电磁场与电磁波

函授大学教材

电磁场与电磁波

华北电力学院　徐绳均 编

水利电力出版社

内 容 提 要

本书为函授大学用的电磁场与电磁波教材。它从物理概念及矢量场论两个方面，系统地分析阐述了各种静态场、时变场、电磁波与导行波的基本理论及分析计算方法。书中有大量例题、习题及测验作业题，每章并附有学习指导及思考题，便于学生理解较抽象的电磁理论。

本书可供通讯类专业本科函授师生使用，在简略部份内容后（带*号的内容）也可供电力及自动化类专业使用，并可供高等学校有关专业学生及工程技术人员参考。

序　　言

本书是参照高等学校工科电工教材编审委员会审订的“电磁场与电磁波”教学大纲及高等工业学校函授教学工作会议审订的“电工原理函授教学大纲（草案）”电磁场部份编写而成的成人教育教材，供本科通讯类专业试用。如略去带*号的内容，也可供电力及自动化类专业使用。

目前国内外有不少优秀的电磁场与电磁波、电磁场原理等教材。但成人教育学员因以自学为主，缺乏辅导条件，学习这些教材时往往感到有一定困难。本书目的是力求为他们提供一本便于自学的教材。希望学员在学完本课程以后，在电磁场与电磁波的基本概念及主要的分析计算方法方面，能打下较巩固的基础，以便后续专业课的学习。

本书是按学员已学完“高等数学”、“普通物理学”、“工程数学”（包括矢量分析与场论、复变函数、数理方程与特殊函数）及“电路原理”的基础上编写的。在本书中，对常用到的数学工具，编写了矢量分析与场论、贝塞尔函数二个附录，以备复习及查考。部份院校将均匀传输线理论放在电磁场与电磁波课程中学习，现将这一部份也编成一个附录，供复习及讲授时参考。各向异性媒质中的电磁波，也编为一个附录。

为便于学员自学起见，本书按函授教材体例编写。每章前面的学习指导侧重介绍本章基本理论及分析问题的思路逻辑，而在每章最后则用小结概括本章所涉及的基本概念。书中附有较多的示例及习题，以便学生掌握所学的知识，并锻炼分析、解决问题的能力。在每章末尾还有测验作业，以便学员检查自己掌握的程度。此外，为醒目起见，对书中较重要的公式，均用$\boxed{\quad\quad}$号括起，以便学员分清主次。部份带*的内容，可根据学时数情况取舍。

本书在编写中得到本院电工教研室许多同志的支持和协助，张金堂教授仔细审阅了全稿并提出许多宝贵意见，对此谨致以衷心的感谢。

由于编者水平所限，编写时间又比较仓促，书中错误不当之处，请广大读者批评指正。

编　者

1988年10月于华北电力学院

符 号 表

l, dl	长度	μ, μ_0	导磁率
$\boldsymbol{r}$, $d\boldsymbol{r}$, R, dR	距离	$\boldsymbol{m}$	磁偶极子磁矩
S, dS	面积	$\boldsymbol{M}$	磁化强度
V, dV	体积	G	电导
n, $\boldsymbol{n}$	法线方向	C	电容
t, $\boldsymbol{t}$	切线方向	L，M	自感，互感
$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{f}$	力	ν	导电率
$\boldsymbol{T}$	力矩	$\boldsymbol{p}$	坡印亭矢量
W, w	能量及能量密度	d	透入深度
Q, q	电荷量	Γ	传播常数
ρ	体电荷密度	α	衰减常数
σ	面电荷密度	β	相位常数
τ	线电荷密度	k	波数
U, u	电压	Z_c	特性阻抗，波阻抗
φ	电位，标量位	Z_i	入端阻抗
$\boldsymbol{E}$	电场强度	$\boldsymbol{v}$	速度
$\boldsymbol{D}$	电位移	f	频率
ε, ε_0	介电常数	ω	角频率
$\boldsymbol{p}_e$	电偶极子极矩	λ	波长
$\boldsymbol{P}$	极化强度	ρ	反射系数
χ_e, χ_m	电极化率，磁化率	$\boldsymbol{a}_x,\boldsymbol{a}_y,\boldsymbol{a}_z$	直角坐标系中的单位矢量
I, i	电流	r,α,z	柱坐标系坐标变量
$\boldsymbol{J}$	体电流密度	r,θ,α	球坐标系坐标变量
$\boldsymbol{J}_s$	面电流密度	$\boldsymbol{a}_R,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{a}_\theta,\boldsymbol{a}_\alpha,R,r,\theta,\alpha$	各方向单位矢量
$\boldsymbol{A}$	矢量磁位，矢位	$P(x,y,z)$	场点
φ_m	标量磁位	$P'(x',y',z')$	源点
$\boldsymbol{B}$	磁感应强度	∇	哈密顿算子
$\boldsymbol{H}$	磁场强度	$\nabla^2=\Delta$	拉普拉辛算子
Φ_E, Φ_m	电通量，磁通量		
Ψ	磁链		

