概率论、数理统计与随机过程

Probability Theory, Mathematical Statistics

■主　编　张帼奋
副主编　黄柏琴　张彩伢

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

概率论、数理统计与随机过程

主　编　张帼奋
副主编　黄柏琴　张彩伢

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论、数理统计与随机过程／张帼奋主编．—杭州：浙江大学出版社，2011．7
ISBN 978-7-308-08852-7

Ⅰ．①概… Ⅱ．①张… Ⅲ．①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材③随机过程—高等学校—教材 Ⅳ．①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 134518 号

概率论、数理统计与随机过程

主　编　张帼奋

副主编　黄柏琴　张彩伢

责任编辑　余健波
封面设计　续设计
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http：//www.zjupress.com）
排　　版　杭州中大图文设计有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　18.25
字　　数　558 千
版 印 次　2011 年 7 月第 1 版　2011 年 7 月第 1 次印刷
印　　数　0001—4000
书　　号　ISBN 978-7-308-08852-7
定　　价　32.00 元

前　言

本书是为非统计专业本科生编写的教科书，也可以作为有微积分基础的科研工作者学习与使用概率论，数理统计与随机过程的基本概念与方法的参考材料.

本书分为三部分：第一部分（第一章至第五章）是概率论部分，主要介绍概率论的基本知识，包括一元，二元离散型随机变量和连续型随机变量的分布，数字特征等；第二部分（第六章至第九章）是数理统计部分，介绍了统计量与抽样分布，参数估计，假设检验，方差分析与回归分析；第三部分（第十章至第十三章）介绍随机过程的基本知识，马尔可夫链，泊松过程，布朗运动和平稳过程。各部分的教学时数都约为 24 学时，概率论部分的教学时数可以稍多些. 数理统计与随机过程的内容是独立的，可以根据需要开设概率论与数理统计或概率论与随机过程课程.

本书的主要特点有：(1)在每章的习题前列出了思考题，使读者对每章的内容有更清晰的梳理；(2)在某些章节尤其是数理统计部分的例子后介绍了 Excel 软件应用，使读者不仅掌握概率统计的原理，还能对大量复杂的数据运用软件进行直接分析；(3)例题和习题的选取上尽可能贴近生活，兼顾趣味性，有实际意义.

本书的第一章到第三章由黄柏琴编写；第四，第五章由黄炜编写；第六，第九章由张奕编写；第七，第八章由张彩伢编写；第十，第十一章由赵敏智编写；第十二，第十三章由张帼奋编写，最后的统稿由张帼奋完成. 编者中除了张彩伢是浙江大学城市学院教师，其余都是浙江大学教师. 书中的部分介绍，例题和习题参考了书后所列的书目，在此特向有关的作者和出版社表示衷心的感谢.

参加本书编写的教师都长期从事教学科研工作，有丰富的教学实践经验，书中的不少内容是我们教学科研工作的总结，愿与广大读者交流分享.

张立新教授对本书的讲义进行了审阅，并提出了宝贵的意见，在此也向他表示由衷的谢意。另外还要感谢其他对本教材的讲义提出意见和给予帮助的老师和研究生等.

在写作过程中我们努力做到内容由浅入深，所选例题典型新颖，解题过程条理清晰. 由于编者水平有限，书中可能还有不少的缺陷，恳请各位同行，专家和广大的读者朋友批评指正.

本书编委会
2011 年 5 月

目　录

第一章 概率论的基本概念

自然界的现象可以分为两大类：一类为必然现象，另一类为随机现象.

所谓**必然现象**，是指在一定的条件下必然发生的现象. 例如：在一个标准大气压下，水加热到 100℃一定会沸腾；向上抛一重物，一定会落到地面上；月亮一定沿某一轨道绕地球运转，等等. 研究这些必然现象中的数量关系，常常采用微积分、代数、几何及其他一些数学方法.

