高級中學課本

平面幾何

出版者的話

一　本書是依照中央人民政府教育部所訂教學大綱試編的，全書一冊，供高級中學平面幾何教學之用.

二　本書取材於蘇聯 A.П. 吉西略夫所編的蘇聯十年制中學六——九年級幾何課本的第三、第四、第五三編，和初中課本是一個系統下來的.

三　本書編寫的順序基本上和所從取材的蘇聯課本相同，沒有什麼變動，不過將原有習題彙編中三分之二以上的題目分配在適當的章節裏，並且爲了教學的方便，由這些題目中選取若干加以解証插在課文裏.

四　本書是試編的，在實際教學上可能有問題，我們誠懇地盼望使用本書的教師們和同學們隨時將教學中發現的問題多給指出，以便逐步加以修改.

人民教育出版社

一九五三年五月

高級中學課本平面幾何目錄

第一章　相似形

I　綫段的測量

1. 綫段的測量　在初中學習幾何的時候，我們已經知道怎樣判定兩條綫段的相等，若不相等怎樣判斷其中的哪一條較長．我們又學過，在三角形中邊和角的關係，直綫和折綫長度的比較以及從一點到一直綫的垂綫和斜綫的關係．但是我們對於綫段的長度並沒有正確地表示出來．

這裏我們來研究綫段長度的概念，以及用數目表示這長度的方法．

2. 公度　設有三條綫段，u, AB, CD．用 u 去量 AB，量到 m（圖上 $m=5$）次正好量完，這就表示 AB 含 u 的整數 m 倍而沒有剩餘．若用 u 去量 CD，量到 n（圖上 $n=3$）次正好量完，這就表示 CD 含 u 的整數 n 倍而沒有剩餘．這也就表明用綫段 u 去量綫段 AB 和 CD 得到的都是整數 (m, n) 而沒有剩餘．在這種場合，我們就說 u 是 AB 和 CD 的公度．同樣可以求同圓或等圓中兩段弧的公度，也可以求兩個角的公度．一般的，可以求兩個同類量的公度．

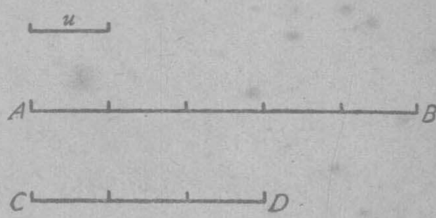

圖　1

在這裏必須注意，若綫段 u 是綫段 AB 和 CD 的公度，則將它分成 2, 3, 4, 或更多等分的時候，每一個小等分也是綫段 AB 和 CD 的公度．例如將 u 分成 4 等分，設一小等分爲 u'，則 $u'=\frac{1}{4}u$ 而 $u=4u'$．

$$\therefore \quad AB=mu=m(4u')=4mu',$$

$$CD=nu=n(4u')=4nu',$$

而 $4m$ 和 $4n$ 都是整數，因而 u' 也就是 AB 和 CD 的公度．

由此可知，若兩條綫段有一個公度，則它們就有無數個公度，但其中

必有一個是最大的，這就叫做它們的最大公度.

3. 求兩綫段的最大公度所根據的定理 在算術中，我們已經學過用輾轉相除法求兩個數的最大公約數. 和這個相似，我們可以用輾轉相截法求兩條綫段的最大公度. 這個方法所根據的是下面的兩個定理.

定理 1. 在兩條綫段中，若用短的一條去量長的一條正好量盡，卽可以將它分成若干條短的綫段而沒有剩餘，則這條短的綫段就是兩條綫段的最大公度

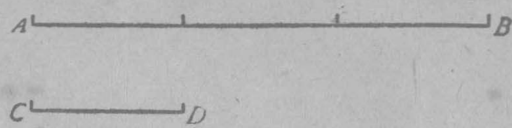

圖 2

例如上圖中，綫段 AB 正好是綫段 CD 的 3 倍，這時綫段 CD 就是它自己的 1 倍，所以綫段 CD 就是綫段 AB 和 CD 的公度. 其次一切比綫段 CD 長的綫段都不能將 CD 截成它們的倍數，所以綫段 CD 也就是綫段 AB 和 CD 的最大公度.