目　　录

第一章 静　电　场

学 习 指 导

1.本章所研究的静电场，是一个能使静止带电物体受到作用力的空间，其中场源与电场量值分布，均不随时间变化。本章是学习电磁场与电磁波的基础。在本章中我们要建立起空间场的概念，并且逐步熟悉场分析研究的方法，即基于场论与矢量分析的各种计算方法。这些方法可通过类比、对偶等应用于其他各种场的分析。掌握了本章内容，就不会感到电磁场与电磁波抽象而难于理解，并为学习以后各章打好基础。

2.本章研究问题的思路是：

（ 1 ）首先是如何让我们知道这里有静电场，它的大小强弱如何度量，并由此引出电场强度这个静电场最基本的物理量的概念；

（ 2 ）在掌握场论的基本分析方法的基础上，对电场强度这个空间的矢量场进行分析，研究其散度和旋度，使场论的数学知识转化为电磁场的物理概念，然后进一步理解静电场的场源就是电荷；在此基础上，得到静电场的二个基本定律，即高斯散度定理和静电场的环路定律，以及场中位的基本方程，即泊松方程与拉普拉斯方程；

（ 3 ）研究当空间存在导体或不同的介质时，静电场将引起的变化，从而引进电位移、电位、介电强度等物理量。我们要理解各种物理量引入的必要性和它们与电场强度的联系，并且掌握在不同物质界面上静电场所起的变化，即静电场的边界条件；

（ 4 ）在掌握基本概念与分析方法的基础上，推出几种静电场中求电场强度及电位的实用方法，如直接积分法、镜像法、基于高斯定理的方法等，以及利用电场解算一些工程技术问题的方法，如求元件的电容、物体在电场中的受力、空间的电场蓄能量等；

（ 5 ）静电场的常用解法即边值问题的求解，我们将在第四章中讨论。但对与边值问题求解有关，又涉及到场与源关系的重要定理，即唯一性原理及亥姆霍兹定理的含义，应该有一个清晰的理解。

3.本章以及整个电磁场与电磁波课程，涉及到较多的数学工具。事先复习一下场论及矢量分析、空间多重积分、常微分及偏微分方程解法，并且熟悉一下笛卡尔坐标系、圆柱坐标系、球坐标系下的坐标变量、长度、面积、体积元的形式及积分方法是必要的。数学工具是分析求解时的必要工具，它不能代替物理概念本身，但不通过解算也不能使物理问题得到定量化的分析结果，学习电磁场时需要将二者很好地结合起来，既不能忽视数学分析及计算而把概念停留在一般化的认识上，也不能只重视运算方法而不注意弄清物理概念。对这两方面有所偏颇，往往是视学习电磁场与电磁波为畏途的重要原因。

