

中等职业学校文化课教学用书

# 数学教学参考书

(基础版)

第一册

(修订版)

主编 丘维声



高等教育出版社

中等职业学校文化课教学用书

# 数学教学参考书

(基础版)

第一册

(修订版)



高等教育出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

数学教学参考书. (基础版) 第一册 / 丘维声主编.  
(修订版). —北京: 高等教育出版社, 2005. 6 (2007 重印)

ISBN 978 - 7 - 04 - 016823 - 5

I. 数... II. 丘... III. 数学课 - 专业学校 - 教学  
参考资料 IV. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 047251 号

策划编辑 邵勇 责任编辑 薛春玲 封面设计 刘晓翔  
责任绘图 杜晓丹 版式设计 马静如 责任校对 金辉  
责任印制 宋克学

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010 - 58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
		网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>
			<a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a>
经 销	蓝色畅想图书发行 有限公司	畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
印 刷	高等教育出版社印刷厂		
开 本	850 × 1168 1/32	版 次	2001 年 9 月第 1 版
印 张	9.25		2005 年 6 月第 2 版
字 数	230 000	印 次	2007 年 9 月第 6 次印刷
		定 价	19.80 元(含光盘)

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 16823 - 00

第一版教材已经使用了几年,在这期间,中等职业教育发生了很大变化:(1)生源状况有了很大的变化;(2)“以服务为宗旨,以就业为导向”已成为职业教育的共识;(3)经过大量的调查、研讨,教师们在对第一版的国家规划教材给予充分肯定的同时,也提出了很多宝贵意见。为更好地服务于中等职业教育,高等教育出版社决定对第一版国家规划教材《数学》(基础版)进行修订。

教材修订版在保持第一版教材风格的基础上,着重从四个方面进行修订:

首先,针对中等职业学校学生的实际状况,把必学内容进一步降低难度以减轻学生负担,从而使教材与学生的实际状况相衔接;其次,从实际生活和专业课角度编选一些实际例子,这些例子有些放在教材中,大多放在网上,这样做是为了使教材与专业课相衔接,与实际相结合;第三是教材新配一张学习卡,凭借卡号和密码登录<http://sve.hep.com.cn> 教学资源网站,可陆续获得纸介质教材以外的资源。这些资源包括网络课程,电子教案和电子课件,教学案例等等;第四,在教材质量上做了很多努力,以期达到优秀教材的标准:在思想水平上,主要使教材更加体现职业教育的特点,在科学水平上,体现知识的正确性和内容的先进性,在教学水平上,体现教学适用性、知识实用性、结构合理性和使用灵活性。

相信本教学参考书一定能够为广大教师的教学活动提供优质的服务。

## 修订版前言

中等职业教育国家规划教材《数学》(基础版)第一册已根据需要进行修订。根据教材的修订情况,我们对与教材配套的数学教学参考书也进行了相应的修订,从而与教材保持一致,使教师们理解教材的修订理念,以利于教师们更加有效地开展教学活动。使用好本教学参考书,必须首先了解教材的修订情况:

第一版教材已经使用了几十年,在这期间,中等职业教育发生了很大变化:(1)生源状况有了很大的变化;(2)“以服务为宗旨,以就业为导向,以能力为本位”已成为职业教育的共识;(3)经过大量的调查、研讨,教师们在对第一版的国家规划教材给予充分肯定的同时,也提出了很多宝贵意见。为更好地服务于中等职业教育,高等教育出版社决定对第一版国家规划教材《数学》(基础版)进行修订。

教材修订版在保持第一版教材风格的基础上,着重从五个方面进行修订:

### 一、与学生的实际状况相衔接

针对当前中等职业学校学生的实际状况,我们采取了两种方法。一是把所有学生必须学习的内容(必学内容)进一步降低难度,删去了一些内容,把一些内容转成选学内容或阅读材料;删去了练习题和复习题中A组的一些题,对于B组题作了大幅度删减,从而减轻学生学习的负担。比如,一些特殊的集合符号不过早出现,而是在需要用时说明一下即可;第3章中删去了原3.6节“函数的平均变化率”;3.1节把有关满射、单射、双射的内容放在了本节的阅读材料中;3.4节删去了递增、递减和单调函数几个概