定理 2. 若用兩條綫段 AB 和 CD 中短的一條 CD，去量長的一條 AB，得出整數後，還剩下比 CD 短的綫段 RB；則這兩條綫段的最大公度就等於短的一條綫段 CD 和所剩的綫段 RB 的最大公度.

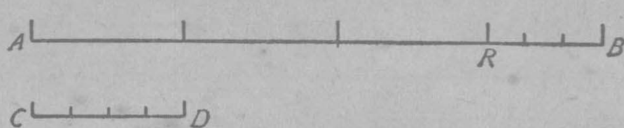

圖 3

例如 $AB=3CD+RB,\ RB<CD.$

若有一綫段 u 量 CD 得 4，量 RB 得 3；則

$$AB=3CD+RB=3(4u)+3u=15u$$

這就是說 u 可以量盡 CD，也可以量盡 AB.

反過來，若有一條綫段，用它去量綫段 AB 和 CD 都正好量盡，則用這條綫段量所剩的綫段 RB 也正好量盡. 設用綫段 u' 分別去量綫段 AB 和 CD 得到 15 和 4，而 $AB=3CD+RB$，

則 $$15u'=3(4u')+RB=12u'+RB,$$

$$\therefore \quad RB=15u'-12u'=3u'.$$

卽 u' 能將綫段 RB 量盡.

總括起來，這就說明了，兩組綫段

$$AB \text{ 和 } CD, \qquad CD \text{ 和 } RB$$

若有公度，則所有的公度必都是相同的；因而它們的最大公度也必是相同的.

除了這兩個定理，我們還須有下面的公理.

亞幾默得公理 兩條綫段 AB 和 CD 中，設 AB 較 CD 長，則無論 AB 怎樣長，CD 怎樣短，用 CD 去量 AB，一次一次地量下去，必定可以得到一個整數倍數 m，或正好量盡，或剩下比 CD 短的一段. 換句話說就是能夠求到一個整數 m，使得

$$mCD \leq AB < (m+1)CD.$$

4. 用輾轉相截法求兩綫段的最大公度 例如要求綫段 AB 和 CD 的最大公度（設 AB 比 CD 長）. 用兩脚規在 AB 上從一端 A 起，連續截取

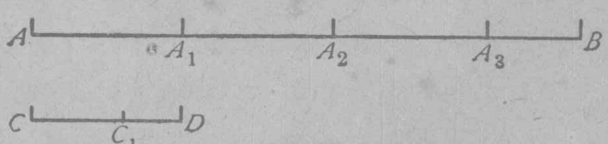

圖 4

AA_1，A_1A_2，……都等於 CD，使截的次數儘可能地多；這樣截法，可能有兩種結果：

(1)正好截完,沒有剩餘. 這樣,由定理 1, CD 就是 AB 和 CD 的最大公度

(2)截到 A_3 剩下綫段 A_3B 比 CD 短. 這樣,由定理 2, AB 和 CD 的最大公度就等於 CD 和 A_3B 的最大公度.

求 CD 和 A_3B 的最大公度,照上面的方法,在 CD 上,從一端 C 起連續截取等於 A_3B 的綫段,使截的次數儘可能地多;這樣截法,也可能有兩種結果:

(1)正好截完,沒有剩餘. 這樣, A_3B 就是 CD 和 A_3B 的最大公度,也就是 AB 和 CD 的最大公度.

(2)截到 C_1 剩下綫段 C_1D 比 A_3B 短. 這樣 CD 和 A_3B 的最大公度,(也就是 AB 和 CD 的)就等於 A_3B 和 C_1D 的最大公度.

我們照樣連續做下去,每次都可能有兩種結果:

(1)用上一次所剩下的綫段正好截盡上一次較短的綫段,沒有剩餘. 這樣,上一次所剩下的綫段就是所求的最大公度.