4.学习时间安排意见：

学习指导、1-1～1-4　　　　6 小时

1-5～1-7	6 小时
1-8～1-9	6 小时
1-10～1-12	6 小时
测验作业、小结	6 小时

1-1 电场与电场强度

1.什么是电场？我们如何判断它的存在并且度量它的大小呢？如果我们将某个静止不变的微小电荷置于某个空间而它受到了力，我们就说这个空间中存在着电场。如果这个力的大小与方向都不随时间变化，我们就说这里存在一个静电场。这是本章研究的对象。

2.显然，电荷受力的大小可以作为电场强弱的一个度量。我们定义微小试验电荷在电场中一点上所受的力与该电荷量之比为该点的电场强度

$$\boldsymbol{E}=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta q}\qquad (\mathrm{N/C或V/m})\tag{1-1}$$

则实际上一个小电荷q在此点上的受力便为

$$\boxed{\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}\quad(\mathrm{N})}\tag{1-2}$$

因为力是矢量，所以电场强度也是矢量。它代表试验电荷所在点上单位正电荷所受力的大小和方向。它的单位是牛顿/库伦或伏/米，两者是等同的。

电场强度是代表静电场特性的最基本的物理量，人身在电场中有无危险、介质是否会击穿破坏、物体的受力等，都取决于电场强度。我们分析静电场的性质，就是要分析电场强度所服从的规律。

空间每点上的电场强度是一个客观存在的量，与我们是否去进行检测无关，因此也与检测所用的试验电荷大小无关。我们将试验电荷规定为一个微小的点电荷，是为了避免因它造成空间电荷量的重新分布，影响测试结果。

3.我们已经知道如何来判断空间是否存在电场了，下一步我们要问，电场是由什么东西产生的呢？我们先来分析一下二个点电荷之间的作用力。所谓点电荷是指带电荷物体的几何尺度远远小于它们间的距离，因而可以不考虑带电物体上的电荷分布状况，把电荷看成是集中于带电物体中心的一个点电荷。显然这是一个相对的概念，例如在研究太阳系内的电磁场时完全可以把地球看成一个点电荷，而在研究地球附近的场时就不能把它看成一个点电荷而必须考虑它的电荷分布。

人们早就熟知电荷可分为两类，同性电荷相斥，异性电荷相吸。1785年库仑把两个点电荷之间的作用力总结为一个实验定律，即库仑定律。库仑定律指出：两点电荷之间的作用力与两个电荷量之积成正比，与距离的平方成反比。如果以$\boldsymbol{F}_{12}$表示点电荷q_2受到的点电荷q_1的力，q_1为源点，如图1-1所示，则

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{12}=k\frac{q_1q_2}{R^2}\boldsymbol{a}_R=k\frac{q_1q_2}{R^3}\boldsymbol{R}\quad(\mathrm{N})}\tag{1-3}$$

式中　$\boldsymbol{R}$——源点指向场点即受力电荷所在点的距离矢量；

$\boldsymbol{a}_R$——$\boldsymbol{R}$方向的单位矢量，$\boldsymbol{a}_R=\dfrac{\boldsymbol{R}}{R}$。

当q_1、q_2为同号电荷时，$\boldsymbol{F}_{12}$与$\boldsymbol{a}_R$同向，q_2所受为斥力；反之则为吸力。

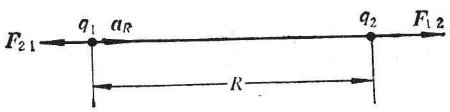

图 1-1　两点电荷间的作用力

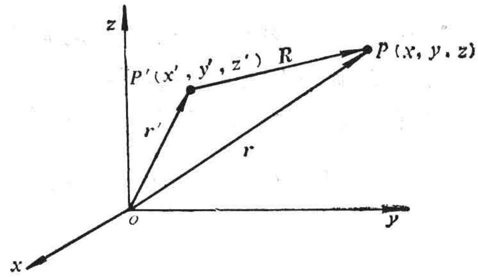

图 1-2　点电荷产生的电场强度

式（1-3）中的k为一常数，其大小及量纲取决于所采用的单位制。当采用国际单位制SI（见附录IV）时，在真空中

$$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

式中，$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}\approx\dfrac{1}{36\pi}\times10^{-9}$(F/m)，称为真空的介电常数或电容率。