念;4.5节(原4.6节)删去了复利问题的内容,把关于无理数 $e$ 的介绍作为阅读材料。更加具体详细的修改情况,请查看修订版教材的“修订版前言”。二是由本书主编另外编写了一本《初中数学知识补习课本》,供初中数学基础不太好的学生在学习修订版教材时根据需要补习。两本书配合使用,效果更佳。《初中数学知识补习课本》的前言中列有表格说明如何配合使用。

## 二、与专业课相衔接,与实际相结合

为此,从专业课角度编选一些实际问题,还编写了一些数学在各类专业课中的应用的题目,目的都是为了达到数学与专业知识的零距离衔接。这些内容放在网络上供不同专业选用。

## 三、本教材配有学习卡,为教师和学生提供增值服务

这是本次修订的一大特色。凭借学习卡上的卡号和密码登录高等教育出版社的“<http://sve.hep.com.cn>”教学资源网站,可陆续获得下列各种资源:

(1) 虚拟课堂在线学习。包括网络课程“数学(基础版)”及相关的作业系统、答疑系统、交流讨论系统。

(2) 配有多媒体课件和模拟仿真动画,将对数学的教学起到积极的促进作用,有助于学生对抽象概念的理解。

(3) 电子教案和电子课件。以滚动方式上网,与教学同步,教师可随时上网下载,根据需要用于自己的教学实践当中。今后,对每一教学知识内容或知识点,都将提供两到三种教学方案,供不同地区、不同类别的学校选择使用。

(4) 全国数学教学大赛优秀教学案例录像片段,并在今后陆续提供专家点评意见。

(5) 优秀活动课教学案例。为教师提供新颖活泼的教学形式。

(6) 特别是数学与生产实际的联系,与专业课的衔接,将会在教学资源网上与广大教师共同开发研讨交流,并同时为广大教师服务。

#### 四、本次修订在教材质量上做了很多努力,以期达到优秀教材的标准

(1) 在思想水平上,主要体现在职业教育性方面。本教材的修订力图使之更加适合职业教育的特点。

(2) 在科学水平上,主要体现在知识正确性和内容先进性方面。这两方面,第一版已经做得很好,修订后更加完善。比如,没有科学性错误,基本概念与原理的叙述正确无误,科学事实与社会现象描述清楚,引用的数据、图表等材料可靠。

(3) 在教学水平上,力图使教材在教学适用性、知识实用性、结构合理性和使用灵活性等方面达到较高的水平。

#### 五、从版式方面,力求图文并茂,以增加学生学习的兴趣

修订后的教材更加适应职业教育培养目标的要求,更有生命力,更能为师生所接受。

下面按章节给出教材的一些具体特色:

第1章讲集合和逻辑用语,这些是数学中经常使用的基本用语。不等式的解集,函数的定义域、陪域,平面(看成点的集合),样本空间等都需要用到集合的概念。命题,必要条件,充分条件,充分必要条件,等价这些概念频繁地在数学中出现、了解什么是必要条件,什么是充分条件,什么是充分必要条件,什么是等价的命题,这是学好数学的基础。我们编写的第1章有如下一些主要特色:

(1) 以一个小短剧让学生理解复合命题“如果…,那么…”的真值表;并且指出:从 $p \rightarrow q$ 的真值表看到, $p$ 为假时, $p \rightarrow q$ 总是为真,因此对于含有字母的陈述句,只要讨论字母取的值使前件 $p$ 为真时,后件是否为真,就可判断 $p \rightarrow q$ 是否为真。如果字母取的使前件 $p$ 为真的一切值,都有后件 $q$ 为真,那么 $p \rightarrow q$ 为真;如果字母取的某一个值使前件 $p$ 为真,而后件 $q$ 为假,那么 $p \rightarrow q$ 为假。数学中通常的证明都是从前件 $p$ 为真出发,通过讲道理得出后件 $q$ 为真,从而判断复合命题 $p \rightarrow q$ 为真。数学中的举反例是找出一个

使前件  $p$  为真而后件  $q$  为假的例子,从而判断复合命题  $p \rightarrow q$  为假。顺便指出:当我们举了一个反例,判断  $p \rightarrow q$  为假时,不要就此停止,有可能的话,可以进一步探讨对于前件  $p$  作怎样修改,才能使后件  $q$  为真?