所谓**随机现象**，也称为偶然现象，是指在一定条件下具有多种可能发生的结果，而对于究竟发生哪一个结果事先不能肯定的现象. 例如："明天天气"可能是晴，也可能是阴或雨；从一批产品中任意抽取一件产品，该产品可能是合格品，也可能是不合格品；同一工人在同一台车床上用同样的材料加工同类型的轴，其直径也不会完全相同；某一时刻某柜台的顾客数可能为 0，1，2，3，…，等等，这些仅仅是"瞬息万变"的大千世界中的一点点事实. 从表面上看，随机现象完全由偶然性在起支配作用，没有什么必然性. 其实，这些现象有一个共同的特点：在一定的条件下，当我们重复观察随机现象的时候，就会发现随机现象的出现有其规律性. 例如：从一大批产品中，每抽一件产品，该产品是合格或是不合格是随机的，这是现象具有偶然性的一面；然而，当重复抽取产品时，不合格品率是稳定的，这就是现象具有的必然性的一面. 再如，当一辆汽车按正常操作通过某一地段时，事先无法确切知道会不会发生交通事故，即带有偶然性；但经过大量的观察，发现某一地段发生交通事故比较多，因此就在这一地段的路边立了一块"事故多发地段"的牌子（这就是必然的一面，即有规律性的一面），提醒人们引起注意. 由此可见，随机现象的出现是偶然的，但在大量重复试验（观察）中，随机现象隐藏着必然的规律性，这种固有的规律性称为统计规律性. 概率论、数理统计与随机过程就是研究随机现象数量规律性的学科.

§1.1 样本空间、随机事件

（一）样本空间、随机事件

为了精细地考察一个随机现象，必须分析这个随机现象的各种结果，只有弄清了一个随机现象的各种结果，才能进一步研究这个随机现象的各种结果出现的可能性. 对随机现象作一次观察（或记录、或试验）称为**随机试验（random experiment）**，这些试验具有以下特点：

（1）可以在相同的条件下重复进行；

（2）每次试验可能出现的结果不止一个，但能事先明确试验的所有可能结果；

（3）试验完成前不能确定哪个结果会出现.

本书中以后提到的试验都是指随机试验.

称随机试验的所有可能结果构成的集合为**样本空间（sample space）**，记为 S. 样本空间 S 中的每一个元素，即试验的每一个结果称为**样本点（sample point）**.

观察随机现象时，人们常常关心某些特定的结果，这些结果可能出现，也可能不出现. 在随机试验中，称那些可能发生又可能不发生的结果为**随机事件（random event）**，简称**事件**. 特别

地，称试验的每一个结果(即样本点)为**基本事件**.

我们常用集合的方法描述样本空间及随机事件，那么随机事件即为样本空间的一个子集.

例 1.1.1 投掷一枚硬币，试验的结果有 2 个："正面朝上"，"反面朝上"，故该试验所对应的样本空间由上述 2 个基本事件构成，简记为

$$S=\{(\text{正面}),(\text{反面})\}.$$

例 1.1.2 一射手向一目标射击 3 次，观察他的击中次数，可能为"击中 0 次"，"击中 1 次"，"击中 2 次"，"击中 3 次"，即该试验有这 4 种可能结果，每一个结果都是一个基本事件，所以该试验所对应的样本空间可以简记为

$$S=\{0,1,2,3\}.$$

记 $A=\{\text{至少有 1 次击中}\}=\{1,2,3\}\subset S$；$B=\{\text{击中次数不到 2 次}\}=\{0,1\}\subset S$. A,B 均为随机事件.

例 1.1.3 记录一批标注重量为 50(kg)的袋装大米的重量 x 与农药残留量 y，对应的样本空间为

$$S=\{(x,y):49\leqslant x\leqslant 51,0\leqslant y\leqslant y_0\},$$

其中 y_0 为农药最高残留量.

