刚性常微分方程及刚性泛函微分方程数值分析

■ 李寿佛 著

Numerical Analysis for Stiff Ordinary and Functional Differential Equations

■ Li Shoufu

湘潭大学出版社

刚性常微分方程及刚性泛函微分方程数值分析

■李寿佛 著

湘潭大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

刚性常微分方程及刚性泛函微分方程数值分析 / 李寿佛著.—湘潭：湘潭大学出版社，2010.8

ISBN 978-7-81128-228-3

Ⅰ.①刚… Ⅱ.①李… Ⅲ.①刚性常微分方程—数值计算②刚性问题—泛函方程：微分方程—数值计算Ⅳ.①O241.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 152611 号

刚性常微分方程及刚性泛函微分方程数值分析

李寿佛　著

责任编辑： 罗　联

封面设计： 罗志义

出版发行： 湘潭大学出版社

社　　址： 湖南省湘潭市　湘潭大学出版大楼

电话(传真)：0731-58298966　　邮编：411105

网　　址：http://xtup.xtu.edu.cn

印　　刷： 长沙瑞和印务有限公司

经　　销： 湖南省新华书店

开　　本： 880×1230　1/32

印　　张： 19

字　　数： 494 千字

版　　次： 2010 年 9 月第 1 版　2010 年 9 月第 1 次印刷

书　　号： ISBN 978-7-81128-228-3

定　　价： 49.00 元

序　言

本书是在《刚性微分方程算法理论》(李寿佛著,湖南科学技术出版社1997年出版)一书的基础上作实质性扩充而形成的。

《刚性微分方程算法理论》是作者及其课题组从事刚性常微分方程数值方法研究所获成果的阶段性总结,一直为同行学者广泛引用,其前三章的内容一直被国内多所大学用作研究生教材,为广大读者所熟悉。

本书的实质性扩充部分主要介绍作者最近几年所建立的非线性刚性 Volterra 泛函微分方程及其数值方法的一般理论。其内容包括 Banach 空间中非线性刚性 Volterra 泛函微分方程(VFDE)的稳定性、收缩性及渐近稳定性理论,有限维欧氏空间中非线性刚性 VFDE 问题 Runge-Kutta 法的 B-稳定与 B-收敛理论及收缩性与渐近稳定性理论,有限维欧氏空间中非线性刚性 VFDE 问题一般线性方法的 B-稳定与 B-收敛理论, 以及在上述理论指导下所构造的用于求解刚性 VFDE 问题的一系列高阶 B-收敛方法和高阶收缩及强收缩 Runge-Kutta 法。

上述关于 VFDE 及其数值方法的一般理论为非线性刚性延迟微分方程(DDE)、非线性刚性积分微分方程(IDE)、非线性刚性延迟积分微分方程(DIDE)以及实际问题中所遇到的其他各种类型的刚性泛函微分方程的稳定性、收缩性、渐近稳定性研究及其数值方法的 B-稳定性、B-收敛性、收缩性及渐近稳定性分析提供了统一的理论基础,并提供了以往国内外文献中一直未能探明的可直接用于求解刚性 DDEs、IDEs、DIDEs 以及其他各种类型的刚性泛函微分方程的一系列高效数值方法,从而有力地推进了以上各相关领域的研究。

由于“国际领先”、“国际先进”之类的形容词滥用太多、太俗，所以我不想借用这些词汇，但从以上描述足可看到本书在国际上应占有的席地。相信本书的出版将有助于广大读者了解这一重要研究领域的全貌和现状，并促进其进一步发展。

2010年8月12日

前　　言

本书是在李寿佛所著《刚性微分方程算法理论》(湖南科学技术出版社 1997 年出版)一书的基础上作实质性扩充而形成的。

《刚性微分方程算法理论》一书是作者及其课题组从事刚性常微分方程(ODE)数值方法研究所获成果的阶段性总结。其内容包括作者所建立的 Banach 空间中刚性微分方程一般多值方法的 B-稳定与 B-收敛理论,Hilbert 空间中刚性微分方程一般线性方法的(k,p,q)-稳定性理论,(k,p,q)-弱代数稳定性准则及 B-稳定与 B-收敛理论,Hilbert 空间中刚性微分方程数值解的存在与唯一性理论,Hilbert 空间中刚性微分方程多步 Runge-Kutta 法的代数稳定性理论;在此基础上,作者构造了五类高阶代数稳定的多步 Runge-Kutta 法,连同 Burrage 所构造的一类,总共得到六类高阶代数稳定的多步 Runge-Kutta 法,并证明了在一定条件下这些方法都是 B-稳定且 B-收敛的。此外,在有限维欧氏空间中刚性常微分方程数值方法经典理论研究方面,该书还介绍了作者所建立的数值方法稳定程度理论及非刚性泛函微分方程一般多值方法经典收敛理论。该书力图对国内外该领域研究作比较系统全面的介绍,其中包括国际上一些著名工作,如 Merson 和 Butcher 等人关于数值方法阶条件的树结构理论,Butcher 等人所建立的一般多值方法经典理论,以及 Wanner、Hairer 和 Nφrsett 的阶星形理论等。

