



◎金星教育系列丛书 全心全意解疑解难◎

总主编/薛金星

中学教材全解

ZHONGXUE JIAOCAI
QUANJIE

八年级数学(下)

配套 *人民教育出版社* 实验教科书



YZLI0890161102



教材同步学习工具书

陕西出版集团 陕西人民教育出版社

◎金星教育系列丛书 全心全意解疑解难◎

中学教材全解

八年级数学（下）

配套人民教育出版社实验教科书

总主编 薛金星
本册主编 徐秀峰
副主编 孔令吉 杨洪泉



YZLI0890161102

陕西出版集团 陕西人民教育出版社



诚邀全国名师加盟

金星国际教育集团专注于少儿、小学、中学和大学教育类图书的研发策划与出版发行工作，现热诚邀请全国名师加盟“金星教育名师俱乐部”：每县拟选名师1人；俱乐部会员将成为本公司长期签约作者，稿酬从优，并可长期享受购书优惠、赠书和及时提供各类教学科研信息等服务。联系地址：山东省潍坊市安顺路4399号金星大厦 联系人：王老师 联系电话：0536-2228658 邮编：261021

恳请各位名师对我们研发、出版的图书提出各类修订建议，并提供相应的文字材料。我们将根据建议采用情况及时支付给您丰厚报酬。

诚征各位名师在教学过程中发现的好题、好方法、好教案、好学案等教学与考试研究成果，一旦采用，即付稿酬。

我们欢迎广大一线师生来信、来函、来电、上网与我们交流沟通，为确保交流顺畅，我们特设以下几个交流平台，供您选用：

图书邮购热线：010-61743009 61767818
图书邮购地址：北京市天通苑邮局6503信箱 邮购部(收) 邮政编码：102218
第一教育书店：<http://www.firstedubook.com>
<http://www.第一教育书店.中国>
第一教育书店-淘宝店：<http://shop58402493.taobao.com>
电子邮箱：book@jxedue.net
质量监督热线：0536-2223237
集团网站：<http://www.jxedue.net>
<http://www.金星教育.中国>
金星教学考试网：<http://www.jxjxks.com>
金星教育名师俱乐部：<http://ms.jxjxks.com>

图书在版编目(CIP)数据

中学教材全解：人教版·八年级数学·下 / 薛金星主编.
-6版. -西安：陕西人民教育出版社，2010.7

ISBN 978-7-5419-9170-7

I. ①中… II. ①薛… III. ①数学课-初中-教学参考资料 IV. ①G634
中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第135757号

中学教材全解·八年级数学(下)(人教实验版)

陕西出版集团 出版发行
陕西人民教育出版社

(陕西省西安市丈八五路58号)

各地书店经销 北京泽宇印刷有限公司

890×1240毫米 32开本 9.5印张 400千字

2010年7月第6版 2011年10月第7次修订 2011年10月第1次印刷

ISBN 978-7-5419-9170-7

定价：19.80元



目录 CONTENTS

第十六章 分 式	(1)	典型例题剖析	(32)
本章综合解说	(1)	中考考点对接	(36)
趣味情景导入	(1)	易误易辨析	(37)
本章内容概览	(1)	知能整合提升	(38)
本章学法点津	(2)	课后习题解析	(40)
16.1 分 式	(3)	本章大归纳	(42)
课程标准要求	(3)	基础知识疏理	(42)
相关知识链接	(3)	重点题型总结	(42)
教材内容全解	(3)	思想方法归纳	(45)
典型例题剖析	(7)	中考热点聚焦	(47)
中考考点对接	(10)	中考能力提升	(49)
易误易辨析	(11)	本章复习题解析	(51)
知能整合提升	(13)	第十七章 反比例函数	(53)
课后习题解析	(14)	本章综合解说	(53)
16.2 分式的运算	(15)	趣味情景导入	(53)
课程标准要求	(15)	本章内容概览	(53)
相关知识链接	(15)	本章学法点津	(54)
教材内容全解	(15)	17.1 反比例函数	(55)
典型例题剖析	(20)	17.1.1 反比例函数的意义	
中考考点对接	(23)	(55)
易误易辨析	(24)	课程标准要求	(55)
知能整合提升	(25)	相关知识链接	(55)
课后习题解析	(26)	教材内容全解	(55)
16.3 分式方程	(27)	典型例题剖析	(57)
课程标准要求	(27)	中考考点对接	(60)
相关知识链接	(28)	易误易辨析	(60)
教材内容全解	(28)	知能整合提升	(61)