记 $A=\{\text{一袋重量不少于 50kg 的无农药残留的大米}\}=\{(x,y):x\geqslant 50,y=0\}\subset S$.

例 1.1.4 从 15 个同类产品(其中 12 个正品，3 个次品)中任取 4 个产品，观察取得的次品数，则对应的样本空间为

$$S=\{0,1,2,3\}.$$

{至少有 2 个正品}及{恰有 2 个正品}均为随机事件.

当某一事件所包含的一个样本点发生时，我们就称该事件发生. 例如，在例 1.1.2 中，$A=\{1,2,3\}$，若射手"恰好击中 1 次"时，即 A 所包含的一个样本点出现，那么我们就称事件 A 发生；当射手"恰好击中 2 次"时，我们亦称事件 A 发生；当射手"恰好击中 3 次"时，我们同样称事件 A 发生.

特别地，若将样本空间 S 亦视为一事件，因为 S 包含了试验所有的可能结果，因此在任何一次试验中，事件 S 一定会发生. 我们称这种每次试验必然发生的事件为**必然事件**，用 S 来表示. 与之相对应地，称在任何试验中都不可能发生的事件为**不可能事件**，记为 $\varnothing$.

考察例 1.1.4 中的 2 个事件：{4 个都是次品}和{至少有 1 个正品}，前者是不可能事件，后者是必然事件.

(二)事件的相互关系及运算

在研究随机现象时，为了掌握复杂事件的统计规律，我们常常需要研究事件之间的相互关系及运算.

前面我们已经用集合描述了样本空间与随机事件，下面我们再用集合论的方法来定义与理解事件的相互关系及运算.

1. 事件的包含与相等

设 A,B 为同一样本空间 S 中的两个事件. 若当事件 B 发生时一定导致 A 发生，则称事件 A **包含**事件 B，记为 $A\supset B$；当 $A\supset B$，同时又有 $B\supset A$ 时，记为 $A=B$，即称事件 A 与 B **相等**.

2. 事件的运算

同样假设以下参与运算的事件都在同一样本空间中.

事件 $A\cup B$ 在集合论中理解为由集合 A 与 B 的元素合并到一起构成的新的集合，现在

A,B 为随机事件，$A\cup B$ 为一个新的事件. 事件 $A\cup B$ 包含了 A 和 B 的所有样本点，这些样本点发生时，$A\cup B$ 发生. 故当事件 A,B 至少有一发生时，$A\cup B$ 发生. 因此有下面的定义：

$$A\cup B=\{A \text{ 与 } B \text{ 至少有一个发生}\}$$

为事件 A 与事件 B 的**和事件**. 同样，称

$$\bigcup_{j=1}^{n}A_j=\{A_1,A_2,\cdots,A_n \text{ 至少有一个发生}\}$$

为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 1)$ 的和事件；称

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j=\{A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots \text{至少有一个发生}\}$$

为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件.

而在集合论中，$A\cap B$ 表示由 A,B 两个集合的公共元素组成的新的集合，即 $A\cap B$ 发生当且仅当事件 A,B 同时发生. 故称

$$A\cap B=\{A,B \text{ 同时发生}\}$$

为事件 A 与事件 B 的**积事件**，也可表示成 $A\cdot B$，或表示成 AB. 类似可以定义：

$$\bigcap_{j=1}^{n}A_j=\{A_1,A_2,\cdots,A_n \text{ 同时发生}\}$$

为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 1)$ 的积事件；称

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j=\{A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots \text{同时发生}\}$$

为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积事件.

对于"A 不发生"事件，称之为 A 的**逆事件**，记作 $\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{A \text{ 不发生}\}.$$

注意到 $A\cup\overline{A}=S$，同时 $A\cap\overline{A}=\varnothing$. 故 A 与 $\overline{A}$ 互逆，又称 A 与 $\overline{A}$ 为**对立事件**.