(2)截到最後,還剩下一綫段比上一次所剩下的綫段短.

若無論做到多少次都有這種剩下的綫段,這兩條綫段 AB 和 CD 就沒有公度. 有公度的兩條綫段,叫做**可公度綫段**;沒有公度的兩條綫段叫做**不可公度綫段**.

【注意】 用同樣的方法,可以求兩個角以及同圓或等圓中兩段弧的最大公度.

5. 不可公度綫段的存在 不可公度綫段的存在,是不容易使人相信的. 實際上,連續輾轉相截,我們永遠得到一段適當短的剩餘,而上一個剩餘總是它的整數倍數和一個剩餘,這是可能有的 不過因了工具(兩脚規)的不精確我們不容易觀察出來罷了. 下節的定理就表明不可公度綫段的存在.

6. 定理 正方形的一邊和它的對角綫是不可公度綫段.

因為一個正方形 $ABCD$ 的對角綫 AC 正好將它分成兩個全等的等腰直角三角形 ABC 和 ADC，所以這個定理也可以這樣說：等腰直角三角形的斜邊同着直角邊是不可公度綫段.

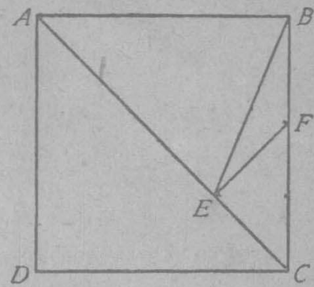

圖 5

我們就由等腰直角三角形來証明這個定理.

在斜邊 AC 上取 AE 等於直角邊 AB. 過 E 作 $EF \perp AC$ 交 BC 於 F.

在 $\triangle CEF$ 中：$\angle CEF = \angle R$, $\angle ECF = 45°$，　$\therefore \angle EFC = 45°$，而 $EF = EC$，卽 CEF 也是一個等腰直角三角形.

$\because \quad AB = AE \quad \therefore \quad \angle ABE = \angle AEB$,

$\therefore \quad \angle FBE = \angle FEB$,

$\therefore \quad BF = EF = EC$,

由 $\triangle ABC$，$\quad AB < AC < AB + BC$

卽 $\quad AB < AC < 2AB$.

所以用等腰直角三角形 ABC 的直角邊 AB 量它的斜邊 AC，只得 1 倍而剩下的綫段 EC 就小於 AB.

其次，用 EC 來量 AB 或和它相等的 BC，從 B 點起，先得 $BF = EC$，再量 FC. 但 CEF 也是一個等腰直角三角形，EC 是直角邊，FC 是斜邊，所以情形和用 AB 量 AC 的相同，可得到另一個等腰直角三角形. 這樣連續做下去，每次都是用一個等腰直角三角形的直角邊去量它的斜邊，都產生一個新的等腰直角三角形. 這就很明白，在這樣的進程中，永遠是有剩餘的，也就是綫段 AB 和 AC 的公度是不存在的.

7. 測量綫段的概念　我們在生活中，測量長短是用尺或丈，里，或寸，分做單位. 這就是用一尺或一丈，一里或一寸、一分做比較的標準. 一般地說，為了明確地表出一條已知綫段的長度，必須用另一條一定的綫段

來和它比較．這種用來作標準的一定的綫段叫做長度單位，如尺、丈、里、寸、分等．但用長度單位和已知綫段比較，可能有兩種不同的結果．

(1)已知綫段和所用的長度單位是可公度的．例如用綫段 CD 作單位去量綫段 AB，則可求出一個公度 u，用 u 去量 CD 和 AB 都得到整數而沒有剩餘．若 u 就等於 CD，則測量 AB 所得的是整數．設這整數是 3，我們就說綫段 AB 的長度是 3 個單位長．若公度 u 是綫段 CD 的一部分，則用 CD 去測量 AB 所得的便是分數．例如 $CD=4u$ 而 $AB=9u$，則 $AB=9(\frac{1}{4}CD)=\frac{9}{4}CD$；我們就說綫段 AB 的長是 $\frac{9}{4}$ 個單位長．

