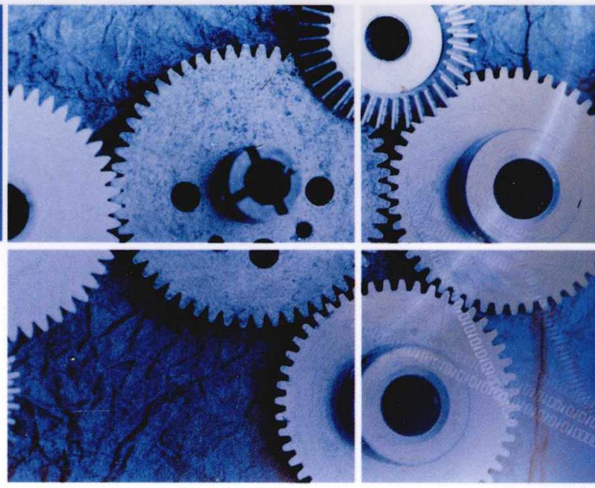
普通高等教育“十二五”规划教材



测试技术习题与题解

王明赞　李佳　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

测试技术习题与题解

王明赞　李　佳　编

机 械 工 业 出 版 社

书中习题的选择注重联系实际，共352题，并附有参考答案。题型包括单项选择、填空、简答题和应用题。其中78个简答题和108个应用题均有较详细的解答，可作例题。习题背景分两大部分，第一部分为测试技术的基础知识，包括信号的分类和描述、测量误差的分析和处理、测量系统的特性、常用传感器的变换原理、信号的调理和记录、信号的分析和处理、计算机数据采集与分析系统等；第二部分为常用机械工程参数的测试，包括力和扭矩、机械振动、噪声、位移、温度和流体参数等。

本书可作为机械工程测试技术、传感器与测试技术等课程的学习参考书，同时也可供实际的工程实验参考。

图书在版编目（CIP）数据

测试技术习题与题解/王明赞，李佳 编. —北京：机械工业出版社，2011.8

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-111-35656-1

Ⅰ.①测… Ⅱ.①王…②李… Ⅲ.①测试技术-高等学校-教材 Ⅳ.①TB4

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第166495号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：刘小慧 责任编辑：刘小慧 张利萍 邓海平

版式设计：霍永明 责任校对：刘秀丽

封面设计：张 静 责任印制：杨 曦

北京京丰印刷厂印刷

2011年10月第1版·第1次印刷

184mm×260mm·6.75印张·161千字

标准书号：ISBN 978-7-111-35656-1

定价：15.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

社服务中心：(010)88361066

销 售 一 部：(010)68326294

销 售 二 部：(010)88379649

读者购书热线：(010)88379203

网络服务

门户网：http://www.cmpbook.com

教材网：http://www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

前　　言

测试技术是机械类专业的一门重要的技术基础课，要求深厚的数学、物理基础和广泛的背景知识，其主要的先修课程有高等数学、工程数学、理论力学、材料力学、电工技术和电子技术等。作为数理学科，尤其要做大量的习题和必要的实验，才能掌握课程要求的知识和技能。为了提供课程的复习指南，我们编写了这本习题集。习题类型包括单选题、填空题、简答题和应用题，考核内容包括基本概念、基本知识、基本原理和应用能力。虽然给了较完整的答案，但是建议学生在独立完成作业后再参考答案，其中部分应用题有多种解法，并且答案繁简不一，仅供参考。

书中的习题涉及测试技术的基础理论和应力、振动、噪声、位移、温度、压强和流量等机械参数的测试技术。

本书编写过程中参考了多种教材和文献，得到了同仁孙红春、林贵瑜、韩庆大、梅国辉、杨英等的支持和帮助，最后由张洪亭审阅，特此向他们致谢。对本书存在的问题，望读者不吝批评和指正。