A 与 B 的**差事件**，记为 $A-B$，即

$$A-B=\{A \text{ 发生同时 } B \text{ 不发生}\}.$$

因此，$A-B=A\overline{B}$.

我们可以借助以下的图形(见图 1.1.1)，表示以上事件的关系和运算：

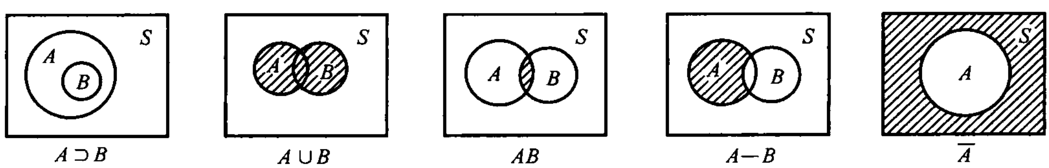

图 1.1.1

和、交与逆事件具有以下的运算规则：

交换律：$A\cup B=B\cup A$，　　$A\cap B=B\cap A$；

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，　　$A(BC)=(AB)C$；

分配律：$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$，　　$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$；

德摩根定律(De Morgan's laws)：

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{n}A_j}=\bigcap_{j=1}^{n}\overline{A}_j,\qquad \overline{\bigcap_{j=1}^{n}A_j}=\bigcup_{j=1}^{n}\overline{A}_j$$

即"n 个事件至少有一发生"的逆事件为"这 n 个事件都不发生"；"n 个事件都发生"的逆事件为"这 n 个事件至少有一个不发生".

定义 1.1.1 设 A,B 为两随机事件，当 $AB=\varnothing$ 时，称事件 A 与事件 B **不相容（或互斥）**.

也即当 A 与 B 不能同时发生时，称 A,B 不相容. 我们注意到“样本空间中的样本点两两不相容”.

例 1.1.5 抛一颗骰子，设 $A_i=\{$得到的点数为 $i\}$，$i=1,2,\cdots,6$. 再设 $A=\{$得到偶数点$\}$，$B=\{$得到奇数点$\}$，$C=\{$得到 1 点或 3 点$\}$. 则

$$A=A_2\cup A_4\cup A_6,\quad B=A_1\cup A_3\cup A_5,\quad C=A_1\cup A_3$$

显然 $B\supset C$；又 $AC=\varnothing$，故 A 与 C 不相容，又 $\overline{A}=\overline{A_2}\,\overline{A_4}\,\overline{A_6}=B$，故 A,B 互逆.

概率论中常有以下定义：由 n 个元件组成系统，若有一个损坏，则系统就损坏，此时称该系统为串联系统；若有一个不损坏，则系统不损坏，此时称该系统为并联系统. 例如，一个凳子是由 4 条腿、凳板、靠背共 6 个部分组成，如果其中一个部分损坏，我们就认为这把凳子坏了，那么这把凳子就是一个由 6 个部件组成的串联系统.

例 1.1.6 由 n 个部件组成的系统，设 $A_j=\{$第 j 个部件不损坏$\}$，$A=\{$系统不损坏$\}$. 则有

串联系统 $A=A_1A_2\cdots A_n$；

并联系统 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.

§1.2 频率与概率

(一)频率

前面已经提到，我们的目的是要研究随机现象的数量规律性，为此我们首先提出频率的概念.

在一定的条件下，设事件 A 在 n 次重复试验中发生 n_A 次（称 n_A 为 A 在这 n 次试验中发生的**频数**），称比值 n_A/n 为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频率(frequency)**，记为 $f_n(A)$，

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{A\text{ 发生次数}}{\text{总的试验次数}}.$$

例 1.2.1 从市场上抽查了某品牌的一种液态奶制品 30 件，其中有 20 件被检出了某种物质含量超标，则事件“检出某物质含量超标”在这 30 次试验中发生的频率为 $\frac{20}{30}$.