在本章前五节中我们将只讨论真空中的静电场。

点电荷q_2的受力是从何而来的呢？按照场的概念，这是因为它处于电场中，这个电场是电荷q_1造成的。按照电场强度的定义，在所在点上点电荷q_2的受力为

$$\boldsymbol{F}=q_2\boldsymbol{E}_1$$

式中，E_1为点电荷q_1在q_2所在点上产生的电场强度。则从库仑定律可得

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0R^2}\boldsymbol{a}_R$$

或一般地讲，真空中点电荷源q在距离它R处一点上产生的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R^2}\boldsymbol{a}_R=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R^3}\boldsymbol{R}\qquad(1\text{-}4)$$

当点电荷q为正值时，电场强度与单位矢量$\boldsymbol{a}_R$同向，从源点指向场点；当q为负值时，电场强度与$\boldsymbol{a}_R$反向，从场点指向源点。

如果用矢径$\boldsymbol{r}$及$\boldsymbol{r}'$代表场点$P(x,\ y,\ z)$与源点$P'(x',\ y',\ z')$在空间的坐标位置，则源点至场点的距离矢量

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=R\boldsymbol{a}_R$$

距离值为

$$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

如图1-2所示。此时式（1-4）可改写为

$$\boxed{\boldsymbol{E}=\frac{q\boldsymbol{a}_R}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}=\frac{q(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}} \tag{1-5}$$

在直角坐标系中，上式可写为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q[(x-x')\boldsymbol{a}_x+(y-y')\boldsymbol{a}_y+(z-z')\boldsymbol{a}_z]}{4\pi\varepsilon_0[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} \tag{1-6}$$

式（1-5）告诉我们：产生电场的源是电荷，电荷与所产生场强间的关系是线性的。

4.因为场强与点源的关系是线性的，我们就可以利用叠加原理来计算多点源或分布电荷所产生的合成场强。在场源为离散的点源下，如图1-3所示，则合成场强为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots\cdots+\boldsymbol{E}_n=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i\boldsymbol{a}_{Ri}}{R_i^2}\right] \tag{1-7}$$

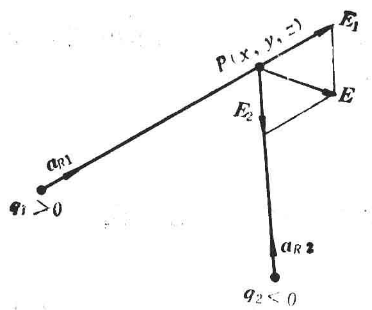

图 1-3　离散点电荷所产生的电场强度的合成

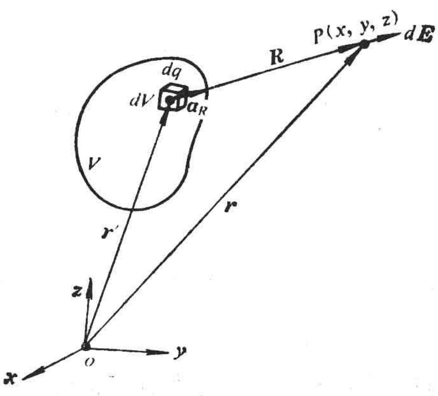

图 1-4　连续电荷分布所产生的电场

在场源为连续分布的电荷下，当电荷连续分布在体积V内时，电荷元为$dq=\rho dV$，它所产生的场强$d\boldsymbol{E}=\frac{\rho\boldsymbol{a}_R}{4\pi\varepsilon_0R^2}dV$，如图1-4所示，则场点总的电场强度为

$$\boxed{\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(x',y',z')\boldsymbol{a}_R dV}{R^2}} \tag{1-8}$$