编　者

目　录

1　信号的分类和描述

1.1　单选题

1. 周期信号的频谱是（　　）。

（A）离散的，只发生在基频整数倍的频率

（B）连续的，随着频率的增大而减小

（C）连续的，只在有限区间有非零值

（D）离散的，各频率成分的频率比不是有理数

2. 瞬变信号的频谱是（　　）。

（A）离散的，只发生在基频整数倍的频率

（B）连续的，随着频率的增大而减小

（C）连续的，只在有限区间有非零值

（D）离散的，各频率成分的频率比不是有理数

3. 对于 $x(t)=2\sin(2\pi t+0.5)+\cos(\pi t+0.2)$ 和 $y(t)=e^{-t}\sin(\pi t+0.5)$ 两个信号，下面的描述正确的是（　　）。

（A）$x(t)$是周期信号，$y(t)$是瞬变信号　　（B）$y(t)$是周期信号，$x(t)$是瞬变信号

（C）都是周期信号　　（D）都是瞬变信号

4. 若 $F[x(t)]=X(f)$，k 为大于零的常数，则有 $F[x(kt)]=$（　　）。

（A）$X\left(\frac{f}{k}\right)$　　（B）$kX(kf)$　　（C）$\frac{1}{k}X(kf)$　　（D）$\frac{1}{k}X\left(\frac{f}{k}\right)$

5. 信号 $x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ 的方均根值 x_{rms} 为（　　）。

（A）A　　（B）$\frac{A}{2}$　　（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}A$　　（D）$\sqrt{A}$

6. 若时域信号为 $x(t)y(t)$，则相应的频域信号为（　　）。

（A）$X(f)Y(f)$　　（B）$X(f)+Y(f)$　　（C）$X(f)*Y(f)$　　（D）$X(f)-Y(f)$

7. 概率密度函数曲线下的面积等于（　　）。

（A）0.1　　（B）0.7　　（C）1　　（D）2.0

8. 方波是由（　　）合成的。

（A）奇次谐波的时间波形　　（B）偶次谐波的时间波形

（C）包括奇次谐波和偶次谐波的时间波形　（D）以上都不是

9. 关于随机过程的概率密度，以下表述中，（　　）是不正确的。

（A）不同的随机信号有不同概率密度函数的图形，可以根据图形判别信号的性质

（B）概率密度函数表示随机信号的频率分布

（C）概率密度函数是概率分布函数的导数

（D）对于各态历经过程，可以根据离散的样本值估计概率密度函数

10. 在以下傅里叶变换对中，（　　）是不正确的。

（A）$\delta(t)\Leftrightarrow 1$　（B）$1\Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$　（C）$\delta(t-t_0)\Leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}$　（D）$e^{-j2\pi f t_0}\Leftrightarrow\delta(f-f_0)$

1.2 填空题

1. 能用确切数学式表达的信号称为（　　）信号，不能用确切数学式表达的信号称为（　　）信号。

2. 若周期信号的周期为 T，则在其幅值谱中，谱线高度表示（　　）。

3. 任何样本的时间平均等于总体平均（集合平均）的随机信号称为（　　）信号。

4. 若信号的自变量和幅值都是连续的，则称为（　　）信号；若信号的自变量和幅值都是离散的，则称为（　　）信号。

5. 实际测试中常把随机信号按（　　）处理，于是可以通过测得的有限个函数的时间平均值估计整个随机过程。

6. 已知一个正弦信号，从任意时刻开始记录其波形，所得正弦波的（　　）是随机变量。

1.3 简答题

1. 在时域比较周期信号和瞬变信号。

周期信号和瞬变信号都可以用确定性的数学函数表示。周期信号以一定的时间间隔呈现周期性重复，瞬变信号只在有限区间有非零值或随时间延续衰减到零。

2. 瞬变信号的频谱与周期信号的频谱有何相同点和不同点？

瞬变信号的幅值频谱$|X(f)|$与周期信号的幅值频谱$|c_n|$均为幅值频谱；但$|c_n|$的量纲与信号幅值的量纲一样，$|X(f)|$的量纲与信号幅值的量纲不一样，它是单位频宽上的幅值。

瞬变信号的频谱具有连续性和衰减性，周期信号的频谱具有离散性、谐波性和收敛性。

3. 试述平稳随机信号与各态历经信号的特点及相互关系。

平稳随机信号的统计特征不随时间的平移而变化。平稳随机信号可分为各态历经信号和非各态历经信号。如果平稳随机信号的时间平均等于集合平均，则称其为各态历经信号。

1.4 应用题

1. 求正弦信号 $x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$的绝对均值$\mu_{|x|}$、方均根值 $x_{rms}(t)$及概率密度函数 $p(x)$。