事件 A 发生的频率越大，人们就会感到 A 发生的可能性越大，频率越小，就有这一事件不易发生的感觉，所以频率是人们对事件发生的可能性大或小的第一认识.

事件的频率具有以下性质：

(1)对任一事件 A，$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2)$f_n(S)=1$；

(3)当事件 A 与 B 不相容时，$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

性质(3)可以推广，当 $A_1,A_2,\cdots,A_k(k>2)$ 两两不相容时，

$$f_n\Big(\bigcup_{j=1}^{k}A_j\Big)=\sum_{j=1}^{k}f_n(A_j).$$

例 1.2.2 某厂每天从当天的产品中抽取 50 件，检查其是否合格，记录于表 1.2.1：

表 1.2.1

观察天数	1	2	3	…	10	15	20	25	30	…
累计抽检产品数(n)	50	100	150	…	500	750	1000	1250	1500	…
累计不合格数(n_A)	0	2	4	…	6	8	11	14	16	…
频率(n_A/n)	0	0.02	0.027	…	0.012	0.011	0.011	0.011	0.011	…

例 1.2.3　抛硬币试验，在相同的条件下将一枚硬币抛 n 次（你不妨一试），设 $A=\{$出现正面$\}$，当 n 较小时，$f_n(A)$的变化范围较大，但人们发现，当 n 渐渐增大时，$f_n(A)$的值渐渐地稳定在 0.5 附近. 以下是几个世界著名的大统计学家抛硬币的试验结果（列于表 1.2.2）：

表 1.2.2

试验者	n	n_A	$f_n(A)$
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005

无数事实告诉我们，在大量试验中（即当 n 充分大时），任一随机事件 A 的频率$f_n(A)$具有稳定性，$f_n(A)$会稳定于一个常数 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$附近，这个数是由事件 A 的属性所决定的. 这给了我们一个机会，一个用数量来描述事件 A 发生的可能性大小的机会.

(二)概率

有一种定义概率的方法（称之为概率的统计性定义）是：设某一随机试验所对应的样本空间为 S，对 S 中的任一事件 A，A 的频率 $f_n(A)$的稳定值 p 定义为 A 的概率，记为$P(A)=p$.

虽然上面的定义很直观，很易理解，且人们也常用这样的思路来解释概率，但也存在问题. 事实上，人们常常不易知道 $f_n(A)$的稳定值 p，因而我们采用以下公理化的定义.

定义 1.2.1　设某一随机试验所对应的样本空间为 S. 对 S 中的任一事件 A，定义一个实数 $P(A)$，满足以下三条公理：

(1)$P(A)\geqslant 0$；

(2)$P(S)=1$；

(3)对 S 中的可列个两两不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$（即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$），有

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j),$$

则称 $P(A)$为 A 的**概率(probability)**，$P(\cdot)$为概率测度.

值得注意的是，对于有限个两两不相容的事件的和事件有

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)=\sum_{j=1}^{n} P(A_j).$$

以上定义的概率有以下性质：

(1)$P(A)=1-P(\overline{A})$；

因为 $A\cup\overline{A}=S$，两边求概率（注意到 $A\overline{A}=\varnothing$），即得.

特别地，$\varnothing\cup S=S$，可得 $P(\varnothing)=0$.

（注意：若有 $P(A)=0$，**不一定**能得出 $A=\varnothing$.）

(2)当 $A\supset B$ 时，必有 $P(A)\geqslant P(B)$；

因为当 $A\supset B$ 时，$A=B\cup A\overline{B}\Rightarrow P(A)=P(B)+P(A\overline{B})$. 而 $0\leqslant P(A\overline{B})=P(A)-P(B)$，故 $P(A)\geqslant P(B)$. 进而可得 $P(A)\leqslant P(S)=1$.