(2) 让学生观察“进入小圆圈的必经之路是什么”,引出必要条件的概念。由此抽象出:当  $p \rightarrow q$  为真时,称后件  $q$  是前件  $p$  的必要条件,称前件  $p$  是后件  $q$  的充分条件。特别地,当  $p \Rightarrow q$  时, $q$  是  $p$  的必要条件, $p$  是  $q$  的充分条件。

(3) 用“上楼或下楼”与“走楼梯”等价这样的生活中例子引出等价的概念,由此抽象出:当  $p \rightarrow q$  与  $q \rightarrow p$  都为真时,称  $p$  与  $q$  等价,记作  $p \Leftrightarrow q$ 。接着由等价的概念引出充分必要条件的概念,并且指出:“ $p \Leftrightarrow q$ ”,“ $p$  的充分必要条件是  $q$ ”,“ $p$  当且仅当  $q$ ”这三句话表达的是同一个意思。特别地,当  $p \Rightarrow q$  且  $q \Rightarrow p$  时,有  $p \Leftrightarrow q$ 。从而证明“ $p$  的充分必要条件是  $q$ ”的常用方法是:分别去证  $p \Rightarrow q$  (这是必要性)和  $q \Rightarrow p$  (这是充分性)。

(4) 我们在教材中还指出:等价具有传递性,即若  $p \Leftrightarrow q$  且  $q \Leftrightarrow r$ ,则  $p \Leftrightarrow r$ ;两个命题等价当且仅当它们的真值相同。这两条结合使用,可以简洁且严谨地解方程、解不等式、求函数的定义域以及证明一些命题。

(5) 在讨论四种命题的真值之间的关系时,我们在真值表中只列出“ $p \rightarrow q$ ”和“非  $q \rightarrow$  非  $p$ ”的真值,由此看出“ $p \rightarrow q$ ”与“非  $q \rightarrow$  非  $p$ ”的真值相同。接着把这个结果应用到命题“ $q \rightarrow p$ ”上,就可以立即得出:“ $q \rightarrow p$ ”与“非  $p \rightarrow$  非  $q$ ”的真值相同。由此得出:原命题“ $p \rightarrow q$ ”与逆否命题“非  $q \rightarrow$  非  $p$ ”等价;逆命题“ $q \rightarrow p$ ”与否命题“非  $p \rightarrow$  非  $q$ ”等价。无需在真值表中列出“ $q \rightarrow p$ ”与“非  $p \rightarrow$  非  $q$ ”的真值,节省了工作量。

第2章讲不等式的性质,不等式的解法和不等式的证明(不等式的证明是选学内容)。这些都是数学的基础内容,我们编写



的第2章有如下一些主要特色:

基心(1) 我们利用实数集有正性(即正数大于零、负数小于零)和减法运算,在实数集中定义“大于”(“小于”)关系:如果  $a - b > 0$ , 那么称  $a$  大于  $b$ (或者称  $b$  小于  $a$ )。这个定义表明,对于任意实数  $a, b$ , 有

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0,$$

从而有一系列干仗:  $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$ 。

我们是利用实数集的内性质,不是用数轴上的点的位置关系来定义“大于”(“小于”)关系的,在实数集中定义了大于关系(或小于关系)后,就有了序。我们用上述定义证明了大于关系的三条基本性质:传递性;加法运算保序;用正数去乘时保序,用负数去乘时反序。利用这三条基本性质证明了三个推论。对于小于关系有类似的结论。

推知(2) 我们把解一元二次不等式的分解因式法放在第2章讲,而把图像法放在第3章复习完一元二次函数后才讲。这有三个好处:分解因式法对于绝大多数学生容易理解,而图像法可能有一部分学生不太容易理解;讲分解因式法可以为解线性分式不等式作铺垫,因为它们分别利用了同号两数相乘(除)得正数,异号两数相乘(除)得负数,解法很类似;我们用等价的术语来书写分解因式法的求解过程正好可以作为等价具有传递性,等价的命题其真值相同,求交集,求并集的应用。