本书在上述内容基础上所作的实质性扩充部分,主要介绍了作者最近几年所建立的非线性刚性 Volterra 泛函微分方程及其数值方法的一般理论。其内容包括 Banach 空间中非线性刚性 Volterra 泛函微分方程(VFDE)的稳定性、收缩性及渐近稳定性理论,有限维欧氏空间中

非线性刚性 VFDE 问题 Runge-Kutta 法的 B-稳定与 B-收敛理论及收缩性与渐近稳定性理论，有限维欧氏空间中非线性刚性 VFDE 问题一般线性方法的 B-稳定与 B-收敛理论，以及在上述理论指导下所构造的用于求解刚性 VFDE 问题的一系列高阶 B-收敛数值方法和高阶收缩及强收缩（也称严格收缩）Runge-Kutta 法。

上述关于 VFDE 及其数值方法的一般理论为非线性刚性延迟微分方程（DDE）、非线性刚性积分微分方程（IDE）、非线性刚性延迟积分微分方程（DIDE）以及实际问题中所遇到的其他各种类型的刚性泛函微分方程的稳定性、收缩性、渐近稳定性研究及其数值方法的 B-稳定性、B-收敛性、收缩性及渐近稳定性分析提供了统一的理论基础。上述针对一般刚性 VFDE 问题所构造的高阶 B-收敛数值方法及高阶收缩和强收缩 Runge-Kutta 法可直接用于求解刚性 DDEs，IDEs，DIDEs 及其他各种特殊类型的刚性泛函微分方程问题。由此可见，我们所建立的一般理论和方法的确有力地促进了以上各相关领域研究的发展。注意常微分方程也可视为 VFDE 的特例，故上述一般理论也可直接用于刚性常微分方程，从而进一步丰富了刚性常微分方程数值方法理论。

迄今国内外文献中，对于刚性 IDEs 及刚性 DIDEs 的研究很少见到，对于刚性 DDEs 及其数值方法的研究相对较多。例如 1989 年，Torelli 率先研究有限维欧氏空间中的刚性单延迟微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t), y(t-\tau(t))), & t \geq t_0, \\ y(t) = \varphi(t), & t \leq t_0, \end{cases}$$

获得了问题的真解 $y(t)$ 满足收缩性不等式

$$\| y(t) - z(t) \| \leq \max_{\xi \leq t_0} \| \varphi(\xi) - \psi(\xi) \|$$

的充分条件，这里 $z(t)$ 表示将初始函数 $\varphi(t)$ 改为 $\psi(t)$ 之后所得到的扰动解；1997 年，Zennaro 进一步获得了上述问题的真解 $y(t)$ 渐近稳定，或即

$$\lim_{t \to +\infty} \| y(t) - z(t) \| = 0$$

的充分条件。但他们各自获得的充分条件中,都需要延迟量 $\tau(t)$ 满足下面两个十分苛刻的要求:

(a) 存在一个常数 $\tau_0 > 0$,使得 $\tau(t) \geqslant \tau_0 \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$。

(b) $t - \tau(t)$ 是区间 $[t_0, +\infty)$ 上的严格递增函数。

这些苛刻要求导致他们的结果适用范围比较狭窄,例如不适用于比例延迟微分方程。

现在,由于我们建立了一般的刚性 Volterra 泛函微分方程的稳定性、收缩性及渐近稳定性理论,只要将该理论用于上述延迟微分方程的特殊情形,便可直接导出 Torelli 和 Zennaro 的上述结果而无须繁复证明。不仅如此,更为重要的是从我们的一般理论所导出的上述结果可适用于更为广泛的具有任意有限多个变延迟的延迟微分方程,而且不需要对延迟量作上述(a)和(b)两项苛刻限制及其他任何限制。这就是说,从我们的一般理论所导出的结果比上述已有结果更加一般和深刻。由此带来一个副产品是轻而易举地解决了比例延迟微分方程的稳定性、收缩性及渐近稳定性分析问题。