(3)概率的加法公式：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

因为 $A=AB\cup A\overline{B}\Rightarrow P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})\Rightarrow P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$，

又 $$A\cup B=B\cup A\overline{B}\Rightarrow P(A\cup B)=P(B)+P(A\overline{B}),$$

故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

性质 3 可以推广：

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$；

$$P(\bigcup_{j=1}^{n}A_i)=\sum_{j=1}^{n}P(A_j)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n),\qquad n\geqslant 1.$$

例 1.2.4 设甲、乙两人向同一目标进行射击，已知甲击中目标的概率为 0.7，乙击中目标的概率为 0.6，两人同时击中目标的概率为 0.4，求目标不被击中的概率.

解 设 $A=\{$甲击中目标$\}$，$B=\{$乙击中目标$\}$. 由题意知

$$P(A)=0.7,\qquad P(B)=0.6,\qquad P(AB)=0.4.$$

而$\{$目标不被击中$\}=\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$，所以

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=0.1.$$

例 1.2.5 设甲、乙、丙三个人去参加某个集会的概率均为 0.4，且甲、乙、丙中至少有两个人去参加的概率为 0.3，三人同时参加的概率为 0.05. 求甲、乙、丙三人至少有一人参加的概率.

解 设 $A=\{$甲参加$\}$，$B=\{$乙参加$\}$，$C=\{$丙参加$\}$. 由题意知，

$$P(A)=P(B)=P(C)=0.4,P(AB\cup AC\cup BC)=0.3,P(ABC)=0.05.$$

由 $$0.3=P(AB\cup AC\cup BC)=P(AB)+P(AC)+P(BC)-2P(ABC),$$

得 $P(AB)+P(AC)+P(BC)=0.3+2P(ABC)=0.4$，故

$$\begin{aligned}&P(\text{甲、乙、丙三人至少有一人参加})=P(A\cup B\cup C)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-[P(AB)+P(AC)+P(BC)]+P(ABC)=0.85.\end{aligned}$$

从以上两个例题可以看出，解这类题，第 1 步：要设随机事件；第 2 步：要明确写出已知什么及要求什么；第 3 步：写出事件的运算式与概率运算式，求出概率.

§1.3 等可能概型

在某些随机试验中，我们常假设样本空间中样本点出现的可能性相等. 例如，抛硬币试验，$S=\{$正面，反面$\}$，我们常假设出现正面与反面的概率相等.

定义 1.3.1 一个随机试验，如果满足下面两个条件：

(1)样本空间中样本点数有限(有限性)；

(2)出现每一个样本点的概率相等(等可能性).

则称这个试验问题为**古典概型**，又称**等可能概型**.

若设一等可能概型的样本空间为 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，则由定义 1.3.1 知 $P(\{e_j\})=\frac{1}{n}$，$j=1,2,\cdots,n$. 任一随机事件 $A=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_l}\}$，即 $A=\{e_{i_1}\}\cup\{e_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{e_{i_l}\}$. 由样本点两两不相容的性质，知

$$P(A)=P(\bigcup_{j=1}^{l}\{e_{i_j}\})=\sum_{j=1}^{l}P(\{e_{i_j}\})=\frac{l}{n}.$$

这就是说，在等可能概型中，任一事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 所包含的样本点数}}{S\text{ 中总样本点数}}.$$

因此，在古典概型中，求随机事件概率的问题就可以转化为数样本点数的问题，这常要用到组合数学.

例 1.3.1 从一付牌（去掉两个王，共 52 张）中随机取两张，求“恰是一红一黑”的概率.

解 设 $A=\{$恰是一红一黑$\}$.