课后习题解析	(63)	本章内容概览	(101)
17.1.2 反比例函数的图象和性质	(63)	本章学法点津	(102)
课程标准要求	(63)	18.1 勾股定理	(103)
相关知识链接	(63)	课程标准要求	(103)
教材内容全解	(63)	相关知识链接	(103)
典型例题剖析	(67)	教材内容全解	(103)
中考考点对接	(70)	典型例题剖析	(106)
易误易混辨析	(72)	中考考点对接	(112)
知能整合提升	(73)	易误易混辨析	(113)
课后习题解析	(75)	知能整合提升	(114)
17.2 实际问题与反比例函数	(77)	课后习题解析	(115)
课程标准要求	(77)	18.2 勾股定理的逆定理	(116)
相关知识链接	(77)	课程标准要求	(116)
教材内容全解	(78)	相关知识链接	(117)
典型例题剖析	(79)	教材内容全解	(117)
中考考点对接	(82)	典型例题剖析	(119)
易误易混辨析	(84)	中考考点对接	(122)
知能整合提升	(84)	易误易混辨析	(122)
课后习题解析	(86)	知能整合提升	(123)
本章大归纳	(88)	课后习题解析	(124)
基础知识疏理	(88)	本章大归纳	(125)
重点题型总结	(88)	基础知识疏理	(125)
思想方法归纳	(91)	重点题型总结	(125)
中考热点聚焦	(94)	思想方法归纳	(127)
中考能力提升	(97)	中考热点聚焦	(128)
本章复习题解析	(100)	中考能力提升	(130)
第十八章 勾股定理	(101)	本章复习题解析	(133)
本章综合解说	(101)	第十九章 四边形	(134)
趣味情景导入	(101)	本章综合解说	(134)
		趣味情景导入	(134)
		本章内容概览	(134)

本章学法点津	(135)	19.2.2 菱 形	(168)
19.1 平行四边形	(136)	课程标准要求	(168)
19.1.1 平行四边形的性质	(136)	相关知识链接	(168)
.....	(136)	教材内容全解	(168)
课程标准要求	(136)	典型例题剖析	(170)
相关知识链接	(136)	中考考点对接	(172)
教材内容全解	(136)	易误易混辨析	(173)
典型例题剖析	(139)	知能整合提升	(174)
中考考点对接	(142)	课后习题解析	(176)
易误易混辨析	(143)	19.2.3 正方形	(177)
知能整合提升	(144)	课程标准要求	(177)
课后习题解析	(145)	相关知识链接	(177)
19.1.2 平行四边形的判定	(146)	教材内容全解	(177)
.....	(146)	典型例题剖析	(180)
课程标准要求	(146)	中考考点对接	(183)
相关知识链接	(146)	易误易混辨析	(185)
教材内容全解	(146)	知能整合提升	(186)
典型例题剖析	(150)	课后习题解析	(187)
中考考点对接	(153)	19.3 梯 形	(189)
易误易混辨析	(154)	课程标准要求	(189)
知能整合提升	(155)	相关知识链接	(189)
课后习题解析	(156)	教材内容全解	(189)
19.2 特殊的平行四边形	(157)	典型例题剖析	(193)
19.2.1 矩 形	(157)	中考考点对接	(195)
课程标准要求	(157)	易误易混辨析	(196)
相关知识链接	(157)	知能整合提升	(197)
教材内容全解	(158)	课后习题解析	(199)
典型例题剖析	(160)	19.4 课题学习 重心	(200)
中考考点对接	(163)	课程标准要求	(200)
易误易混辨析	(164)	相关知识链接	(200)
知能整合提升	(165)	教材内容全解	(200)
课后习题解析	(167)	典型例题剖析	(202)

中考考点对接	(204)	相关知识链接	(239)
易误易混辨析	(204)	教材内容全解	(239)
知能整合提升	(205)	典型例题剖析	(242)
本章大归纳	(206)	中考考点对接	(244)
基础知识疏理	(206)	易误易混辨析	(246)
重点题型总结	(207)	知能整合提升	(246)
思想方法归纳	(211)	课后习题解析	(248)
中考热点聚焦	(213)	20.3 课题学习 体质健康测试	
中考能力提升	(217)	中的数据分析师	(249)
本章复习题解析	(219)	课程标准要求	(249)
第二十章 数据的分析	(221)	相关知识链接	(249)
本章综合解说	(221)	教材内容全解	(249)
趣味情景导入	(221)	典型例题剖析	(251)
本章内容概览	(221)	中考考点对接	(254)
本章学法点津	(222)	知能整合提升	(256)
20.1 数据的代表	(223)	本章大归纳	(258)
课程标准要求	(223)	基础知识疏理	(258)
相关知识链接	(223)	重点题型总结	(258)
教材内容全解	(223)	思想方法归纳	(261)
典型例题剖析	(228)	中考热点聚焦	(263)
中考考点对接	(231)	中考能力提升	(266)
易误易混辨析	(234)	本章复习题解析	(270)
知能整合提升	(235)	全书大归纳	(271)
课后习题解析	(237)	核心知识归纳	(271)
20.2 数据的波动	(239)	综合专题归纳	(278)
课程标准要求	(239)	高频考点归纳	(288)