用一個單位量去測量某一個同類量所得的數，叫做這個量的量數．在已知綫段和所用的長度單位是可公度的場合，測量所得的量數是有理數(整數或分數)．

(2)已知綫段和所用的單位是不可公度的．在這種場合，可用間接量法；就是用一個小於 AB 和一個大於 AB 而同着 CD 是可公度的兩條綫段來代替 AB。找這兩條綫段的方法是這樣：

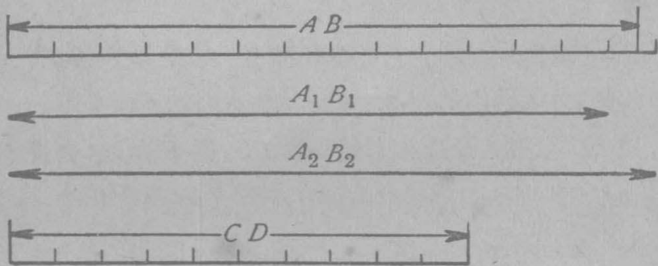

圖 6

設我們要找的是 A_1B_1 和 A_2B_2 這兩條綫段：第一，它們和 CD 是可公度的；第二，它們和 AB 的差都小於單位長 CD 的 $\frac{1}{10}$．先將 CD 分成 10 等分，而用其中的一小份去量 AB，使量的次數盡可能地多，設量到 13 次得 A_1B_1 而剩下的一小段已經小於 $\frac{1}{10}CD$，則 A_1B_1 旣和單位長 CD 有公度

$\left(\frac{1}{10}CD\right)$而和 AB 的差已小於$\frac{1}{10}CD$. 設我們再用$\frac{1}{10}CD$繼續量一次得到 A_2B_2, 則 A_2B_2 和單位長 CD 也有公度$\left(\frac{1}{10}CD\right)$, 而等於 14 個$\frac{1}{10}CD$但比 AB 長而和 AB 的差也小於$\frac{1}{10}CD$. 這樣一來, A_1B_1 等於$\frac{13}{10}$單位長, 是 AB 的不足近似值, A_2B_2 等於$\frac{14}{10}$單位長是 AB 的過剩近似值. 因爲綫段 AB 和綫段 A_1B_1 或 A_2B_2 的差都小於單位長的$\frac{1}{10}$, 所以用它們當中的任一個來表示綫段 AB 的長, 都準確到$\frac{1}{10}$.

一般地說, 爲了求出綫段 AB 的長度的近似值, 而要準確到$\frac{1}{n}$, 我們就先將單位 CD 分成 n 等分. 其次求出 AB 含有這$\frac{1}{n}$單位的最大整數倍數(卽用$\frac{1}{n}CD$ 去量 AB 到剩下的小於$\frac{1}{n}CD$ 時所得的次數) m, 則$\frac{m}{n}$和$\frac{m+1}{n}$都是綫段 AB 的長度的近似值, 並且都準確到$\frac{1}{n}$, 第一個是不足近似值, 第二個是過剩近似值.

在綫段 AB 和單位長 CD 可公度的場合, 也可以用這個方法, 求出 AB 長度的近似值. 在 AB 和 CD 不可公度的場合, 却不能得到一個有理數來正確地表出 AB 的長度; 若要正確地表示 AB 長度的眞值, 我們用下面所說的方法.

計算 AB 長度的不足近似值, 使它們依次精確到 0.1, 0.01, 0.001, …, 這樣無限地繼續下去, 每次的精確程度都增加一個小數位. 由這個過程所得出來的數的小數位, 依次是一位, 二位, 三位, ……, 而至於無限多的位數, 但它不是循環小數. 因爲循環小數都可以化成有理數(普通分數), 所以若得到的是循環小數, 就表示綫段 AB 和單位長 CD 是可公度的, 這和假設矛盾.

