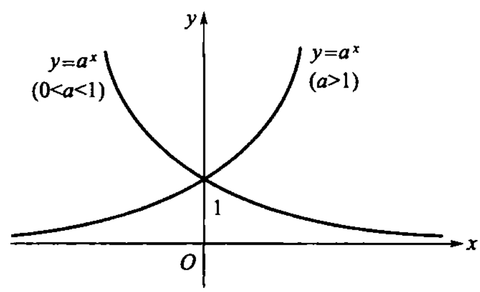


图 4

③ 对数函数　$y=\log_a x$（$a>0, a\neq 1$）.

$y=\log_a x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 单调减少，对数函数的图像均在 y 轴的右方（图 5）.

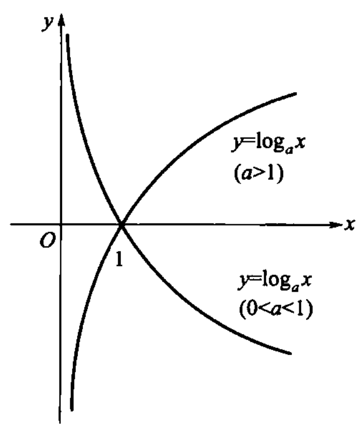


图 5

④ 三角函数.

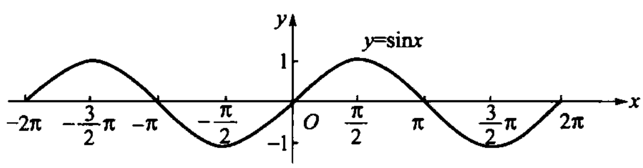
常用的三角函数有以下几种.

正弦函数 $y=\sin x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，是奇函数且有界，是以 2π 为周期的周期函数[图 6(a)].

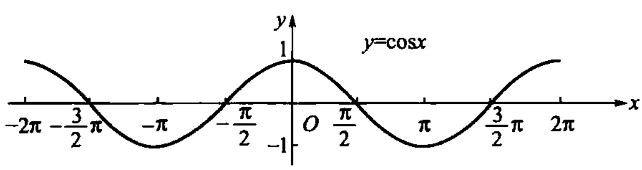
余弦函数 $y=\cos x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，是偶函数且有界，是以 2π 为周期的周期函数[图 6(b)].

正切函数 $y=\tan x$，其定义域为 $D=\{x\mid x\in\mathrm{R},x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$，是奇函数，是以 π 为周期的周期函数[图 6(c)].

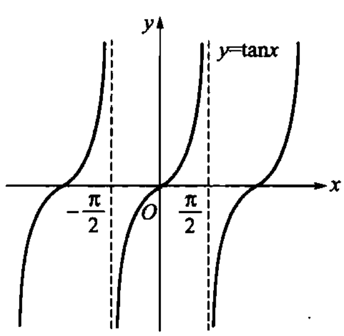
余切函数 $y=\cot x$，其定义域为 $D=\{x\mid x\in\mathrm{R},x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$，是奇函数，是以 π 为周期的周期函数[图 6(d)].



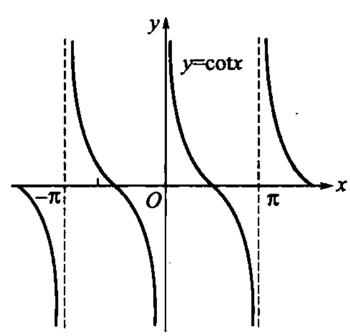
(a)



(b)



(c)



(d)

图 6

⑤ 反三角函数

常用的三角函数有以下几种.

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是正弦函数 $y=\sin x$ 在主值区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数，其定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，它是奇函数且单调增加[图 7(a)].

反余弦函数 $y=\arccos x$ 是余弦函数 $y=\cos x$ 在主值区间$[0,\pi]$上的反函数，其定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，它不具有奇偶性，是单调减少的[图 7(b)].

反正切函数 $y=\arctan x$ 是正切函数 $y=\tan x$ 在主值区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，它是奇函数且单调增加[图 7(c)].