第十六章

分式

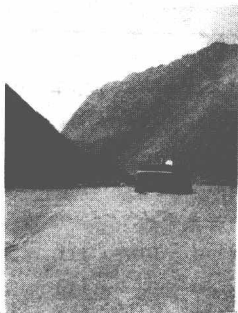
本章综合解说



趣味情景导入

QUWEIQINGJINGDAORU

设疑诱思,激发学习兴趣!



同学们!你们见过这么美丽的风景吗?你们能解决下面所给出的问题吗?



图 16-0-1

一艘轮船在静水中的最大航速为 20 千米/时,它沿江以最大航速顺流航行 100 千米所用的时间,与以最大航速逆流航行 60 千米所用的时间相等,江水的流速为多少?

这个问题并不难,相信你学完本章内容后,就会找到满意的答案.



本章内容概览

BENZHANGNEIRONGGAILAN

高屋建瓴,总揽知识体系!

分式是继整式之后的又一重要知识内容,它将已学过的分数、一元一次方程、整式方程巧妙地结合起来综合应用,不仅“承”前之所学,“启”后之所知,而且奠定了分式在初

教材
全解

中数学知识中的重要地位。

本章内容主要包括:分式的概念、分式的基本性质、分式的约分与通分、分式的运算、分式方程的概念及可化为一元一次方程的分式方程的解法及应用。

本章重点是分式的基本性质、运算及列分式方程解应用题。

本章难点是分式的混合运算及列分式方程解决实际问题。



本章学法点津

BENZHANGXUEFADIANJIN

智慧钥匙,开启思维之门!

1. 在本章学习中,需注意以下三个问题:

(1) 在理解分式的概念时,注意分数与分式的区别,以及分式在什么情况下有意义;

(2) 明确分式与整式的区别;

(3) 注意分式的基本性质以及约分、通分与相应的分数知识的联系。

2. 解分式方程时,体会化归思想的应用,分式方程一般要先化为整式方程再求解,并且要注意检验是必不可少的步骤。

3. 学习本章时,要注意新旧知识的联系,注重类比方法、转化思想、方程思想以及分类讨论思想的渗透。

16.1 分式



课程标准要求

KECHENGBIAOZHUNYAOQIU 小小罗盘, 导引学习方向!

1. 认识分式的概念和分式的基本性质.
2. 理解分式的意义及整式与分式的区别.
3. 掌握分式基本性质的应用, 掌握约分、通分的应用和最简分式、最简公分母的定义.



相关知识链接

XIANGGUANZHISHILIANJIE 课前准备, 奠定学习基础!

从整数扩充到分数, 数学发展了一大步; 用字母表示数, 是“算术”过渡到“代数”的标志, 从而把特殊的计算发展到一般意义的概括与推理, 引出了整式的运算.

问题是数学的心脏, 请看下列问题:

在某广场一角设置了一巨型广告牌(如图 16-1-1 所示), 已知该巨型广告牌的下部分为圆柱体, 如果圆柱的体积为 60 m^3 , 底面积为 6 m^2 , 那么它的高为多少? 如果该圆柱的体积为 $V \text{ m}^3$, 底面积为 $S \text{ m}^2$, 那么它的高为多少? 比较这两个结果, 从形式上看它们有什么不同? 通过本节的学习这个问题就很容易解决了.

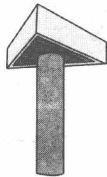


图 16-1-1



教材内容全解

JIAOCAINEIRONGQUANJIE 名师解析, 拨开眼前迷雾!

知能点 1 分式的概念

★一般地, 如果 A 、 B 表示两个整式, 并且 B 中含有字母, 那么式子 $\frac{A}{B}$ 叫做分式, 其中 A 叫做分式的分子, B 叫做分式的分母.