我們在代數中, 已經知道任何一個無限不循環小數都是無理數. 我

們常見的無理數是不盡根數，例如$\sqrt{2}$. 將它化成無限小數是

$$\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots$$

由此可知，在綫段 AB 和單位長 CD 不可公度的場合，則測量 AB 所得的無限小數是無理數，這個無理數就表示綫段 AB 長度的眞值.

我們應當注意，依次計算綫段 AB 長度的近似值，精確到 0.1, 0.01, 0.001, ……，無論取不足近似值或過剩近似值，得到的是同一個無理數；因爲，如用正方形的一邊作單位長去量它的對角綫；所得的就是$\sqrt{2}$. 帶有相同的十進精確程度的兩個近似值，——一個不足的，一個過剩的，它們所差的只在最末一位小數上. 當依次增大精確程度的時候，這個最末一位的小數向右方離開小數點越來越遠，小數位就越來越多. 若無限地繼續這種過程，則那兩個近似值就變成同一個無限不循環小數，卽同一個無理數.

這很明白的，作爲無理數的眞值的無限小數大於它的任何一個不足近似值，而小於它的任何一個過剩近似值

8.* 無限小數　無限小數的理論，在代數學中是以下面所列的定義作基礎的.

(1)無限小數和有限小數(包括整數、分數)叫做實數.

(2)若兩個無限小數的各個同位的數分別相等，則它們相等.

(3)兩個不相等的無限小數，第一個數目不相等的位數上，數目大的一個叫做較大的無限小數.

若一個無限小數，從某一位起以後所有的小數位上都是 0，這個小數就是一個有限小數，它是由已知的一個無限小數抹去最後一個有效數字後面所有的 0 得出來的. 例如無限小數7.8520078000……等於有限小數7.8520078. 循環節爲 9 的無限循環小數，總可以用一個有限小數代替. 這個有限小數是在第一個循環節的前一位加上1，而抹去以下所有的9得

---

* 本書凡作有 * 號的各節，酌量情形可以略去不教. ——供敎師參考.

出來的．例如無限循環小數 3.72999……就用有限小數 3.73 代替．

9.* 無限小數的近似值 若我們已經知道了一個無限小數到第 n 位小數的數目，將這個數目作爲有限小數看，這就叫做那個無限小數的精確到 $\frac{1}{10^n}$ 的不足近似值．若在這個有限小數的末一位加上 1，即在這個小數加上 $\frac{1}{10^n}$，則得一個新的有限小數，這個有限小數就叫做那個無限小數的精確到 $\frac{1}{10^n}$ 的過剩近似值．設有一個實數 α，它的 n 位小數的不足近似值爲 α_n，過剩近似值爲 α'_n，則

$$\alpha'_n=\alpha_n+\frac{1}{10^n}.$$

由實數大小的定義，則 α 大於它的任何不足近似值，而小於它的任何過剩近似值．例如，已知實數 $\sqrt{2}=1.414\cdots\cdots$．則它的精確到 0.01 的不足近似值和過剩近似值，分別是 1.41 和 1.42.

但 $1.41=1.41000\cdots\cdots$，　$1.42=1.42000\cdots\cdots$，

所以由實數大小的定義可以得，

$$1.41000\cdots\cdots<1.414\cdots\cdots<1.42000\cdots\cdots,$$

或
$$1.41<\sqrt{2}<1.42.$$

10.* 實數的運算——加法 設已知兩個實數 α 和 β，它們的 n 位小數的不足近似值和過剩近似值分別爲 α_n，β_n 和 α'_n，β'_n．則

$$\alpha'_n=\alpha_n+\frac{1}{10^n},\qquad \beta'_n=\beta_n+\frac{1}{10^n} \tag{1}$$

很明白的，$\alpha_n+\beta_n$ 和 $\alpha'_n+\beta'_n$ 都含有 n 位小數，分別用 γ_n，γ'_n 代表它們，即
$$\gamma_n=\alpha_n+\beta_n,\qquad \gamma'_n=\alpha'_n+\beta'_n.$$

將(1)的兩個等式相加，得 $\alpha'_n+\beta'_n=\alpha_n+\beta_n+\frac{2}{10^n}$，

即
$$\gamma'_n=\gamma_n+\frac{2}{10^n}.$$

這就是說 γ'_n 可由 γ_n 的末一位小數加上 2 得出來．若 n 無限地增

大，γ_n 就成了無限小數，設爲 γ. 這個小數或是循環的或是不循環的.