1989 年,Torelli 率先研究非线性刚性常延迟微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)), & t \in [0, +\infty), \\ y(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

的隐式 Runge-Kutta 法,这里恒设连续映射 f 满足条件

$$\begin{cases} \langle f(t,u,x) - f(t,v,x), u - v \rangle \leqslant \alpha(t) \| u - v \|^2 \\ \qquad\qquad \forall t \in [0, +\infty), u, v, x \in \mathbf{R}^m, \\ \| f(t,u,x) - f(t,u,y) \| \leqslant \beta(t) \| x - y \| \\ \qquad\qquad \forall t \in [0, +\infty), u, x, y \in \mathbf{R}^m。 \end{cases}$$

他证明了当

(c) $$\alpha(t) + \beta(t) \leqslant 0$$

时,带线性插值算子的隐式 Euler 法是收缩的,详言之,即是当用带线

性插值算子的隐式 Euler 法，从起始函数 $\varphi(t)$ 出发，按定步长 $h>0$ 求解上述 DDE 问题时，所获数值解 $\{y_n\}$ 满足收缩性不等式

(d) $\|y_n - z_n\| \leq \max\limits_{-\tau\leq t\leq 0}\|\varphi(t) - \psi(t)\|, n = 1,2,3,\cdots,$

这里 $\{z_n\}$ 表示将起始函数 $\varphi(t)$ 改为 $\psi(t)$ 之后所得到的扰动数值解。1992 年，Bellen 和 Zennaro 进一步证明了当条件(c)成立时，带线性插值算子的 2 级 LobattoⅢC 型 Runge-Kutta 法也是收缩的。

自 1992 年起，一直到我们建立上述 VFDE 及其数值方法的一般理论时为止，在长达十余年的时间内，国内外学者一直未能找到除了上述两种方法之外的求解上述 DDE 问题的其他任何收缩方法(或即在假设条件(c)成立时满足收缩性不等式(d)的方法)。这是一个令人十分悲观的局面。于是在 1996 年至 2003 年期间，In't Hout，Zennaro 及 Bellen & Zennaro 先后发表论文，一致认为对于求解上述非线性刚性 DDE 问题的收缩的 Runge-Kutta 法存在一个阶壁垒，即最多不可能超过 2 阶。有的学者认为之所以产生上述阶壁垒，是由于上述收缩性条件(d)的要求太强，主张放松这个要求。

很幸运，在我们所建立的非线性刚性 VFDE 问题 Runge-Kutta 法收缩性理论的指导下，迄今我们已构造了三大类高阶收缩和强收缩的 VFDE Runge-Kutta 法。这些高阶收缩和强收缩 Runge-Kutta 法允许自适应地变步长计算，可直接用于各种特殊情形，例如可直接用于求解带有任意有限多个变延迟的非线性刚性 DDE 问题，也可直接用于求解一般的非线性刚性 IDE 问题及 DIDE 问题。由此可见，我们所建立的一般理论及所构造的高阶收缩和强收缩方法不仅从根本上打破了上述阶壁垒，而且使整个研究向前跨越了一步。

由于时间特别紧，本书未能收入作者在泛函微分方程研究领域所获得的某些最新成果，对于国内外同行专家在该领域所获成果及相关工作也介绍得不够全面。这些内容有待今后本书重新出版时补充进去。

本书可供高年级本科生、研究生、从事计算数学研究的同行朋友

及从事实际计算的科技人员阅读和参考。近年来,有许多研究生和科技人员陆续来函请我设法帮助他们购买《刚性微分方程算法理论》一书,但至今未能如愿。我深望本书的出版能够满足他们的迫切需求。

本书是集中了二十多年来七个国家自然科学基金资助项目的成果而形成的,因此在本书出版的时候,首先我要深切感谢国家自然科学基金委员会对本项研究的大力支持和长期资助,没有这种支持和资助,本书不可能问世。本书中引用了国内外许多同行专家的论著,没有他们的创造性劳动便不可能形成此书,因此我同样要深切感谢这些同行朋友们的支持、鼓励和帮助。最后我衷心感谢湘潭大学出版社对出版此书的热情支持和帮助,感谢文立平教授、肖爱国教授、曹学年教授、余越昕教授和王晚生博士,他们花了大量时间校对本书。