式中，$\rho=\rho(x',y',z')$为体积元dV所在点的体电荷密度（C/m^3）。

当电荷连续分布在面S上时，电荷元为$dq=\sigma dS$，场点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{\sigma(x',y',z')\boldsymbol{a}_R}{R^2}dS \tag{1-9}$$

式中，$\sigma=\sigma(x',y',z')$为面积元dS所在点的面电荷密度（C/m^2）。

当电荷连续分布在线l上时，电荷元为$dq=\tau dl$，场点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l\frac{\tau(x',y',z')\boldsymbol{a}_R}{R^2}dl \tag{1-10}$$

式中，$\tau=\tau(x',y',z')$为线元dl所在点处的线电荷密度（C/m）。

在上列各式中，要注意电场强度的叠加是矢量求和，各积分内的被积量都是源点坐标

(x', y', z') 的函数，电荷源点指向场点的单位矢量 $\boldsymbol{a}_R$ 也不同向。实际运算时，需将点源dq所产生的场强分解为各个分量后，对同方向的各分量求和或求积，再合成为所求点上的电场强度。

【例 1-1】 真空中在xoy平面上置有三点电荷：在点(0,3)上$q_1=-16\times10^{-9}$(C)；在点(4 , 0)上$q_2=-9\times10^{-9}$(C)；在坐标原点上$q_3=+25\times10^{-9}$(C)。问在点 (4,3) 上的合成电场强度为多少？如在此点置点电荷$q_0=10\times10^{-9}$(C)，它的受力情况如何？

解：各点电荷在点 (4,3) 上产生的电场强度如图1-5所示，设OP与x轴夹角为θ，则

$$\boldsymbol{E}_1=E_{1x}\boldsymbol{a}_x=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0R_1^2}\boldsymbol{a}_x=-\frac{16\times10^{-9}}{4\pi\times\dfrac{1}{36\pi}\times10^{-9}\times4^2}\boldsymbol{a}_x=-9\boldsymbol{a}_x$$

$$\boldsymbol{E}_2=E_{2y}\boldsymbol{a}_y=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0R_2^2}\boldsymbol{a}_y=-\frac{9\times10^{-9}}{4\pi\times\dfrac{1}{36\pi}\times10^{-9}\times3^2}\boldsymbol{a}_y=-9\boldsymbol{a}_y$$

$$\boldsymbol{E}_3=E_{3x}\boldsymbol{a}_x+E_{3y}\boldsymbol{a}_y=E_3\cos\theta\boldsymbol{a}_x+E_3\sin\theta\boldsymbol{a}_y$$

$$=\frac{25\times10^{-9}}{4\pi\times\dfrac{1}{36\pi}\times10^{-9}\times5^2}\times\frac{4}{5}\boldsymbol{a}_x+\frac{25\times10^{-9}}{4\pi\times\dfrac{1}{36\pi}\times10^{-9}\times5^2}\times\frac{3}{5}\boldsymbol{a}_y$$

$$=7.2\boldsymbol{a}_x+5.4\boldsymbol{a}_y$$

$$\boldsymbol{E}_\Sigma=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3=-1.8\boldsymbol{a}_x-3.6\boldsymbol{a}_y\ (\mathrm{V/m})$$

$$|\boldsymbol{E}_\Sigma|=4.02\ (\mathrm{V/m})$$

$\boldsymbol{q_0}$**受力为**

$$\boldsymbol{F}=q_0\boldsymbol{E}_\Sigma=-18\times10^{-9}\boldsymbol{a}_x-36\times10^{-9}\boldsymbol{a}_y\ (\mathrm{N})$$