若無限小數 γ 是不循環的，則它應當有無限多的小數位上的數目不是 9. 同時 γ_n 中數目不是 9 的小數位的位數應當跟着 n 的增大而增多. 因爲小數 γ_n 加上 $\frac{2}{10^n}$，並不影響數目不是 9 的最後兩位數前邊的各個小數位上的數目，所以小數 γ'_n 和 γ_n 將趨於同一個無限小數. 綜合起來，不論小數位數 n 的大小怎樣，都可以得

$$\gamma_n<\gamma<\gamma'_n. \tag{2}$$

現在，設無限小數 γ 是循環的，在這種場合，它代表的是一個有理數. 當然，這個數也適合於不等式(2).

定義　適合於不等式　$\gamma_n<\gamma<\gamma'_n$

的實數 γ，叫做兩個實數 α 和 β 的和；即

$$\gamma=\alpha+\beta.$$

11.* 實數的其他運算　和前一節相同，我們可以規定兩個實數的差、積和商的意義. 我們仔細研究上面所說運算的結果，可以知道由這樣規定的實數和同着積，也適合於有理數運算的基本定律：

加法，$\alpha+\beta=\beta+\alpha$，$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

乘法，$\alpha\beta=\beta\alpha$，$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$，$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$.

對於無限循環小數，也很容易証明，上面所規定的運算，一樣地適用，並且將循環小數化爲普通分數再來計算，結果也是一樣.

因此，有理數不過是實數的一種特殊形式.

II　綫段的比和比例

12. 兩條綫段的比　我們已經知道，用單位長度去測量一條綫段所得的數叫做這綫段的量數. 若這綫段和單位長度是可公度的，則得到的量數是有理數；若是不可公度的，則得到的量數是用不循環無限小數表示的無理數.

以後我們說到某一條綫段的長，應當理解爲用單位長度去測它所得的量數.

用相同的長度單位去測兩條綫段 AB 和 CD，若所得的量數分別爲 a,b，則我們說這兩條綫段的比，指的就是這兩個量數的比；即

$$AB:CD=a:b;\text{或}\frac{AB}{CD}=\frac{a}{b}.$$

由此可知，兩條綫段的比和我們用去測量它們的長度單位沒有關係.(自然，兩條綫段必須用相同的單位去量). 例如，設我們用 u_1 去量綫段 AB 和 CD，得到的量數分別是 5 和 3，則

$$\frac{AB}{CD}=\frac{5}{3}$$

若將 u_1 縮小 3 倍得 $u_2=\frac{1}{3}u_1$，而將 u_2 去測量 AB 和 CD，則

$$AB=5u_1=5(3u_2)=15u_2,$$

$$CD=3u_1=3(3u_2)=9u_2,$$

而

$$\frac{AB}{CD}=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}.$$

一般的，若取原單位的$\frac{1}{n}$(或 n 倍)作單位，則每條綫段所含新單位的量數便是它所含原單位的量數的 n 倍$\left(\text{或}\frac{1}{n}\right)$. 因此，在表示兩條綫段的比的分數中，分子和分母同時都擴大了(或縮小了) n 倍，而比的數值並不受影響.

由上面所說的比的性質，我們可以知道，若兩條綫段是可公度的，則用它們的公度作單位去測量，而計算它們的比最方便. 在這種場合，這兩條綫段的比也就等於它們所含公度的倍數的比.

若兩條綫段是不可公度的，我們就依照所需要的，取它們的精確到 $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ……的近似值的比.

13. 定義 a,b,c 和 d 四個量，若 a 和 b 的比同着 c 和 d 的比相等，即

$a:b=c:d$, 我們就說這四個量成比例.