李寿佛

2010 年 7 月 10 日于湘潭大学

目　　录

第一部分　刚性常微分方程数值分析

第一章　引　　论

§1.1　常微分方程 …………………………………………………… (3)
§1.1.1　常微分方程组初值问题 ………………………………… (3)
§1.1.2　解的存在性、唯一性和稳定性 …………………………… (6)
§1.1.3　线性常微分方程组及矩阵预解式 ………………………… (11)
§1.1.4　常系数线性系统及渐近稳定性 …………………………… (13)
§1.1.5　线性差分方程 ……………………………………………… (16)
§1.2　刚性微分方程 …………………………………………………… (22)
§1.2.1　刚性微分方程的实际背景 ………………………………… (22)
§1.2.2　线性刚性问题的数学定义 ………………………………… (22)
§1.2.3　非线性刚性问题的数学定义 ……………………………… (25)
§1.2.4　刚性问题举例 ……………………………………………… (27)

第二章 数值方法经典理论

§2.1 一般多步方法 ………………………………………………………… (32)
§2.2 相容性和零稳定性 ………………………………………………… (34)
§2.2.1 相容性和相容条件 ……………………………………………… (34)
§2.2.2 零稳定性与根条件 ……………………………………………… (37)
§2.3 收敛性 ………………………………………………………………… (41)
§2.3.1 收敛准则及整体误差估计 ……………………………………… (41)
§2.3.2 收敛性与相容性的关系 ………………………………………… (44)
§2.4 线性稳定性 ………………………………………………………… (47)
§2.4.1 线性方法 ………………………………………………………… (47)
§2.4.2 方法的稳定多项式和稳定域 …………………………………… (50)
§2.4.3 线性稳定性的适用范围 ………………………………………… (53)
§2.4.4 各种常用稳定性定义 …………………………………………… (59)
§2.5 稳定程度 …………………………………………………………… (60)
§2.5.1 方法的稳定程度和(δ,p)-稳定域 ……………………………… (61)
§2.5.2 差分方程解的若干表示 ………………………………………… (63)
§2.5.3 稳定程度与稳定域的关系 ……………………………………… (67)
§2.5.4 (δ,p)-稳定域的稳定程度 ………………………………………… (69)
§2.5.5 用(δ,p)-稳定域逼近方法的稳定域 ……………………………… (70)
§2.5.6 稳定程度大于零的条件 ………………………………………… (72)
§2.5.7 稳定程度趋于零的含参多步方法 ……………………………… (74)
§2.6 一般多值方法 ……………………………………………………… (80)
§2.6.1 一般多值方法及其不同表示 …………………………………… (80)
§2.6.2 一般线性方法 …………………………………………………… (82)
§2.6.3 一些基本概念 …………………………………………………… (85)
§2.6.4 零稳定的各种等价条件 ………………………………………… (86)
§2.6.5 一般多值方法的收敛准则 ……………………………………… (89)
§2.6.6 预相容及相容条件 ……………………………………………… (90)
§2.6.7 拟相容性及其与收敛性的关系 ………………………………… (93)

§2.6.8　一般线性方法的线性稳定性 …………………………… (98)
§2.7　整体误差的渐近展式 …………………………………… (99)
§2.7.1　单步方法整体误差渐近展式 ………………………… (99)
§2.7.2　伴随方法及对称方法 ……………………………… (102)
§2.7.3　仅含有偶次幂的整体误差渐近展式 ………………… (107)
§2.7.4　一般多值方法整体误差渐近展式 ………………… (108)
§2.7.5　一般多步方法整体误差渐近展式 ………………… (115)
§2.8　泛函微分方程的$(A,B,\mathscr{D})$-方法 ………………………… (120)
§2.8.1　$(A,B,\mathscr{D})$-方法 …………………………………………… (120)
§2.8.2　相容性和零稳定性 ………………………………… (127)
§2.8.3　收敛准则 …………………………………………… (134)
§2.8.4　应用举例 …………………………………………… (138)