$$|\boldsymbol{F}|=40.2\ (\mathrm{N})$$

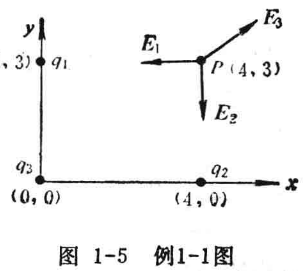

图 1-5 例1-1图

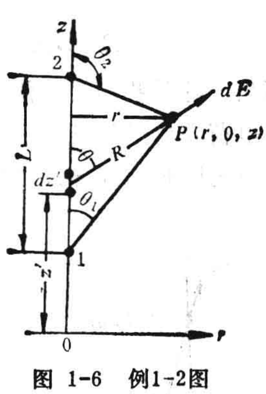

图 1-6 例1-2图

【例 1-2】 长直导线L上均匀带电，其线电荷密度为τ，求线外任 一 点 处 的 电 场强度。

解：如果以导线本身为轴，则在垂直轴的横截面上任一半径为 r 的圆周上，各点对轴电荷是对称的，这是一个轴对称场．小电荷段τdl在任一点P处产生的场强$d\boldsymbol{E}$，即在dl与距离矢量$\boldsymbol{R}$构成的平面上。如图1-6所示，采用圆柱坐标，则电场强度只有dE_r、dE_z分量，没有dE_α分量。现沿导线取z轴，场点位置为$P(r,0,z)$。因轴对称，点$(r,0,z)$上电 场 强

度与点(r, α, z)上是一样的。在导线上距原点z'处取线元$dl=dz'$，则

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{E} &= \frac{\tau dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_R = \frac{\tau dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta\boldsymbol{a}_z + \frac{\tau dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\theta\boldsymbol{a}_r \\
&= dE_z\boldsymbol{a}_z + dE_r\boldsymbol{a}_r
\end{aligned}
$$

现在将各个变量统一表示为轴向变量z'和它与距离矢量$\boldsymbol{R}$夹角θ的函数。因在所求场点P指定后，r、z均为定值，所以

$$
R = \frac{r}{\sin\theta} = r\csc\theta
$$

$$
\frac{r}{z-z'} = \mathrm{tg}\theta, \quad z-z' = r\mathrm{ctg}\theta, \quad dz' = r\csc^2\theta d\theta
$$

将上二式代入$d\boldsymbol{E}$后分项求积分，则

$$
\begin{aligned}
E_z &= \int dE_z = \int_{z_1'}^{z_2'} \frac{\tau dz'\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \\
&= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r\csc^2\theta \times \cos\theta d\theta}{(r\csc\theta)^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_r &= \int dE_r = \int_{z_1'}^{z_2'} \frac{\tau dz'\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \\
&= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r\csc^2\theta \times \sin\theta d\theta}{(r\csc\theta)^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{E} = E_r\boldsymbol{a}_r + E_z\boldsymbol{a}_z
$$

应当指出，这是我们为了便于理论分析，假设电荷在有限长导线上均匀分布而得到的结果. 实际电荷在有限长导线上的分布是不均匀的。

当导线为无限长，即导线二端距所研究的场域很远，因而可不考虑其端部效应时，$\theta_1 \approx 0$，$\theta_2 \approx \pi$，则得

$$
\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{a}_r} \qquad (1\text{-}11)
$$

这是一个很有用的结果。

【例 1-3】 求真空中一半径为a的均匀带电圆环，在其轴线上高h处一点上产生的电场强度。圆环带电量为Q。

解：这也是一个轴对称场，如图1-7所示。此时应采取圆柱坐标，以圆环轴线为z轴，圆环在xoy平面上。在圆周上取线元dl，

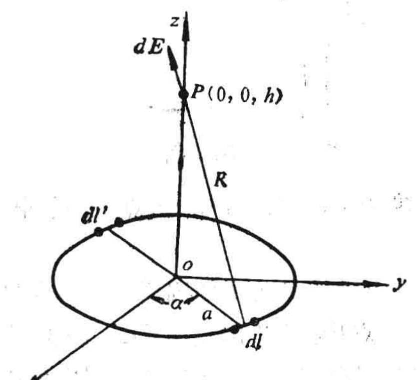

图 1-7 例1-3图

它所带的电荷量为$\frac{Q}{2\pi a}dl$，它在轴线上$P(0, 0, h)$点处产生的场强dE，它与z轴夹角为θ，它将有dE_z、dE_r二个分量。但与dl辐角相差180°处的线元dl'所产生场强的dE'_r分量，将与dE_r相抵消，而dE'_z分量则与dE_z同向且相等，合成场强为它们的叠加。所以只需对dE_z分量求积分即得场强，即

$$d\boldsymbol{E}=\frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_R,\quad dE_z=\frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta$$