$a:b=c:d$ 又可寫作 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. a, b, c 和 d 各叫做比例的一項, 依次分別叫做比例的第一項、第二項、第三項和第四項.

第一項和第四項叫做比例的外項, 如 a 和 d. 第二項和第三項叫做比例的內項, 如 b 和 c. 比例中的任何一項都可以叫做其他三項的第四比例項.

14. 定義 若比例中的內項是相等的, 如 $a:b=b:c$, b 叫做 a 和 c 的比例中項, 而 c 叫做 a 和 b 的第三比例項.

15. 定理 四個量成比例, 則兩個內項的積等於兩個外項的積.

［假設］ $a:b=c:d$.

［終結］ $bc=ad$.

［証明］ $\because \quad a:b=c:d$,

即 $\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

兩邊乘以 bd 得 $\quad bc=ad$.

系 1. 一個比例的三項同着另一個比例的三項對應相等, 則第四項也相等.

因為若 $a:b=c:d$ 和 $a:b=c:e$, 則 $c:d=c:e$, $\therefore d=e$.

系 2. 兩個量的比例中項等於這兩個量的積的平方根.

因為, 若 $a:b=b:c$ 則 $b^2=ac$, $\therefore b=\sqrt{ac}$.

【注意】 比值總是不名數, 這裏和以後說到'量的積''乘方'和'方根'都是指'量數'.

16. 定理 若兩個量的積等於另外兩個量的積, 則可以用這兩個量做內項(或外項), 另外兩個量做外項(或內項)得一個比例式.

［假設］ $ad=bc$.

［終結］ $a:b=c:d$ 或 $b:a=d:c$.

[証明] $\because$ $ad=bc$.

兩邊除以 bd 得 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 卽 $a:b=c:d$.

若兩邊除以 ac 則得 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, 卽 $b:a=d:c$.

習 題 一

1. 先作兩條不相等的綫段,用輾轉相截法,求它們的比.
2. 求正三角形的高和邊的比(精確到 0.01).
3. 若 $ab=cd$, 寫出八個比例式來.
4. 設 $x+y:x-y=6:2$, 求 x 和 y 的比.
5. 設 $3x+2y:2x+5y=8:3$, 求 x 和 y 的比.
6. 若 $x=\sqrt{ab}$, 寫出一個比例式. 若 $x=\sqrt{3a^2}$ 呢?

17. 定理 同類的四個量成比例,則把它的內項(或外項)交換仍然成比例.

[假設] a,b,c 和 d 是同類的量並且 $a:b=c:d$

[終結] $a:c=b:d$, $d:b=c:a$.

[証明] $\because$ $a:b=c:d$.

$\therefore$ $ad=bc$.

兩邊除以 dc 得 $a:c=b:d$.

若兩邊除以 ab 則得 $d:b=c:a$.

18. 定理 四個量成比例,則把兩個比的前項和後項分別交換,仍然成比例.

[假設] $a:b=c:d$.

[終結] $b:a=d:c$.

[証明] $\because$ $a:b=c:d$.

$\therefore$ $bc=ad$.

兩邊除以 ac 得 $b:a=d:c$.

19. 定理 四個量成比例,則兩個比的前項和後項的和對於各後項仍然成比例.

[假設] $a:b=c:d$.

[終結] $a+b:b=c+d:d$.

[証明] $\because \quad a:b=c:d,$

即 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

$\therefore$ $$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1,$$

即 $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

$\therefore \quad a+b:b=c+d:d.$

20. 定理 四個量成比例,則兩個比的前項和後項的差對於各後項仍然成比例.

[假設] $a:b=c:d$.

[終結] $a-b:b=c-d:d$.

[証明] $\because \quad a:b=c:d,$

即 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

$\therefore$ $$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1,$$

即 $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

$\therefore \quad a-b:b=c-d:d.$

21. 定理 四個量成比例,則兩個比的前項和後項的和對於它們的前項和後項的差仍然成比例.

[假設] $a:b=c:d$.

[終結] $a+b:a-b=c+d:c-d$.

[証明] $\because \quad a:b=c:d,$