第三章　线性稳定性分析

§3.1　线性多步法及有关方法 …………………………………… (142)
§3.1.1　线性多步法稳定性分析 …………………………… (142)
§3.1.2　向后微分公式 ……………………………………… (159)
§3.1.3　向后微分公式的改进 ……………………………… (162)
§3.1.4　广义向后微分公式 ………………………………… (164)
§3.1.5　Enright 方法 ………………………………………… (166)
§3.2　Runge-Kutta 法 ………………………………………… (168)
§3.2.1　Runge-Kutta 法概述 ………………………………… (168)
§3.2.2　Runge-Kutta 法的阶条件 …………………………… (172)
§3.2.3　Runge-Kutta 法稳定性分析 ………………………… (187)
§3.2.4　基于高阶数值积分公式的隐式 Runge-Kutta 法 ………… (201)
§3.2.5　单隐 Runge-Kutta 法及 Butcher 变换 ……………… (214)
§3.3　刚性微分方程的收缩方法 ……………………………… (226)
§3.3.1　一般多步方法的收缩性 …………………………… (227)
§3.3.2　A-收缩和$A(\alpha)$-收缩的二阶导数方法 ………………… (233)
§3.3.3　A-收缩和$A(\alpha)$-收缩的混合方法 ……………………… (238)

§3.4 并行算法 …………………………………………………… (245)
§3.4.1 并行多步 Runge-Kutta 预校算法 ……………………… (245)
§3.4.2 并行 Adams 预校算法 ………………………………… (255)
§3.4.3 刚性问题的并行多步混合方法 ………………………… (259)

第四章 非线性稳定性分析

§4.1 Hilbert 空间中的试验问题 ………………………………… (265)
§4.1.1 问题类 $K_{\sigma,\tau}$ ……………………………………………… (266)
§4.1.2 试验问题的基本性质 …………………………………… (267)
§4.2 单支方法和线性多步法的稳定准则 ……………………… (270)
§4.2.1 G-稳定性及 $G(c,p,q)$-代数稳定性……………………… (270)
§4.2.2 $G(c,p,q)$-代数稳定准则 ………………………………… (271)
§4.2.3 单支方法与线性多步法的关系 ………………………… (272)
§4.2.4 线性多步法的稳定准则及与单支方法比较 …………… (274)
§4.2.5 稳定准则的应用 ………………………………………… (276)
§4.3 Runge-Kutta 法的稳定准则 ……………………………… (280)
§4.3.1 代数稳定性及 (θ,p,q)-代数稳定性 …………………… (280)
§4.3.2 (θ,p,q)-代数稳定准则 ………………………………… (282)
§4.3.3 积分型 Runge-Kutta 法的代数稳定性…………………… (286)
§4.4 一般线性方法的非线性稳定性 …………………………… (288)
§4.4.1 (k,p,q)-稳定性 ………………………………………… (291)
§4.4.2 (k,p,q)-弱代数稳定准则 ……………………………… (297)
§4.4.3 弱代数稳定准则的应用 ………………………………… (304)
§4.5 多步 Runge-Kutta 法的代数稳定性………………………… (311)
§4.5.1 多步 Runge-Kutta 法……………………………………… (311)
§4.5.2 代数稳定的必要充分条件 ……………………………… (313)
§4.5.3 简化条件的若干性质 …………………………………… (315)
§4.5.4 简化条件与代数稳定性 ………………………………… (317)
§4.5.5 高阶代数稳定的多步 Runge-Kutta 法及其分类 ………… (321)
§4.5.6 Ⅰ至Ⅵ类代数稳定方法的构造…………………………… (324)

§4.6 Banach 空间中的试验问题 …………………………………… (330)
§4.6.1 问题类 $K(\mu,\lambda^*)$ 及 $K(\mu,\lambda^*,\delta)$ ………………………… (330)
§4.6.2 试验问题的基本性质 ………………………………… (331)
§4.6.3 试验问题类的子类 $K1$、$K2\lambda^*$ 和 $K3\mu$ …………………… (333)
§4.6.4 Hilbert 空间情形下试验问题的性质 …………………… (334)
§4.6.5 试验微分方程条件估计 ……………………………… (337)
§4.7 对数矩阵范数 ……………………………………………… (339)
§4.7.1 对数矩阵范数及其基本性质 ………………………… (339)
§4.7.2 最小单边 Lipschitz 常数 ……………………………… (341)
§4.7.3 基于对数矩阵范数的微分方程条件估计 ……………… (342)
§4.8 一类多步方法的非线性稳定性 ………………………… (344)
§4.8.1 系数依赖于步长的多步方法 ………………………… (344)
§4.8.2 方法关于 $K(\mu,\lambda^*)$ 类问题的稳定性 ……………………… (345)
§4.8.3 方法关于 $K(\mu,\lambda^*,\delta)$ 类问题的稳定性 ………………… (347)
§4.8.4 若干推论 …………………………………………………… (349)
§4.9 显式及对角隐式 Runge-Kutta 法的非线性稳定性 ……………… (352)
§4.9.1 B_l-稳定性及其准则 …………………………………… (353)
§4.9.2 主要结果的证明 ………………………………………… (357)
§4.9.3 B_l-稳定方法举例 ………………………………………… (360)
§4.10 多步多导数方法的非线性稳定性 ………………………… (366)
§4.10.1 问题类 $K_\varphi^{(p)}$ 及其性质 ……………………………… (366)
§4.10.2 多步多导数法的稳定性准则 ………………………… (372)
§4.10.3 应用举例 ………………………………………………… (375)