解:

$$\mu_{|x|}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}A\,|\sin(\omega t+\varphi)|\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2A}{T}\int_{0}^{T/2}\sin\omega t\mathrm{d}t=-\frac{A}{\pi}\cos\omega t\Big|_{0}^{T/2}=\frac{2A}{\pi}$$

$$\psi_x^2=\frac{1}{T}\int_0^T A^2\sin^2\omega t\mathrm{d}t=\frac{A^2}{T}\int_0^T\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\mathrm{d}t=\frac{A^2}{2}$$

$$x_{\mathrm{rms}}(t)=\sqrt{\psi_x^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}A$$

取

$$x(t)=A\sin\omega t$$

有

$$\mathrm{d}x=A\omega\cos\omega t\mathrm{d}t$$

$$p(x)=\frac{2}{T}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{T}\frac{1}{A\omega\cos\omega t}=\frac{1}{\pi A\sqrt{1-\sin^2\omega t}}=\frac{1}{\pi\sqrt{A^2-x^2}}$$

2. 求双边指数函数 $x(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-at} & t\geqslant 0\\ \mathrm{e}^{at} & t<0\end{cases}$ $(a>0)$ 的频谱函数。

解: $x(t)$ 是一个非周期信号，它的频谱函数是傅里叶变换的结果

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(a-\mathrm{j}2\pi f)t}\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{j}2\pi f)t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a-\mathrm{j}2\pi f}+\frac{1}{a+\mathrm{j}2\pi f}=\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$$

3. 求图 1-1 所示的周期三角脉冲的傅里叶级数（三角函数形式和复指数形式），并求其频谱。周期三角脉冲的数学表达式为

$$x(t)=\begin{cases}A+\dfrac{2A}{T}t & -\dfrac{T}{2}\leqslant t<0\\[2mm] A-\dfrac{2A}{T}t & 0\leqslant t<\dfrac{T}{2}\end{cases}$$

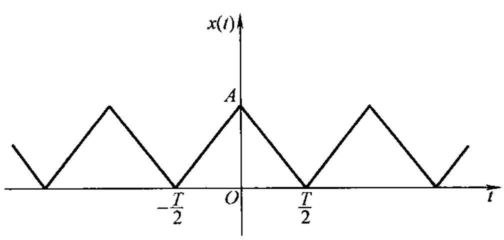


图 1-1　周期三角脉冲

解：将 $x(t)$ 展开成三角函数形式的傅里叶级数。计算傅里叶系数：

因为 $x(t)$ 是偶函数，所以

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\,\frac{TA}{2} = \frac{A}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\left(A - \frac{2A}{T}t\right)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\left(-\frac{2A}{T}t\right)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t = -\frac{8A}{T^2}\int_0^{T/2} t\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t$$

分部积分计算的竖式为

$$\begin{array}{ll} t & \cos n\omega_0 t \\ 1 & \frac{1}{n\omega_0}\sin n\omega_0 t \\ 0 & -\frac{1}{n^2\omega_0^2}\cos n\omega_0 t \end{array}$$

于是，有

$$a_n = -\frac{8A}{T^2}\left(\frac{t}{n\omega_0}\sin n\omega_0 t + \frac{1}{n^2\omega_0^2}\cos n\omega_0 t\right)\Bigg|_0^{T/2} = \begin{cases} \dfrac{4A}{\pi^2 n^2} & n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

由此得 $x(t)$ 的三角函数形式的傅里叶级数展开式

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos n\omega_0 t$$

n 次谐波分量的幅值为

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{4A}{n^2\pi^2}$$

n 次谐波分量的相位为

$$\varphi_n = \arctan\frac{a_n}{b_n} = \frac{\pi}{2}$$

将 $x(t)$ 展开成复指数形式的傅里叶级数。计算傅里叶系数：

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{A}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)(\cos n\omega_0 t - \mathrm{j}\sin n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{2A}{\pi^2 n^2} & n = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\cdots \\ 0 & n = \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 6,\cdots \end{cases}$$