(1)若是不放回抽样（即第一次抽出 1 张，不放回，再抽第二张），则

$$P(A)=\frac{C_{26}^{1}C_{26}^{1}}{C_{52}^{2}}=\frac{26}{51}.$$

(2)若是放回抽样（即第一次抽出 1 张后，放回，再抽第二张），此时的样本空间为

$$S=\{(\text{红},\text{黑}),(\text{红},\text{红}),(\text{黑},\text{红}),(\text{黑},\text{黑})\}.$$

则
$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

例 1.3.2 （抽签问题）袋中有编号为 $1,2,\cdots,n(n>1)$ 的 n 个球，其中有 a 个红球，b 个白球$(a+b=n)$. 从中每次摸一球，不放回，共摸 n 次. 设每次摸到各球概率相等. 求第 $k(1\leqslant k\leqslant n)$次摸到红球的概率.

解 设 $A_k=\{$第 k 次摸到红球$\}$，$k=1,2,\cdots,n$.

解法 1 假设我们视 n 次摸出的球号的先后排列为一个样本点，则样本空间中共有 $n!$ 个样本点. 由题意知，出现每一个样本点的概率相等，而第 k 次为红球共有 $a(n-1)!$ 个样本点. 所以

$$P(A_k)=\frac{a(n-1)!}{n!}=\frac{a}{n}=\frac{a}{a+b},k=1,2,\cdots,n.$$

解法 2 若我们 n 个同学去摸球，我们只关心哪几个同学摸到红球为试验的结果，即假设视“哪几次摸到红球”为样本点，则样本空间总样本点数为 C_n^a. 由题意知，出现每一个样本点的概率相等. 如果 A_k 发生，即第 k 次一定为红球，只要在余下的$(n-1)$次中决定$(a-1)$次就行. 故

$$P(A_k)=\frac{C_{n-1}^{a-1}}{C_n^a}=\frac{a}{n}=\frac{a}{a+b},k=1,2,\cdots,n.$$

解法 3 若视第 k 次摸到的球号为样本点，则样本空间中共有 n 个样本点，其中有 a 个样本点使得 A_k 发生，故

$$P(A_k)=\frac{a}{n}=\frac{a}{a+b},k=1,2,\cdots,n.$$

以上三种方法计算得到：在抽签问题中，第 $k(1\leqslant k\leqslant n)$次摸到红球的概率与 k 无关.

例 1.3.3 （配对问题）一个小班共有 n 个学生，分别编上 $1,2,\cdots,n$ 号，在中秋节前每人做一件礼物相应地编上 $1,2,\cdots,n$ 号. 将所有礼物集中放在一起，然后让每个同学随机地取一件（即，每次取到每一件礼物是等可能的），求没有人取到自己礼物的概率.

解 先求“至少有一个人拿到自己的礼物”的概率. 设

$$A_i=\{\text{第 } i \text{ 个人拿到编号为 } i \text{ 的礼物}\}=\{\text{第 } i \text{ 号配对}\},i=1,2,\cdots,n.$$

由概率的加法公式，得

$$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

如果将先后取到的礼物的编号(即排列)作为一个样本点，例如，$(1,2,\cdots,n)$表示 n 人都取到了自己的礼物，那么共有 $n!$ 个样本点，由题意知出现每一个样本点的概率相等. 当 A_i 发生时，即 i 号配对其余$(n-1)$个号可以任意的排列，故

$$P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}.$$

同理

$$P(A_iA_j)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)},i<j,\text{共有 } C_n^2 \text{ 项};$$

$$P(A_iA_jA_k)=\frac{(n-3)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)(n-2)},i<j<k,\text{共有 } C_n^3 \text{ 项};$$

$$\cdots;$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!}.$$

所以$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}-C_n^2\cdot\frac{1}{n(n-1)}+C_n^3\cdot\frac{1}{n(n-1)(n-2)}-\cdots+(-1)^{n-1}C_n^n\cdot\frac{1}{n!}$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

那么

$$P\{\text{没有一人拿到自己的礼物}\}=P(\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i})=1-P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$$
$$=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

当 n 充分大时，上式的值近似于 e^{-1}.