因为

$$R^2=h^2+a^2,\quad dl=ad\alpha,\quad \tau=\frac{Q}{2\pi a},\quad \cos\theta=\frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}$$

代入dE_z后积分得

$$E_z=\int dE_z=\int_l\frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta=\frac{ah}{4\pi\varepsilon_0(h^2+a^2)^{3/2}}\times\frac{Q}{2\pi a}\int_0^{2\pi}d\alpha$$

$$=\frac{hQ}{4\pi\varepsilon_0(h^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\boldsymbol{E}=E_z\boldsymbol{a}_z$$

习　　题

1-1　三个电量为$-q$的点电荷，放在等边三角形三个顶点上，在该三角形重心上放电荷$+Q$。若要使每个$-q$受力为零，Q值应为多大？此时$+Q$本身受力多大？此系统是稳定的吗？$\left(\frac{q}{\sqrt{3}},\ 0\right)$

1-2　二个正电荷q，相距b，另一正电荷$2q$沿着它们的中垂线移动。问$2q$电荷移动到什么位置受力最大？此力是多少？$\left(距中点\frac{\sqrt{6}}{4}b,\ F=\frac{8q^2}{3\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 b^2}\right)$

1-3　空气中一正电荷1μC放在坐标原点上，一负电荷-2μC放在$+y$轴上与原点相距一米处，求点$P(2, 0, 0)$处的电场强度。　($3600\boldsymbol{a}_y-4950\boldsymbol{a}_x$ V/m)

1-2　高 斯 定 理

1.我们已知在静电场中空间各点上存在电场强度，它在各点上可有不同的大小和方向。这样，电场强度就构成了一个空间的矢量场。从场论的角度，下面我们讨论一下这个矢量场的基本性质，即场量的通量及散度是什么？场量的环量及旋度是什么？

矢量的通量，是指一个矢量通过指定面积的总量。我们将电场强度$\boldsymbol{E}$通过某一指定面积S的总量定义为它的通量Φ_E，则

$$\Phi_E=\int_S\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}\quad (\text{V-m})\qquad (1\text{-}12)$$

它是一个标量。

如果所指定的面积S为一封闭面，以封闭面的外法线方向为其正方向，则场强通量即为它穿出此封闭面的总量，即

$$\Phi_E=\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1-13}$$

2.这个通量等于多大？我们可以从点电荷产生的场强通量来分析。如果我们以点电荷本身为球心作一个球面，如图 1-8 所示，则在球面上各处电场强度是相等的，其方向为球面上各面积元的外法线方向，因而

$$\Phi_E=\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_S EdS=E\oint_S dS=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\times 4\pi r^2=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

通量值为点电荷量与真空的介电常数之比，为一恒定值，与所取球面半径无关。它发自电荷$+q$，扩散至无穷远。而当所取封闭面为非球面时，如图 1-9 所示，可见穿过它的通量总数与穿过一个球面的相同，仍为$\frac{q}{\varepsilon_0}$。如果封闭面未包围点电荷，如图1-10所示，则因面内部发出的通量为零，而面外电荷发出的通量穿入面内后必定再穿出，因而穿出其表面的通量的代数和必定为零。