由此得 $x(t)$ 的复指数形式的傅里叶级数展开式

$$x(t)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi^2}\sum_{n=\pm1,\pm3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0t}$$

n 次谐波分量的幅值为

$$|c_n|=|-c_n|=\frac{2A}{n^2\pi^2}$$

n 次谐波分量的相位为

$$\varphi_n=0$$

4. 求被矩形窗截断的余弦函数 $\cos\omega_0t$（见图 1-2）的频谱。

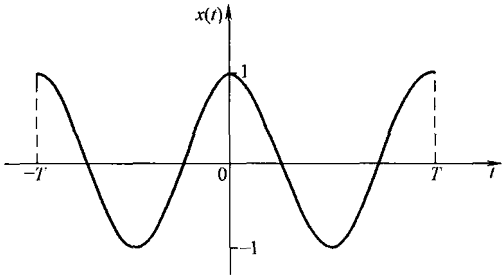


图 1-2 被矩形窗截断的余弦函数

解:

$$x(t)=\begin{cases}\cos\omega_0t & |t|\leqslant T\\ 0 & |t|>T\end{cases}$$

$$X(\omega)=\int_{-T}^{T}\cos\omega_0t\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=2\int_0^T\cos\omega_0t\cos\omega t\mathrm{d}t=\int_0^T[\cos(\omega+\omega_0)t+\cos(\omega-\omega_0)t]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sin[(\omega+\omega_0)T]}{\omega+\omega_0}+\frac{\sin[(\omega-\omega_0)T]}{\omega-\omega_0}=T\mathrm{sinc}[(\omega+\omega_0)T]+T\mathrm{sinc}[(\omega-\omega_0)T]$$

或者

$$X(\omega)=\int_{-T}^{T}\cos\omega_0t\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega+\omega_0)t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)t})\mathrm{d}t$$

$$=T\mathrm{sinc}[(\omega+\omega_0)T]+T\mathrm{sinc}[(\omega-\omega_0)T]$$

5. 求指数衰减函数 $x(t)=\mathrm{e}^{-at}\cos\omega_0t$ 的频谱函数 $X(f)$（$a>0,t\geqslant0$）。

解:

单边指数函数 $y(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-at} & (t\geqslant0,a>0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$ 的傅里叶变换为

$$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}$$

因为

$$\cos\omega_0 t=\frac{e^{-j\omega_0 t}+e^{j\omega_0 t}}{2}$$

由位移性质，有

$$X(\omega)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+j(\omega+\omega_0)}+\frac{1}{a+j(\omega-\omega_0)}\right]$$

于是，有

$$|X(f)|=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+4\pi^2(f+f_0)^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+4\pi^2(f-f_0)^2}}\right]$$