推去(3) 我们让学生观察数轴上的点与原点的距离得出解含有绝对值的不等式的依据,抓住了关键所在。

第3,4,5,6章是属于函数模块。第3章讲函数的概念和性质,第4章讲幂函数,指数函数和对数函数,第5章讲三角函数,第6章讲数列(数列可以看成定义域为  $\mathbf{N}^*$  或  $\mathbf{N}^*$  的子集的函数)。

击: 第3章是函数模块的基础。我们编写的第3章有如下一些主要特色:

(1) 工业革命时代,函数的概念是数学的基本概念之一。当今信息时代,虽然函数仍是十分重要的概念,但是映射成为更加基本的概念,函数是陪域为数集的映射。我们在函数模块中,以映射的概念作为基础,可以更深刻更简明地理解函数的概念、函数的性质以及各类函数的概念和性质。

(2) 我们用分配座位和分配宿舍这两个为学生所熟悉的例子引出映射的概念,并且抓住了映射概念的实质是:对于第一个集合(称为定义域)中每一个元素,都有第二个集合(称为陪域)中唯一确定的元素与它对应。

(3) 我们把“函数是数集到数集的映射”扩展为:“任意一个非空集合到数集的映射都叫做函数”,这是当今信息时代的要求。例如,在数字通信中,为了把电磁波的信号转换成数字信号,就要在下述两个集合:

$$A = \{\text{电位高, 电位低}\}, B = \{0, 1\}$$

之间建立一个映射 $f$ :电位高对应到1,电位低对应到0。这个映射 $f$ 是集合 $A$ 上的一个函数。另一个例子是每一个学生对应到他(她)的学号(详见教材第一册修订版)。在这两个例子中,定义域都不是数集,而陪域都是数集,这样的映射都是函数。

(4) 映射的概念包含三个要素:定义域,陪域,对应法则。因此两个映射相等的定义是:它们的定义域相等,陪域相等,并且对应法则相同。从而两个函数相等应当具备三个条件:它们的定义域相等,陪域相等,并且对应法则相同。我们在教材第3章3.2节的阅读材料中举了两个函数的例子,它们的定义域相等,对应法则相同,但是陪域不相等,因此它们是不相等的函数。事实也的确是这,它们其中一个不是满射,另一个是满射,它们当然不相等。

(5) 我们在表示函数的公式法中举了一个例子,它是来自组合设计与现代通信和密码。我们在教材中举一些信息时代的例子,使教材能透出信息时代的一些气息。我们在教材中还指出:在用公式法表示定义域为数集的函数时,如果没有标明定义域,那么

我们约定:函数 $f(x)$ 的定义域是指所有使解析式有意义(即,在解析式给出的对应法则下有像)的实数 $x$ 组成的集合。我们在这句话的括号里解释了“使解析式有意义”的确切含义。例如,求函数 $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ 的定义域, $f(x)$ 是分式函数, $x$ 没有像当且仅当 $x-3=0$ ,即 $x=3$ 。因此 $f(x)$ 的解析式有意义当且仅当 $x-3 \neq 0$ ,即 $x \neq 3$ 。从而 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ 。通常的说法是:分式 $\frac{x+1}{x-3}$ 在 $x=3$ 时没有意义。这种说法是不确切的。分式的定义应当是:设 $f(x), g(x)$ 都是多项式,且 $g(x)$ 不是零多项式,则表达式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 称为分式。由于 $x-3$ 不是零多项式,因此 $\frac{x+1}{x-3}$ 是一个分式,从而它是有意义的,不能说它在 $x=3$ 时没有意义。准确的说法是:分式函数 $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ 当 $x=3$ 时没有函数值(或 $x=3$ 时没有像)。此时习惯上称为分式函数 $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ 的解析式当 $x=3$ 时没有意义。在这里我们区分了“分式”与“分式函数”这两个不同的概念。这样的区分是必要的,就像应当区分“一元多项式”与“一元多项式函数”这两个不同的概念一样,前者指表达式,后者指映射。为什么要作这样的区分,有兴趣的读者可以参看《高等代数(下册)》(丘维声编著,高等教育出版社1996年出版)的第七章第6节和第14节。上面关于分式和分式函数这一段话是给教师写的,不用给学生讲。写这段话的目的是让教师开阔视野,对数学中的一些概念能准确地理解,提高数学素养。