注意: (1) 对这一概念可类比分数的得出, 分式的形式和分数类似, 但它与分数有区别, 根本区别在于分式的分母中含有字母.

(2) 分式的分母表示除数, 由于除数不能为 0, 所以分式的分母不能为 0, 即当 $B \neq 0$ 时, 分式 $\frac{A}{B}$ 才有意义.

★分式与分数的区别与联系: 分式中含有字母, 由于字母可以表示不同的数, 所以分式比分数更具有一般性; 分数是分式中字母取特定值后的特殊情况.

例 1 在下列式子中哪些是整式, 哪些是分式?

$$-3x, \frac{x}{y}, \frac{x+y}{3\pi}, \frac{2}{3}x^2y, -7xy^2, -\frac{1}{8}x, \frac{3}{5+y}, \frac{x-y}{5}, \frac{a-1}{a}, -5, \frac{1}{y}+3.$$

分析: 判断一个式子是分式的条件: 分母中含有字母.

$$\text{解: 整式有 } -3x, \frac{x+y}{3\pi}, \frac{2}{3}x^2y, -7xy^2, -\frac{1}{8}x, \frac{x-y}{5}, -5.$$

$$\text{分式有 } \frac{x}{y}, \frac{3}{5+y}, \frac{a-1}{a}, \frac{1}{y}+3.$$

辨析

分式与整式的根本区别就是分式的分母中含有字母.分式有三个要素:(1)形如 $\frac{A}{B}$ 的式子;(2) A 、 B 为整式;(3)分母 B 中含有字母.三个条件缺一不可.本题应注意对 $\frac{x+y}{3\pi}$ 的判断,因为 π 是一个无理数,而不是字母,所以 $\frac{x+y}{3\pi}$ 是一个整式,这是解答本题的易错点.

知能点2 分式有意义、无意义的条件

★分式有意义的条件:分式的分母不等于0;

★分式无意义的条件:分式的分母等于0.

分式有无意义与分母有关,与分子无关.分式中分母是含字母的式子,它的值随着字母取值的不同而变化,当字母的取值使分母等于0时,分式就没有意义了.因此要确定分式是否有意义,就要分析、讨论分母中字母的取值,以避免分母的值为0.

例2 当 x 取什么值时,下列分式有意义?

(1) $\frac{x+1}{2x}$; (2) $\frac{2x+3}{3x-5}$; (3) $\frac{2}{|x|-1}$; (4) $\frac{x+2}{x^2+2}$.

分析:对于一个分式来说,当分母不等于0时,分式有意义.

解:(1)当 $2x \neq 0$,即 $x \neq 0$ 时,分式 $\frac{x+1}{2x}$ 有意义.

(2)当 $3x-5 \neq 0$,即 $x \neq \frac{5}{3}$ 时,分式 $\frac{2x+3}{3x-5}$ 有意义.

(3)当 $|x|-1 \neq 0$,即 $x \neq \pm 1$ 时,分式 $\frac{2}{|x|-1}$ 有意义.

(4)因为 x 无论取什么值, $x^2+2 > 0$,所以 x 取任何实数,分式 $\frac{x+2}{x^2+2}$ 都有意义.

辨析

由于分式的分母表示除数,而除数不能为0,所以分式的分母不能为0,即当 $B \neq 0$ 时分式 $\frac{A}{B}$ 才有意义,而当 $B=0$ 时分式 $\frac{A}{B}$ 无意义.

例3 当 a 取何值时,分式 $\frac{8a+1}{a-1}$ 无意义?

分析:当分式的分母为0时,分式无意义.

解:当 $a-1=0$,即 $a=1$ 时,分式 $\frac{8a+1}{a-1}$ 无意义.

警示

分式是否有意义关键是看分母是否等于0,等于0则无意义,反之则有意义.

知能点3 分式值为0的条件

分式值为0的条件:当分式的分子等于0且分母不等于0时,分式的值为0.

说明:分式的值是在分式有意义的前提下才可考虑的,所以使分式 $\frac{A}{B}$ 为0的条件是

$A=0$ 且 $B \neq 0$, 两者缺一不可.

例 4 当 x 取何值时, 下列分式的值为 0?

(1) $\frac{x+2}{2x-3}$; (2) $\frac{|x|-2}{x+2}$; (3) $\frac{x-3}{x^2-9}$.

分析: 分式值为 0 的条件是分子为 0 同时分母不为 0.

解: (1) 由 $\begin{cases} x+2=0, \\ 2x-3 \neq 0 \end{cases}$ 得 $x=-2$. \therefore 当 $x=-2$ 时, 分式 $\frac{x+2}{2x-3}$ 的值为 0.