2 测量误差的分析和处理

2.1 单选题

1. 使用一个温度探测器时，下列关于误差的描述中，不正确的是（　　）。

（A）滞后是系统误差　　（B）重复性反映系统误差

（C）零漂反映系统误差　　（D）分辨率误差是随机误差

2. 如果多次重复测量时存在恒值系统误差，那么下列结论中不正确的是（　　）。

（A）测量值的算术平均值中包含恒值系统误差

（B）在偏差核算过程中，前后两组的离差和的差值显著地不为零

（C）修正恒值系统误差的方法是引入与其大小相等、符号相反的修正值

（D）恒值系统误差对离差的计算结果不产生影响

3. 下列关于测量误差和测量准确度的描述中，正确的是（　　）。

（A）测量中的随机误差越小，测量的准确度越高

（B）精密度反映测量中系统误差的大小

（C）在排除系统误差的条件下，准确度和精密度是一致的，统称为准确度

（D）可以根据测量仪表的精密度修正测量的结果

2.2 填空题

1. 在随机误差分析中，标准误差 σ 越小，说明信号波动越（　　）。

2.（　　）是对应于事件发生概率峰值的随机变量的值。

3.（　　）误差的大小决定测量数值的准确度。

4.（　　）误差的大小决定测量数值的精密度。

5. 引用误差是测量的（　　）误差与仪表的测量上限或量程之比。

6. 在实际测量中，测量次数总是有限的。为了区别绝对误差，可以用（　　）表示测量值与有限次测量的平均值之差。

2.3 简答题

1. 使用一个温度探测器时，已测定下列误差：

滞后	±0.1℃	系统误差
读数的0.2%		随机误差
重复性	±0.2℃	随机误差
分辨率误差	±0.05℃	随机误差

零漂　　0.1℃　　系统误差

试确定这些误差的类型（误差的类型如上所列）。

2. 在足够多次的测量数据中，如何根据莱茵达准则和肖维纳准则确定测量数据的取舍？

确定测量数据舍弃的步骤可归纳如下：

（1）求出测量数据的算术平均值 $\bar{x}$ 及标准差（方均根误差）σ；

（2）将可疑数据的误差 δ_i 与上述准则作比较，凡绝对值大于 3σ 或 $c\sigma$（c 值通过查表得到）的就舍弃；

（3）舍弃数据后，重复上述过程，看是否还有超出上述准则的数据需要舍弃。

3. 实验数据处理的主要内容是什么？

一般包括计算平均值，剔除可疑数据，去掉不合理的倾向（系统误差），判断实验数据的可靠程度和误差的大小，进行必要的分析。

2.4 应用题

1. 表 2-1 所示是对某个长度的测量结果

表 2-1　长度的测量结果

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
读数 x/cm	49.3	50.1	48.9	49.2	49.3	50.5	49.9	49.2	49.8	50.2

试计算测量数据的标准离差、均值、中位数和众数。

解： 均值

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{10} x_i = 49.64$$

标准离差

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} \frac{(x - \bar{x})^2}{10 - 1}} = 0.5296$$

数据从小到大排列为

48.9　49.2　49.2　49.3　49.3　49.8　49.9　50.1　50.2　50.5

所以

$$中位数 = (49.3 + 49.8)/2 = 49.55$$

$$众数 = 49.2, 49.3$$

2. 为测定某一地区的风速，在一定时间内采集 40 个样本。测量的平均值为 30km/h，样本的标准离差为 2km/h。试确定风速平均值为 95% 的置信区间。

解： 期望的置信水平是 95%，$1 - \alpha = 0.95$，$\alpha = 0.05$。因为样本数大于 30，所以可以使用正态分布确定置信区间。所以 $z = 0$ 和 $z_{\alpha/2}$ 之间的面积为 $0.5 - \alpha/2 = 0.475$。可以把这个概率（面积）值代进正态分布表求出相应的 $z_{\alpha/2}$ 值，该 $z_{\alpha/2}$ 值为 1.96。把样本标准离差 S 作为近似的样本标准差 σ，可以估计 μ 的误差区间为

$$\bar{x} - \frac{z_{\alpha/2} S}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{x} + \frac{z_{\alpha/2} S}{\sqrt{n}}$$

$$30-1.96\times\frac{2}{6.3245}\leqslant\mu\leqslant30+1.96\times\frac{2}{6.3245}$$

$$30-0.620\leqslant\mu\leqslant30+0.620$$

这可以陈述为置信水平95%的平均风速值预计为(30±0.620)km/h。

3. 为估计一种录像机（VCR）的废品率，10个被试验的系统有故障发生。计算的平均寿命和标准离差分别为1500h和150h。

（1）试估计这些系统95%的置信区间的寿命平均值。

（2）对于50h的寿命平均值，在这些系统中试验多少次才得到95%的置信区间?

解:（1）因为样本数 $n<30$，所以使用 t 分布估计置信区间。与置信水平95%对应的 α 为0.05。由 t 分布表，当 $v=n-1=9$ 和 $\alpha/2=0.025$ 时，有 $t_{\alpha/2}=2.262$。由95%的置信区间，平均故障时间将为

$$\mu=\bar{x}\pm t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}=1500\pm2.262\times\frac{150}{\sqrt{10}}=1500\pm107$$

这可以陈述为置信水平95%的置信区间的寿命平均值为(1500±107)h。

应该注意，如果增加置信水平，则估计的区间也将扩展，反之亦然。

（2）因为预先未知样本数，所以不能选择适当的 t 分布曲线。因此用试算法来求解。为了获得样本数 n 的初步估计，假设 $n>30$，因此可以使用正态分布。置信区间为

$$\bar{x}\pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\bar{x}\pm50$$

于是，有

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=50\text{ 和 }n=\left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{50}\right)^2$$