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 是余切函数 $y=\cot x$ 在主值区间$(0,\pi)$上的反函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$，它不具有奇偶性是单调减少的[图 7(d)].

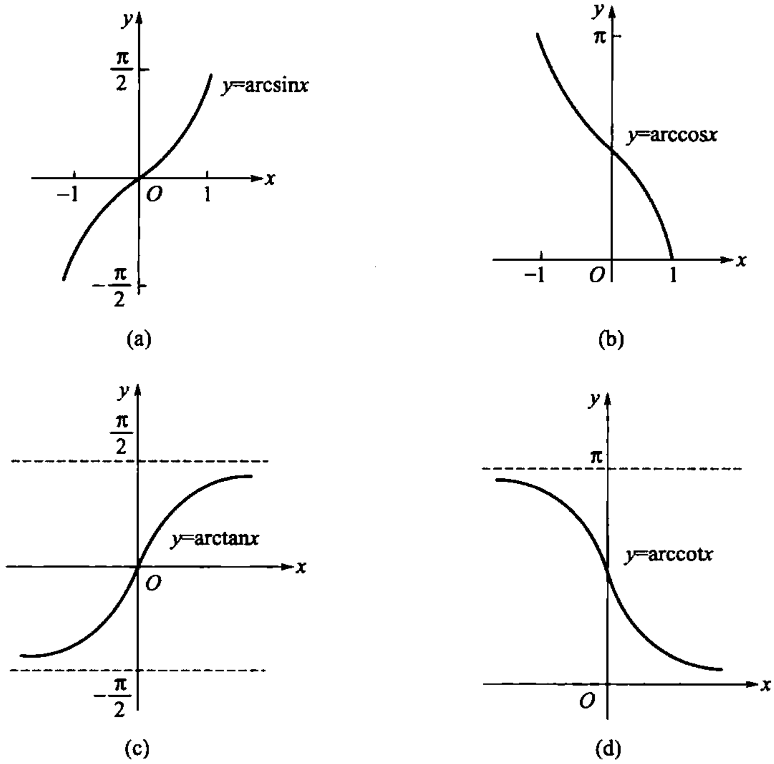


图 7

(5)初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合并能用一个式子表示的函数称为**初等函数**．例如 $y=\sqrt{x^2+1}$，$y=e^{\frac{1}{1-x}}$ 等都是初等函数，在本课程中讨论的函数基本上都是初等函数.

下面介绍工程技术上常用到的两类初等函数，即双曲函数及其反函数.

① 双曲正弦 $y=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，定义域和值域都是 $\mathbf{R}$，它是 $\mathbf{R}$ 上单调增加的奇函数(图 8).

② 双曲余弦 $y=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，定义域是 $\mathbf{R}$，值域是$[1,+\infty)$，它是偶函数，在区间$(-\infty,0)$上单调减少，在$(0,+\infty)$上单调增加(图 8).

③ 双曲正切 $y=\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，定义域是 **R**，它是 **R** 上单调增加的奇函数，它的图形夹在曲线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间(图 9).

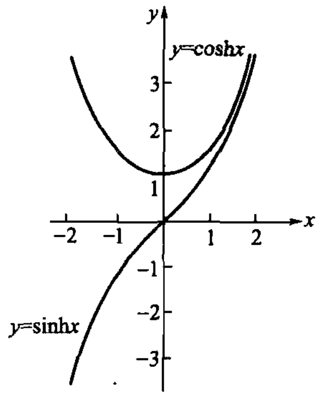


图 8

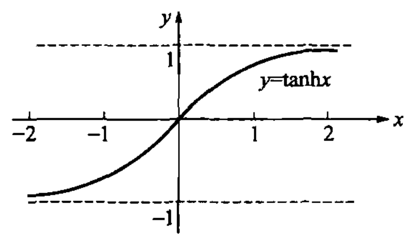


图 9

④ 反双曲正弦 $y=\operatorname{arsinh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是双曲正弦的反函数，定义域是 **R**，它是 **R** 上单调增加的奇函数(图 10).