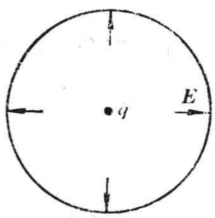

图 1-8　点电荷产生的场强穿出一封闭球面的通量

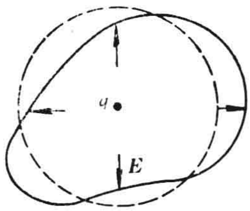

图 1-9　点电荷产生的场强穿出任意封闭面的通量

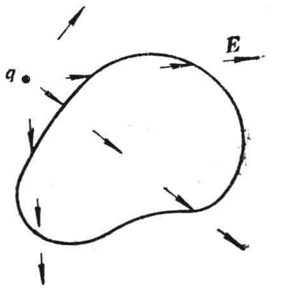

图 1-10　封闭面未包围电荷时穿出它的通量

如果封闭面内包围的不止一个电荷，或为一个电荷分布，则可利用叠加原理，此时

$$\boxed{\Phi_E=\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{\Sigma q}{\varepsilon_0}} \tag{1-14}$$

在真空中的静电场内，穿过任一封闭面的电场强度通量，等于此面所包围的电荷总量与真空的介电常数之比，而与电荷的位置无关。此即真空中的高斯定理。

3.如果我们在场内某点周围取一个小封闭面ΔS，它所包围的小体积ΔV内有电荷Δq，然后使小封闭面收缩到该点上，求下列极限

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_{\Delta S}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\varepsilon_0\Delta V}=\frac{1}{\varepsilon_0}\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V}$$

上式左边为矢量$\boldsymbol{E}$的散度的定义，右边的$\lim\limits_{\Delta V\to 0}\dfrac{\Delta q}{\Delta V}=\rho$为该点处的电荷密度，故得

$$\boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\quad(\mathrm{V/m^2})}\tag{1-15}$$

在直角坐标下，上式可写为

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

即真空中静电场内一点上电场强度的散度，等于所在点上电荷密度与真空的介电常数之比，此式也称为高斯定理的微分形式。它说明空间任一点上有正电荷密度存在时，即有电场强度从此点散发出来；有负的电荷密度时，则有电场强度向此点汇集。电荷是电场强度的源，也是静电场的源。如果空间某一点没有电荷，则此处场强的散度为零。但要注意，某点的场强散度为零时，不等于说此处场强为零，也不是说该点前、后场强相等，而只是说明电场通过该点，在该点上没有电场强度散发或汇集。根据这个定理，就可以确定空间某一点上有无体电荷密度存在及其量值的大小了。

在一些简单的对称场中，当能找到一个对称的封闭面或高斯面，使在其面上电场强度具有相同的大小时；或者封闭面的一部份与电场强度平行，而另一部份具有上述性质时，利用高斯定理可以直接求出电场强度。

【例 1-4】 无限长直导线上均匀带电，线密度为τ，求线外一点处电场强度。

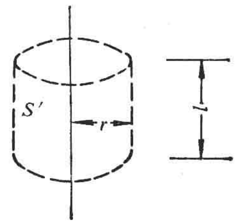

图 1-11　例1-4图

解：设此点与导线的距离为r，如图 1-11 所示，此时围绕导线以r为半径作圆柱体，因导线为无限长，此圆柱体两端面上E与端面平行，没有通量，仅在侧面S'上有通量。因E与侧面垂直且各处相等，故

$$\Phi_E=\oint_S\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=E\oint_{S'}dS=E\times 2\pi r\times l=\frac{\tau l}{\varepsilon_0}$$

得
$$E=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

【例 1-5】 静电除尘器由两个同轴圆柱导体组成，已知其间电场强度的分布为$\boldsymbol{E}=\dfrac{a}{r^2}\boldsymbol{a}_r$，求空间的电荷密度。

解：因$E=E_r$，$E_\alpha=E_z=0$，代入柱坐标下求散度式，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\rho=\varepsilon_0\times\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\times\frac{a}{r^2}\right)=-\frac{\varepsilon_0 a}{r^3}$$

【例 1-6】 已知真空中电荷体密度沿x轴为正态分布，其表达式可写为$\rho(x)=$