由正态分布表查得 $z_{\alpha/2}=1.96$，于是，有

$$n=\left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{50}\right)^2=\left(1.96\,\frac{150}{50}\right)^2=35$$

4. 为合理估计一锅炉 NO_x 的排量，对废气进行15次试验。排量的平均值为 25×10^{-6}，标准差为 3×10^{-6}。试确定锅炉 NO_x 排量的标准差为95%的置信区间。

解: 设总体是正态分布的，有

$$v=n-1=14\quad\alpha=1-0.95=0.05\quad\alpha/2=0.025$$

对 $v=14$，$\alpha/2=0.025$ 和 $1-\alpha/2=0.975$ 查表，有

$$\chi^2_{14,0.025}=26.119\text{ 和 }\chi^2_{14,0.975}=5.6287$$

于是，可以确定标准差的区间为

$$(15-1)\times3^2/26.119\leqslant\sigma^2\leqslant(15-1)\times3^2/5.6287\text{，即 }4.824\leqslant\sigma^2\leqslant22.385$$

$$2.196\leqslant\sigma\leqslant4.731$$

5. 为了计算一个电阻性电路功率消耗，已测得电压和电流为 $U=(100\pm2)$V，$I=(10\pm0.2)$A。假设 U 和 I 的置信水平相同，试求计算功率时的最大可能误差及最佳估计误差。要使功率最佳估计误差达到±10W，电压和电流应限制在什么范围（两者误差的变化率相等）?

解：$P=UI$，计算 P 对 U 和 I 的偏导数，得

$$\frac{\partial P}{\partial U}=I=10.0\mathrm{A},\frac{\partial P}{\partial I}=U=100.0\mathrm{V}$$

于是，有

$$(w_P)_{\max}=\left|\frac{\partial P}{\partial U}w_U\right|+\left|\frac{\partial P}{\partial I}w_I\right|=(10\times2+100\times0.2)\mathrm{W}=40\mathrm{W}$$

$$w_P=\left[\left(\frac{\partial P}{\partial U}w_U\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial I}w_I\right)^2\right]^{1/2}=[(10\times2)^2+(100\times0.2)^2]^{1/2}\mathrm{W}=28.3\mathrm{W}$$

$$2\mathrm{V}\times10/28.3=0.71\mathrm{V}$$

$$0.2\mathrm{A}\times10/28.3=0.071\mathrm{A}$$

电压和电流分别为

$$U=(100\pm0.71)\mathrm{V}$$

$$I=(10\pm0.071)\mathrm{A}$$

注：最大误差40W 是功率的4%（$P=UI=100\mathrm{V}\times10\mathrm{A}=1000\mathrm{W}$），而方均根误差估计28.3W 是功率的2.8%，最大误差的估算值在大多数情况下过高。

6. 用孔板流量计测量流体的流量。在实验中，孔板的流量系数 K 是通过收集在一定的时间内和恒定的水头下流过孔板的水并称其重量而获得的。K 的计算公式如下

$$K=\frac{M}{tA\rho(2g\Delta h)^{1/2}}$$

已知在95%置信水平下的参数值如下：

质量 $M=(865.00\pm0.05)\mathrm{kg}$；时间 $t=(600.0\pm1)\mathrm{s}$；密度 $\rho=(62.36\pm0.1)\mathrm{kg/m^3}$；直径 $d=(0.500\pm0.001)\mathrm{cm}$（$A$ 是面积）；水头 $\Delta h=(12.02\pm0.01)\mathrm{m}$。