(2) 由 $\begin{cases} |x|-2=0, \\ x+2 \neq 0 \end{cases}$ 得 $x=2$. \therefore 当 $x=2$ 时, 分式 $\frac{|x|-2}{x+2}$ 的值为 0.

(3) 由 $\begin{cases} x-3=0, \\ x^2-9 \neq 0 \end{cases}$ 无解, \therefore 没有使分式 $\frac{x-3}{x^2-9}$ 的值为 0 的 x .

警示

分式的值为 0 的条件是: 分子等于 0, 分母不等于 0, 二者缺一不可. 首先求出使分子为 0 的字母的值, 再检验这个字母的值是否使分母的值不为 0. 当分母的值不为 0 时, 就是所要求的字母的值.

知能点 4 分式的基本性质(重点)

★分式的基本性质是: 分式的分子与分母同乘(或除以)一个不等于 0 的整式, 分式的值不变. 用式子表示为 $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M}$, $\frac{A}{B} = \frac{A \div M}{B \div M}$ ($M \neq 0$), 其中 A, B, M 是整式.

注意: (1) “ M 是一个不等于 0 的整式” 是分式基本性质的一个制约条件. 如 $\frac{1}{2x-1} = \frac{2x+1}{4x^2-1}$, 其中必须满足 $2x+1 \neq 0$.

(2) 应用分式基本性质时, 要深刻理解“同”的含义, 避免犯只乘分子(或分母)的错误.

(3) 若分式的分子或分母是多项式, 运用分式的基本性质时, 要先用括号把分子或分母括上, 再乘或除以同一整式 M .

(4) 分式的基本性质是分式进行约分、通分和符号变化的依据.

例 5 写出下列等式中的未知的分子或分母.

(1) $\frac{18m^2n}{24mn^2} = \frac{3m}{(\quad)}$; (2) $\frac{a-b}{ab} = \frac{(\quad)}{a^2b}$; (3) $\frac{x^2-xy}{x^2} = \frac{x-y}{(\quad)}$.

解析: 填在括号里的式子, 必须使等式左右两边相等, 解题的关键是根据分式的基本性质, 从分子或分母的已知部分入手, 观察等号两边的分子或分母发生了怎样的变化. 在 (1) 中使分母除以 $6mn$ 得 $4n$; 在 (2) 中, 分子 $a-b$ 乘 a , 得 $(a-b)a = a^2-ab$; 在 (3) 中右边的分子 $x-y$ 就是左边的分子 x^2-xy 除以 x 得到的, 所以右边的分母应是左边的分母 x^2 除以 x 得 x . 答案: (1) $4n$; (2) a^2-ab ; (3) x

知能点 5 约分(重点)

和分数一样, 根据分式的基本性质, 约去分式的分子和分母中的公因式, 不改变分式的值, 这样的分式变形叫做分式的约分. 约分后分式的分子、分母中不再含有公因式, 这样的分式叫最简分式.

总结:(1)约分的依据是分式的基本性质: $\frac{A}{B} = \frac{A \div C}{B \div C}$ (其中 A, B, C 是整式,且 $C \neq 0$).

(2)约分的关键是找出分式中分子和分母的公因式.

(3)找公因式的方法:

①当分子、分母都是单项式时,先找分子、分母系数的最大公约数,再找相同字母的最低次幂,它们的积就是公因式;

②当分子、分母都是多项式时,先把多项式因式分解.

(4)约分时注意分式的分子、分母都是乘积形式才能进行约分;分子、分母是多项式时,通常将分子、分母分解因式,然后再约分.

(5)约分的结果是整式或最简分式.

例6 化简下列各式:(1) $\frac{5xy}{20y^2}$; (2) $\frac{x-y}{(x-y)^3}$; (3) $\frac{a^2-5a}{25-a^2}$.

分析:利用分式的基本性质,将分子、分母中的公因式约去.

$$\text{解: (1) } \frac{5xy}{20y^2} = \frac{5y \cdot x}{5y \cdot 4y} = \frac{x}{4y} \quad (2) \frac{x-y}{(x-y)^3} = \frac{(x-y) \cdot 1}{(x-y)(x-y)^2} = \frac{1}{(x-y)^2}$$

$$(3) \frac{a^2-5a}{25-a^2} = \frac{a(a-5)}{(5+a)(5-a)} = \frac{a(a-5)}{-(5+a)(a-5)} = -\frac{a}{5+a}$$

◀ ◀ 注意 ▶▶ ▶

约分时要注意以下问题:(1)如果分子、分母都是单项式,那么可直接约去分子、分母的公因式,也就是分子、分母系数的最大公约数与相同字母的最低次幂.