(6) 我们在教材中给函数的图像下了一个定义。根据这个定义立即得出:设函数 $f(x)$ 的定义域为 $A$ ,则点 $M(a, b)$ 在 $f(x)$ 的图像上的充分必要条件是: $a \in A$ ,且 $b=f(a)$ 。这个结论十分重要,是研究函数的根基之一,在函数模块中多次使用了这一结论。

(7) 我们让学生观察自动温度记录仪描出的某一天气温随时

间变化的图像,有两个目的:既引出函数在某个区间上是增函数或减函数的概念,又让学生会从图像上看出函数在哪个区间上是增函数,在哪个区间上是减函数?需要注意的是:只有正确地画出的函数的图像,我们才能从图像上看这个函数在哪个区间上是增函数,在哪个区间上是减函数。如果在画图像时默认了函数的单调性,用一条光谱曲线联结描出的各点,然后又让学生从图像上看出这个函数的单调性,那是不对的。正确的做法应当如下:例如,对于反比例函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ ,我们应当先用定义证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数,然后才能用一条光谱曲线联结描出的各点(它们都在第一象限);接着利用 $f(x) = \frac{1}{x}$ 是奇函数,它的图像关于原点对称,画出 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 这一段的图像,此时才可以从这一段图像看出 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数。这是把定义法与图像法有机地结合起来使用,既严谨又简明。

(8) 我们在阐述偶函数和奇函数的定义和性质上有创新。我们抓住了讨论函数奇偶性的实质是研究函数图像的对称性,因此我们先复习图形关于直线对称的概念,然后探索函数 $f(x)$ 的图像在什么条件下关于 $y$ 轴对称?运用点 $M(a, b)$ 在 $f(x)$ 的图像上的充分必要条件,作如下的推导:

定义域为 $A$ 的函数 $f(x)$ 的图像 $E$ 关于 $y$ 轴对称

$\Leftrightarrow E$ 上每一点 $P(a, f(a))$ 关于 $y$ 轴的对称点

$Q(-a, f(a))$ 仍在 $E$ 上

$\Leftrightarrow -a \in A$ , 且 $f(a) = f(-a)$ , 对一切 $a \in A$ 。

由此引出偶函数的定义,并且证明了偶函数的图像关于 $y$ 轴对称,达到一箭双雕的效果。对于奇函数的定义和性质的讨论方法类似。

(9) 我们在阐述反函数的概念和求法上有创新。我们让学生

观察  $y=3x$  与  $y=\frac{1}{3}x$  的对应法则之间的关系,抽象出反函数的概念。这样可以使学生理解反函数概念的实质;并且立即得出函数  $y=f(x)$  与它的反函数  $y=f^{-1}(x)$  在定义域,值域和对应法则这三方面之间的关系,我们给出的求反函数的方法是科学的,严谨的,我们利用点  $M(a,b)$  在函数  $f(x)$  的图像上的充分必要条件,简洁地证明了函数  $y=f(x)$  的图像与它的反函数  $y=f^{-1}(x)$  的图像关于直线  $y=x$  对称。

(10) 在研究二次函数的图像的对称轴,研究正弦型函数  $y=Asin(\omega x+\varphi)$  的图像中,都需要用到平移。因此我们把平移放在第3章来讲。我们在教材中关于平移的概念讲了两段话:

“直观地说:把平面上(或者空间里)每一个点按照同一个方向移动相同的距离,叫做平面(或者空间)的一个平移。”

“平面(或者空间)的一个平移的实质是:平面上(或者空间里)所有的点组成的集合到自身的一个映射,使得任意一个点  $p$  的象  $p'$  满足:点  $p$  到点  $p'$  的方向是指定的方向,并且点  $p$  与点  $p'$  的距离等于给定的长度。”

第一段话是为了便于让学生直观地了解平移的概念,第二段话阐明了平移概念的实质是平面(或者空间)到自身的一种映射,用映射的观点阐述平移的概念,才能推导出平移的性质(例如,平移保持轴对称性等)。用映射的观点阐明平移的实质,还可以消除人们对于“平面上每一个点都在移动”所产生的困惑,实际上是平面上每一个点都有象。关于平移的概念以及平移的性质可以参看《解析几何(第二版)》(丘维声编,北京大学出版社1996年出版)的第六章的第1、2、4节。