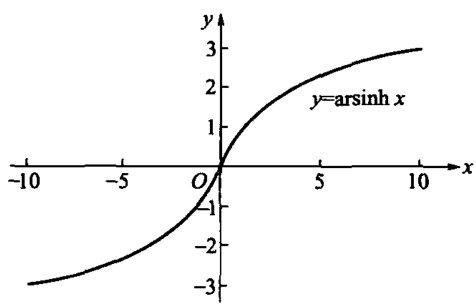


图 10

⑤ 反双曲余弦 $y=\operatorname{arcosh}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 是双曲余弦的反函数，定义域是 $[1,+\infty)$，值域是 $[0,+\infty)$，并在定义域上是单调增加的(图 11).

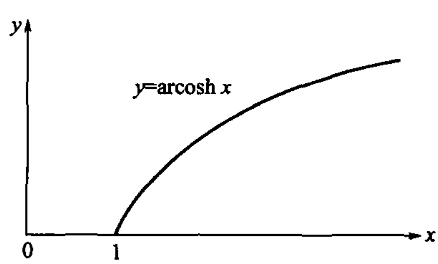


图 11

⑥ 反双曲正切 $y=\operatorname{artanh}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 是双曲正切的反函数，定义域是

$(-1,1)$，它在定义域上是单调增加的奇函数(图 12).

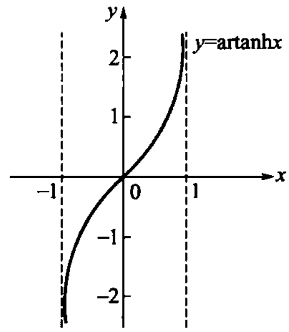


图 12

习　　题

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x+2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+1}$；

(3) $y=\sqrt{x^2-9}$；　　(4) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{4}$.

2. 判断下列函数 f 与 g 是否相同.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$；　　(2) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}$ 与 $g(x)=x^2-1$；　　(4) $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leqslant 0, \\ x^2+x & x>0. \end{cases}$ 则求 $f(-x)$.

4. 下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的.

(1) $y=\arcsin\sqrt{\tan x}$；　　(2) $y=\sin^2\sqrt{1-x-x^2}$；

(3) $y=\arctan e^{x^2}$.

5. 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $y=x+x^2-x^3$；　　(2) $y=2+3\cos x$；

(3) $y=xe^x$；　　(4) $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$；

(5) $f(x)=x+\sin x+e^x$；　　(6) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

第 1 章　极限与连续

微积分是一门以变量为研究对象、以极限方法为基本研究手段的数学学科，应用极限方法研究各类变化率问题和几何学中曲线的切线问题，就产生了微分学；应用极限方法研究诸如曲边图形的面积等涉及微小量无穷积累的问题，就产生了积分学．可以说，整个微积分是建立在极限理论基础之上的.

在本章前半部分我们将介绍极限的概念、性质和运算法则；介绍与极限概念密切相关、且在微积分运算中扮演重要角色的无穷小量；我们还将给出两个应用非常广泛的重要极限．后半部分将通过极限引入函数的一类重要性质——连续性.

1.1　数列的极限

1.1.1　数列的概念

定义 1.1　如果按照某个法则，每个 $n(n\in\mathbf{Z}^+)$ 对应于一个确定的实数 x_n，那么这些 x_n 按下标从小到大依次排成的一个序列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,$$

叫做**数列**，记为 $\{x_n\}$. 数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项 x_n，叫做数列的**一般项或通项**.

可以看出，数列是定义域为正整数集 $\mathbf{Z}^+$ 的函数

$$x_n = f(n), n\in\mathbf{Z}^+$$

当自变量依次取 1,2,3,…等一切正整数时，对应的函数值就排成数列 $\{x_n\}$.

【例 1.1.1】　下列均为数列.

① $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$；　一般项：$x_n = \frac{1}{n}$；

② $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, 1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \cdots$；　一般项：$x_n = 1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$；

③ $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$；　一般项：$x_n = (-1)^{n+1}$.

1.1.2　数列的极限

关于数列，我们要研究当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势．特别地，x_n 是否无限地接近某一个常数？

观察例 1.1.1，前两个数列当 $n\to\infty$ 时，都无限地接近于某个常数，$\frac{1}{n}$ 无限地接近于 0，