(2)如果分子、分母中至少有一个是多项式就先分解因式,然后找出它们的公因式,再约分.

(3)约分时一定要彻底,即约分的结果必须是最简分式或整式.

知能点6 通分(难点)

★把几个异分母分式化成相同分母的分式,这样的分式变形叫做分式的通分.也就是利用分式的基本性质,使分子和分母同乘适当的整式,不改变分式的值.

通分应注意以下几个问题:(1)通分的方法是先求各分式的最简公分母,然后用这个最简公分母除以分式的分母,用所得的商去乘分式的分子;(2)通分的依据是分式的基本性质;(3)通分的关键是确定几个分式的最简公分母;(4)最简公分母:几个分式通分时,通常取各分母所有因式的最高次幂的积作为公分母,这样的分母叫做最简公分母;(5)如果分母是多项式,一般应先分解因式.

★确定最简公分母的方法:

(1)取各分母系数的最小公倍数;(2)凡单独出现的字母连同它的指数作为最简公分母的一个因式;(3)相同字母的指数取次数最高的.这样得到的因式的积就是最简公分母.

例7 通分:(1) $\frac{2a}{b}, \frac{c}{ab}, \frac{x}{2ab}$; (2) $\frac{a}{x-y}, \frac{b}{3y-3x}, \frac{c}{x^2-2xy+y^2}$.

分析:(1)最简公分母是 $2ab$; (2)先分解因式,再确定最简公分母为 $3(x-y)^2$.

解:(1)∴ 最简公分母是 $2ab$.

$$\therefore \frac{2a}{b} = \frac{2a \cdot 2a}{b \cdot 2a} = \frac{4a^2}{2ab}, \frac{c}{ab} = \frac{c \cdot 2}{ab \cdot 2} = \frac{2c}{2ab}, \frac{x}{2ab} = \frac{x}{2ab}$$

$$(2) \because \text{最简公分母为 } 3(x-y)^2, \therefore \frac{a}{x-y} = \frac{a \cdot 3(x-y)}{(x-y) \cdot 3(x-y)} = \frac{3a(x-y)}{3(x-y)^2},$$

$$\frac{b}{3y-3x} = -\frac{b}{3(x-y)} = -\frac{b \cdot (x-y)}{3(x-y)(x-y)} = -\frac{b(x-y)}{3(x-y)^2},$$

$$\frac{c}{x^2-2xy+y^2} = \frac{c}{(x-y)^2} = \frac{c \cdot 3}{(x-y)^2 \cdot 3} = \frac{3c}{3(x-y)^2}.$$

警示

(1) 通分的关键是确定几个分式的最简公分母, 要防止遗漏只在一个分母中出现的字母以及符号的变化情况.

(2) 通分时确定了分母乘什么, 分子也必须随之乘什么.



全解小博士在线答疑

教材第 8 页“思考”

答案: 分数和分式在约分时都是设法约去分子和分母中的最大公约数或公因式, 分数或分式的值不变; 分数在通分时是先找出各分数的分母的最小公倍数作为它们的公分母, 而分式的通分也是先找出各分式的分母的最简公分母作为它们的公分母, 然后再进行通分, 这种做法的根据是分数或分式的基本性质.



典型例题剖析

DIANXINGLITIPOUXI 典题精析, 探究方法技巧!

题型一 分式有意义、无意义的条件与分式取值的考查

例 1 当 x 取何值时, 分式 $\frac{x^2-9}{(x-3)^2}$ (1) 有意义; (2) 无意义; (3) 值为 0.

分析: 分母不为零, 分式有意义; 分母为零, 分式无意义; 分式的值为零, 分式的分子为零且分母不为零.

解: (1) 要使分式有意义, 须满足 $(x-3)^2 \neq 0$, 即当 $x \neq 3$ 时, 分式 $\frac{x^2-9}{(x-3)^2}$ 有意义.

(2) 要使分式无意义, 须满足 $(x-3)^2 = 0$, 即当 $x = 3$ 时, 分式 $\frac{x^2-9}{(x-3)^2}$ 无意义.

(3) 要使分式的值为零, 须满足 $\begin{cases} x^2-9=0, \\ (x-3)^2 \neq 0, \end{cases}$ 即当 $x = -3$ 时, 分式 $\frac{x^2-9}{(x-3)^2}$ 的值为零.