我们用平移的概念和平移保持轴对称性这条性质,证明了一元二次函数  $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-3$  的图像有对称轴  $x=-1$ 。我们指出类似地可以证明  $y=a(x+d)^2+h(a\neq 0)$  的图像有对称轴  $x=$

-d。

(11) 一元二次函数的性质和图像虽然在初中教材中讲过,但是绝大多数教材都是在列表、描点之后,马上说用一条光滑曲线联结各点。然后让学生从图像上看出一元二次函数的图像有对称轴,以及单调区间。这种讲法是有毛病的,没有讨论函数的单调性,怎么知道可以用一条光滑曲线联结描出的各点呢?我们在教材中正确地讲解了一元二次函数的图像的画法。以  $y = \frac{1}{2}x^2 + x -$

$\frac{5}{2}$  为例子,先把解析式配方,得

$$y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3.$$

我们在平移那一节证明了这个函数的图像有对称轴  $x = -1$ 。因此只要先画出图像在直线  $x = -1$  的右边的一半,从而列表只要列出  $x = -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  处的函数值。描点之后,我们指出在 3.4 节的例 3 中证明了  $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$  在区间  $[-1, +\infty)$  上是增函数,因此可以用一条光滑曲线把描出的各点联结起来。最后利用对称性,画出图像在直线  $x = -1$  的左边的一半。这时从左边一半的图像看出,  $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$  在区间  $(-\infty, -1]$  上是减函数;从整个图像上看出,此函数在顶点(图像与对称轴的交点)的横坐标处达到最小值。我们这样讲  $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$  的图像的画法和它的性质既科学又简明。

(12) 我们让学生思考:  $y = x^2 - x - 2$  的图像与  $x$  轴有几个交点? 它们的坐标是多少? 从图像看出: 图像上的点  $M(x, y)$  的纵坐标  $y$  何时大于 0, 何时小于 0? 从而得到解一元二次不等式的图像法。这样做可以使学生理解为什么可以利用一元二次函数的图像来解相应的一元二次不等式, 学生明白了其中的道理才能熟练

地掌握解一元二次不等式的图像法。我们用了几个具体例子呈现一元二次不等式的各种可能情形,这使学生容易学会用图像法解一元二次不等式。

我们还指出:由于同号两数相乘或相除时都得正数,异号两数相乘或相除时都得负数,因此我们可以把线性分式不等式转化成一元二次不等式(要注意 $x$ 取的值不能使分式的分母为0),然后用图像法解之。这样可以简捷地解线性分式不等式。

(13) 我们用摄氏温度与华氏温度的换算关系,引出待定系数法。

(14) 在函数的实际应用一节,我们通过奥运会早期撑杆跳高纪录的例子,阐述如何建立函数模型,如何正确使用所建立的函数模型。

第4章讲幂函数、指数函数、对数函数,有如下一些主要特色:

(1) 在复习了整数指数幂的定义和运算法则后,探索 $3^{\frac{1}{2}}$ 应当规定为多少?进而问 $a^{\frac{1}{n}}$ 应规定为多少?由此引出 $n$ 次方根的概念和 $n$ 次根式的概念,从整数指数幂的运算法则的推广,定义了分数指数幂:当 $m, n$ 都是正整数且 $n > 1$ 时,规定

$$a^{\frac{m}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m},$$

其中,当 $n$ 为偶数时, $a \geq 0$ ;当 $n$ 为奇数时, $a \in \mathbf{R}$ 。

当 $a \neq 0$ 时,还规定

$$a^{-\frac{m}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}},$$

其中,当 $n$ 为偶数时, $a > 0$ ;当 $n$ 为奇数时, $a \in \mathbf{R}^*$ ,这里用 $\mathbf{R}^*$ 表示由所有非零实数组成的集合。

我们指出,可以证明整数指数幂的运算法则对于有理数指数幂仍然成立,只要其中出现的每一个有理数指数幂都有意义。

我们还介绍了无理数指数幂的概念,指出可以证明:当 $a > 0$ ,  $b > 0$ 时,有理数指数幂的运算法则对于实数指数幂也成立。

(2) 根据整数指数幂、分数指数幂和无理数指数幂的定义,我们得出了幂函数在各种情形下的定义域(详见教材第一册修订版的4.3节),并且既科学又简明地研究了  $y = x^3$ ,  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ,  $y = x^{\frac{1}{2}}$ ,  $y = x^{-2}$  的图像和性质。