§1.4 条件概率

(一)条件概率

我们先来看一个例子，设一批产品的合格品率为 80%，合格品中 90%是优质品，从中任取一件，设 $A=\{\text{取到合格品}\}$，$B=\{\text{取到优质品}\}$，则取到优质品的概率显然为 72%. 若把考虑问题的范围缩小，即，只考虑已知取到的一件是合格品，那么取到的这一件合格品是优质品的概率应为 90%，也就是说，如果把取到所有的合格品的概率记为 1，那么取到的一件是优质品的概率为 90%，常记为 $P(B|A)=90\%$.

$P(B)=72\%$与 $P(B|A)=90\%$是在两个不同的样本空间中对事件 B 的概率进行度量，后者是将 A 作为新的样本空间.

定义 1.4.1 如果 $P(A)>0$，那 A 发生的条件下 B 的**条件概率**(**conditional probability**)为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}. \tag{1.4.1}$$

例 1.4.1　将一枚均匀的硬币抛两次，已知“至少有 1 次正面”的条件下，求“两次都是正面”的概率.

解　设 $H_i=\{$第 i 次为正面$\}$，$i=1,2$，$B=\{$至少有一次为正面$\}$，$C=\{$两次均为正面$\}$.

样本空间为 $S=\{H_1H_2,H_1\overline{H}_2,\overline{H}_1H_2,\overline{H}_1\overline{H}_2\}$. 因为硬币是均匀的，故这是一个等可能概型.

解法 1　显然 $P(B)=\dfrac{3}{4}$，$P(BC)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，故

$$P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{1}{3}.$$

解法 2　将 B 视为缩减了的样本空间 S_1，则

$$S_1=\{H_1H_2,H_1\overline{H}_2,\overline{H}_1H_2\}.$$

这也是一等可能概型. 在 S_1 的 3 个样本点中只有一个样本点使 C 发生，故

$$P(C|B)=1/3.$$

解法 1 是用条件概率定义求解，解法 2 是利用我们对条件概率的理解，用缩减了的样本空间来求解，两种方法都行.

例 1.4.2　一袋中有 5 个红球，4 个白球，从中每次摸一球，不放回抽样，抽 4 次. (1)已知前两次中至少有一次摸到红球，求前两次中恰有一次摸到红球的概率；(2)已知第 4 次摸到的是红球，求第 1 次和第 2 次摸到的都是红球的概率.

解　设 $A_i=\{$第 i 次摸到红球$\}$，$i=1,2,3,4$. 再设 $B=\{$前两次中至少有一次摸到红球$\}$，$C=\{$前两次恰有一次摸到红球$\}$.

(1)题中要求的是 $P(C|B)$.

$$P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{P(C)}{1-P(\overline{B})}=\frac{C_4^1C_5^1/C_9^2}{1-C_4^2/C_9^2}=\frac{2}{3}.$$

(2)即求 $P(A_1A_2|A_4)=\dfrac{P(A_1A_2A_4)}{P(A_4)}$. 由 §1.3 的例 1.3.2，可知 $P(A_4)=\dfrac{5}{9}$. 而

$$P(A_1A_2A_4)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{5}{42}.$$

所以

$$P(A_1A_2|A_4)=\frac{3}{14}.$$

其实，任何事件的概率都是在一定条件下给予的值，也即概率本身就是有条件的. 上面定义的条件概率无非是在新的样本空间下的概率度量，因此条件概率同样具有一般的概率性质. 例如：当 $P(C)\neq 0$ 时，有

(1)$P(B|C)=1-P(\overline{B}|C)$；

(2)当 $A\supset B$ 时，$P(A|C)\geqslant P(B|C)$；

(3)$P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)$.

推广之，

$$P(\bigcup_{j=1}^{n}A_i|C)=\sum_{j=1}^{n}P(A_j|C)-\sum_{i<j}P(A_iA_j|C)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k|C)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n|C),n\geqslant 1.$$

(二)乘法公式

由条件概率的定义知，当 $P(A)\neq 0$，$P(B)\neq 0$ 时，