第五章 B-收敛理论

§5.1 一般线性方法的 B-理论基础 ………………………………… (378)
§5.1.1 B-收敛概念 ……………………………………………… (379)
§5.1.2 B-相容性和 B-稳定性 ………………………………… (382)
§5.1.3 BS-稳定性和 BSI-稳定性 ……………………………… (386)
§5.1.4 级阶和广义级阶 …………………………………………… (387)

§5.1.5 B-相容和 BH-相容的条件 …… (387)
§5.1.6 B-稳定和弱 B-稳定的条件 …… (390)
§5.1.7 B-收敛准则 …… (392)
§5.1.8 B-稳定的其他代数条件 …… (398)
§5.2 单支方法和线性多步法的 B-收敛性 …… (404)
§5.2.1 A-稳定等价于 B-稳定 …… (404)
§5.2.2 A-稳定单支方法的最佳 B-收敛阶 …… (407)
§5.2.3 A-稳定线性多步法的最佳 B-收敛阶 …… (409)
§5.2.4 线性多步法起始值计算的技巧 …… (415)
§5.3 数值方法的可行性 …… (417)
§5.3.1 一类算子方程解的存在及唯一性 …… (417)
§5.3.2 多级多值多导数方法的可行性 …… (423)
§5.3.3 多步多导数方法的可行性 …… (428)
§5.3.4 一般线性方法的可行性 …… (429)
§5.4 B-收敛的多步 Runge-Kutta 法 …… (432)
§5.4.1 多步 Runge-Kutta 法的级阶和广义级阶 …… (432)
§5.4.2 多步 Runge-Kutta 法的对角稳定性 …… (436)
§5.4.3 多步 Runge-Kutta 法的 B-收敛阶 …… (438)
§5.4.4 Ⅰ至Ⅵ类代数稳定多步 Runge-Kutta 法的 B-收敛性 …… (439)
§5.4.5 B-收敛多步 Runge-Kutta 法举例 …… (440)
§5.5 B-理论的进一步推广 …… (447)
§5.5.1 正规问题类和示性矢量 …… (448)
§5.5.2 B-收敛概念一般化 …… (457)
§5.5.3 B-相容性和 B-稳定性的推广 …… (459)
§5.5.4 B-收敛准则的推广 …… (462)
§5.5.5 线性刚性问题数值解的 B-收敛阶 …… (466)
§5.5.6 高阶 B-收敛的多步多导数法 …… (470)
参考文献 …… (480)

第二部分　刚性泛函微分方程数值分析

第六章　刚性泛函微分方程稳定性理论及其数值方法的 B-理论

§6.1　刚性 Volterra 泛函微分方程稳定性理论 ……………………… (497)

§6.1.1　引言 …………………………………………………… (497)

§6.1.2　稳定性与广义收缩性 ………………………………… (500)

§6.1.3　严格收缩性与渐近稳定性 …………………………… (508)

§6.2　VFDE-Runge-Kutta 法的 B-理论 ……………………………… (512)

§6.2.1　引言 …………………………………………………… (512)

§6.2.2　VFDE-RK 方法的 B-稳定性 …………………………… (517)

§6.2.3　VFDE-RK 方法的 B-相容性与 B-收敛性 ……………… (526)

§6.2.4　VFDE-RK 方法的收缩性与渐近稳定性 ……………… (531)

§6.2.5　用于非线性刚性延迟微分方程 ……………………… (540)

§6.2.6　用于非线性刚性延迟积分微分方程 ………………… (544)

§6.3　VFDE 一般线性方法的 B-理论 ……………………………… (549)

§6.3.1　引言 …………………………………………………… (549)

§6.3.2　VFDE-GL 方法的 B-稳定性 …………………………… (551)

§6.3.3　VFDE-GL 方法的 B-相容性与 B-收敛性 ……………… (559)

§6.4　数值试验 ……………………………………………………… (566)

参考文献 …………………………………………………………… (576)