(3) 我们在讲指数函数  $f(x) = 2^x$  的性质和图像时,在列表、描点之后,先让学生观察描出的各点,猜想  $f(x) = 2^x$  的值域是正实数集  $\mathbf{R}^+$ ,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是增函数。然后指出:可以证明指数函数  $f(x) = 2^x$  的确具有这些性质,从而可以用一条光滑曲线把描出的各点联结起来,得到  $f(x) = 2^x$  的图像。这是按照数学的思维方式讲解指数函数  $f(x) = 2^x$  的性质和图像,使学生受到数学思维方式的熏陶。

我们利用点  $M(a, b)$  在函数  $f(x)$  的图像上的充分必要条件,简捷地证明了  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  的图像与  $f(x) = 2^x$  的图像关于  $y$  轴对称,从而利用对称性,从  $f(x) = 2^x$  的图像很容易地画出了  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  的图像。这时可以从  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  的图像看出  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  的性质。

类似地可以得出  $y = a^x$  分别在  $a > 1$  和  $0 < a < 1$  两种情形下的图像和性质。

(4) 我们把指数函数的应用明确地分成指数增长和指数衰减两类问题。

(5) 我们从实际例子引出对数的概念,并且从指数函数  $y = a^x$  的图像看出,对于每一个正实数  $N$ ,都存在以  $a$  为底  $N$  的对数  $b$ 。进而得出对数式与指数式之间的关系,我们利用这一关系,以及反函数的定义,简捷地证明了指数函数  $y = a^x$  (其中  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的反函数是  $y = \log_a x$ 。这样既引出了对数函数的概念,又证明了指数函数与对数函数互为反函数,达到一箭双雕的效果。利用对数



函数是指数函数的反函数,我们从  $y=2^x$  的图像,用折纸法画出了  $y=\log_2 x$  的图像。从  $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$  的图像,用折纸法画出了  $y=\log_{\frac{1}{2}} x$  的图像。然后从  $y=\log_2 x$  的图像和  $y=\log_{\frac{1}{2}} x$  的图像看出它们的性质,类似地得到  $y=\log_a x$  分别在  $a>1$  和  $0<a<1$  两种情形下的图像和性质。这是既科学又简明地得到了对数函数的图像和性质。

(6) 我们把对数函数的应用明确地分成倍增期和半衰期两类问题,介绍了如何利用放射性物质碳-14 的半衰期确定出土文物所在的年代。

第 5 章三角函数,有如下一些主要特色:

(1) 三角函数这一章的内容体系分成四部分:三角函数的概念和计算,三角函数的性质和图像,两角和与差的三角函数,三角函数的应用。

需要指出的是:诱导公式,两角和与差的三角函数公式虽然都是有关三角函数的公式,但是它们是两种不同类型的公式。诱导公式是为了计算任意角的三角函数值;而两角和与差的三角函数公式是研究三角函数与角的加法、减法运算之间的关系。

(2) 我们区分了角  $\alpha$  的正弦、余弦、正切与正弦函数、余弦函数、正切函数。前者指比值,后者指映射。我们是用映射的观点给出正弦函数、余弦函数、正切函数的定义的。

(3) 我们用单位圆来研究三角函数的性质,不需要正弦线、余弦线、正切线,这精简了内容。

(4) 关于诱导公式,我们只讲了  $\alpha+2k\pi$ ,  $-\alpha$ ,  $\pi+\alpha$ ,  $\pi-\alpha$  这四组诱导公式,把  $2\pi-\alpha$  的诱导公式作为思考题,无需讲  $\alpha+(2k+1)\pi$  的诱导公式,这精简了内容。

(5) 我们通过讨论  $f(x)=\sin x$  的周期性、奇偶性指出只要先画出  $f(x)=\sin x$  在  $[0,\pi]$  上的一段图像,对于这一段图像在列表、描点之后,讨论它的单调性,然后用一条光滑曲线联结描出的