警示

要求分式的值为零时的未知数的值时, 使分子为零, 但必须同时保证分母不为零, 即要在分式有意义的前提下求值.

例 2 已知分式 $\frac{x-3}{x+2}$ 的值为负数, 求 x 的取值范围.

分析: 若 $\frac{x-3}{x+2}$ 的值为负数, 则 $x-3$ 和 $x+2$ 的符号相反, 因此得到 $\begin{cases} x-3 < 0, \\ x+2 > 0 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} x-3 > 0, \\ x+2 < 0 \end{cases}$ 两个不等式组, 它们的解就是所求的 x 的取值范围.

解: 由题意, 得 (1) $\begin{cases} x-3 < 0, \\ x+2 > 0 \end{cases}$ 或 (2) $\begin{cases} x-3 > 0, \\ x+2 < 0, \end{cases}$ 解不等式组 (1), 得 $-2 < x < 3$, 不等式组 (2) 无解. 所以 x 的取值范围是 $-2 < x < 3$.

方法

若分式的值为负, 则分子、分母异号; 若分式的值为正, 则分子、分母同号. 这样就转化为解不等式组的问题了.

题型二 分式基本性质的应用

例 3 把分式 $\frac{2a}{a-b}$ 中的 a 和 b 都变为原来的 n 倍, 那么该分式的值()

- A. 变为原来的 n 倍 B. 变为原来的 $2n$ 倍
C. 不变 D. 变为原来的 $4n$ 倍

解析: 当 a 与 b 的值分别变为原来的 n 倍时, 分子变为 $2na$, 分子的值变为原来的 n 倍, 分母变为 $na-nb=n(a-b)$, 分母的值也变为原来的 n 倍, 此时分式变为 $\frac{2na}{n(a-b)}$, 而 $\frac{2na}{n(a-b)} = \frac{2a}{a-b}$, 即原分式的值不变. 答案: C

点拨 DIANBO

此题考查了分式的基本性质: 若分式的分子和分母都变为原来的 n 倍, 则分式的值不变.

例 4 不改变分式的值, 将下列各分式的分子与分母中各项系数化为整数.

(1) $\frac{0.03x-0.2y}{0.08x-0.5y}$; (2) $\frac{\frac{m}{2} + \frac{n}{3}}{\frac{2m}{5} - \frac{2n}{3}}$.

分析: 解题的关键是确定分子、分母所乘的倍数.

解: (1) $\frac{0.03x-0.2y}{0.08x-0.5y} = \frac{(0.03x-0.2y) \times 100}{(0.08x-0.5y) \times 100} = \frac{3x-20y}{8x-50y}$;

(2) $\frac{\frac{m}{2} + \frac{n}{3}}{\frac{2m}{5} - \frac{2n}{3}} = \frac{\left(\frac{m}{2} + \frac{n}{3}\right) \times 30}{\left(\frac{2m}{5} - \frac{2n}{3}\right) \times 30} = \frac{15m+10n}{12m-20n}$.

方法

要使分式的分子与分母中各项系数为整数, 只需将分式的分子、分母同时乘各个分子、分母系数的分母的公倍数, 但在实际运算时往往将分式的分子、分母都乘同一个最小公倍数, 就可以将分式的分子与分母的各项系数化为整数, 且使这个分式的值不变.

题型三 分式在生活中的应用

例 5 甲、乙两人分别从两地同时出发, 若相向而行, 则 a 小时后相遇; 若同向而行,

则 b 小时后甲追上乙, 则甲的速度是乙的速度的()

A. $\frac{a+b}{a}$ 倍

B. $\frac{b}{a+b}$ 倍

C. $\frac{a+b}{b-a}$ 倍

D. $\frac{b-a}{b+a}$ 倍

解析: 先设出两地距离和两人速度, 再根据行程问题中的等量关系列出方程组.

设甲、乙两人开始时相距 s 千米, 甲的速度为 v_1 , 乙的速度为 v_2 , 则由题意列方程组得

$$\begin{cases} s = a(v_1 + v_2), \\ s = b(v_1 - v_2), \end{cases} \text{ 则有 } a(v_1 + v_2) = b(v_1 - v_2), \text{ 整理得 } (a+b)v_2 = (b-a)v_1, \therefore \frac{v_1}{v_2} = \frac{a+b}{b-a}.$$

答案: C

点拨 DIANBO

本题巧妙地利用辅助未知数(参数)使问题得到了解决.

题型四 分式的约分在新信息题目中的应用

例 6 “!”是一种数学运算符号, $1! = 1, 2! = 2 \times 1, 3! = 3 \times 2 \times 1, 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1, \dots$, 请你计算 $\frac{(n+1)!}{n!}$ 等于多少?

分析: 把 $(n+1)!$ 与 $n!$ 写成乘积的形式, 再约分化简.

$$\text{解: } \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = n+1.$$

点拨 DIANBO

由题中给出的信息可知 $n!$ 就是从 1 到 n 的连续自然数相乘的积, 由此, 可写出 $(n+1)!$ 和 $n!$, 再约分即可得到结果. 理解运算符号“!”的意义是解题的关键.

题型五 字母取值对分式值的影响

例 7 (1) 当 x _____ 时, 分式 $\frac{1}{x+2}$ 的值为正;

(2) 当 x _____ 时, 分式 $\frac{1-x}{x^2+1}$ 的值为负;

(3) 当 x _____ 时, 分式 $\frac{x+2}{|x|-2}$ 的值为 -1.

解析: 第(1)题由题意得 $\frac{1}{x+2} > 0$, 根据实数的运算法则, 同号两数相除得正, 异号两数相除得负, 可知 $x+2$ 与 1 同号, $\therefore x+2 > 0, \therefore x > -2$.

第(2)题由题意得 $\frac{1-x}{x^2+1} < 0, \therefore x^2+1 > 0, \therefore 1-x < 0, \therefore x > 1$.

第(3)题由题意得 $\frac{x+2}{|x|-2} = -1, \therefore x+2$ 与 $|x|-2$ 互为相反数,

$$\therefore x+2 + |x|-2 = 0, \therefore |x| = -x, \therefore x \leq 0.$$

又 \because 分式要有意义, $\therefore |x|-2 \neq 0$, 即 $x \neq \pm 2. \therefore x \leq 0$ 且 $x \neq -2$.

答案: (1) > -2 ; (2) > 1 ; (3) ≤ 0 且 $x \neq -2$

点拨 DIANBO

当分子与分母同号时, 分式的值为正; 当分子与分母异号时, 分式的值为负; 当分式的分子、分母互为相反数时, 分式的值为 -1.

题型六 分式的化简求值

例 8 已知 $\frac{x}{y}=3$, 求 $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$ 的值.

分析: 先对分式的分子、分母分解因式后化简, 得出 x 与 y 之间关系的式子是关键.

解: 原式 $= \frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{x+y}{x-y}$.

方法 1: 由 $\frac{x}{y}=3$, 得 $x=3y$, 则原式 $= \frac{3y+y}{3y-y} = \frac{4y}{2y} = 2$.

方法 2: 原式 $= \frac{x+y}{x-y} = \frac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-1} = \frac{3+1}{3-1} = 2$.

规律

此类题目可以变形已知条件, 也可以变形所求的式子. 变形已知条件时, 使变形后得到的式子在所求的式子中用得上, 如方法 1; 变形所求的式子时, 应与已知条件有明显的关系, 利于直接代入, 如方法 2.



中考考点对接

ZHONGKAOKAODIANDUIJIE 真题剖析, 把握中考脉搏!

中考考点解读

分式及其基本性质是中考命题的重点, 题型多以选择题、填空题和解答题为主, 在今后的中考试题中, 分式及其性质仍然是必考内容, 特别是分式有意义的条件, 与前面学习的函数自变量的取值范围的综合题在中考试题中出现的频率仍将很大.

中考典题剖析

例 1 (2010·南京中考) 函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

解析: 由 $x-1 \neq 0$, 得 $x \neq 1$. 答案: $x \neq 1$

点拨 DIANBO

分式有意义的条件与求函数自变量的取值范围的综合题是中考的热点, 关键是要确保分母不为零.

例 2 (2011·天津中考) 若分式 $\frac{x^2-1}{x+1}$ 的值为 0, 则 x 的值等于_____.

解析: 令 $x^2-1=0$, 解得 $x = \pm 1$. $\because x+1 \neq 0, \therefore x \neq -1. \therefore x=1$. 答案: 1

点拨 DIANBO

此题考查求当分式的值为零时自变量 x 的值. 一定要注意求出的自变量 x 的值必须使分母不为零, 使分母等于零的值要舍掉.

本节内容与中考的联系

教材第 9 页习题 16.1 第 13 题 什么条件下, 下列分式的值为 0?

(1) $\frac{x-1}{x}$; (2) $\frac{5a-b}{a+b}$.