求 K 的值及其误差（95%的置信水平）和最大可能误差。

解：

$$K=\frac{M}{tA\rho(2g\Delta h)^{1/2}}=\frac{4\times865}{600\times3.1416\times0.005^2\times63.26\times(2\times9.8\times12.02)^{1/2}}=76.71$$

$$\frac{w_K}{K}=\left[\left(\frac{w_M}{M}\right)^2+\left(\frac{w_t}{t}\right)^2+\left(\frac{w_\rho}{\rho}\right)^2+\left(2\frac{w_d}{d}\right)^2+\left(\frac{w_{\Delta h}}{2\Delta h}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$=\left[\left(\frac{0.05}{865}\right)^2+\left(\frac{1}{600}\right)^2+\left(\frac{0.1}{62.36}\right)^2+\left(2\times\frac{0.001}{0.5}\right)^2+\left(\frac{0.01}{2\times12.02}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$=(3.341\times10^{-9}+2.7778\times10^{-6}+2.5715\times10^{-6}\times16\times10^{-6}+0.1730\times10^{-6})^{1/2}$$

$$=4.640\times10^{-3}$$

$$w_K=76.71\times4.640\times10^{-3}=0.356$$

$$\frac{w_{K\max}}{K}=\frac{w_M}{M}+\frac{w_t}{t}+\frac{w_\rho}{\rho}+2\frac{w_d}{d}+\frac{w_{\Delta h}}{2\Delta h}$$

$$=\frac{0.05}{865}+\frac{1}{600}+\frac{0.1}{62.36}+2\times\frac{0.001}{0.5}+\frac{0.01}{2\times12.02}=7.744\times10^{-3}$$

$$w_{K\max}=76.71\times7.744\times10^{-3}=0.594$$

7. 变量 R_1，R_2，R_3 和 R_4 与三个独立的变量 x_1，x_2 和 x_3 之间的关系如下：

$R_1 = ax_1 + bx_2 + cx_3$； $R_2 = dx_1x_2x_3$； $R_3 = ex_1x_2/x_3$； $R_4 = fx_1^g x_2^h x_3^i$
式中，a，b，c，d，e，f，g，h，i 均为常数。在每种情况中就单个变量的误差推导结果的误差 w_R。

解：

$$w_{R1} = [(aw_{x1})^2 + (bw_{x2})^2 + (cw_{x3})^2]^{1/2}$$

$$w_{R2} = \left[\left(\frac{w_{x1}}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{w_{x2}}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{w_{x3}}{x_3}\right)^2\right]^{1/2} R_2$$

$$w_{R3} = \left[\left(\frac{w_{x1}}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{w_{x2}}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{w_{x3}}{x_3}\right)^2\right]^{1/2} R_3$$

$$w_{R4} = \left[\left(g\frac{w_{x1}}{x_1}\right)^2 + \left(h\frac{w_{x2}}{x_2}\right)^2 + \left(i\frac{w_{x3}}{x_3}\right)^2\right]^{1/2} R_4$$

8. 杨氏弹性模量(E)通过关系式 $F/A = E(\delta L/L)$ 建立了固体中的应变 $\delta L/L$ 与外应力 F/A 之间的关系。使用一台拉力机确定 E，并且 F、L、δL 和 A 都已被测出。它们置信水平为 95% 的误差分别是 0.5%，1%，5% 和 1.5%。试计算这些被测量中哪一个对误差的影响最大？如何能把 E 的误差减少 50%？

解：

$$E = \frac{FL}{A\delta L}$$

$$w_E = \left[\left(\frac{w_F}{F}\right)^2 + \left(\frac{w_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{w_{\delta L}}{\delta L}\right)^2 + \left(\frac{w_A}{A}\right)^2\right]^{1/2} E$$

$$= (0.005^2 + 0.01^2 + 0.05^2 + 0.015^2)^{1/2} E = 0.053E$$

δL 对误差的影响最大。

$$\left(\frac{w_{\delta L}}{\delta L}\right)^2 = \left(\frac{0.053}{2}\right)^2 - 0.005^2 - 0.01^2 - 0.015^2$$

解得

$$\frac{w_{\delta L}}{\delta L} = 0.019$$

把 δL 的误差减小到 1.9%，可把 E 的误差减少 50%。

9. 在一个管道中进行温度测量，已记录了下列读数（单位为℃）：

248.0, 248.5, 249.6, 248.6, 248.2, 248.3, 248.2, 248.0, 247.5, 248.1

试计算平均温度、单独测量的随机误差和测量均值的随机误差（置信水平为 95%）。

解： 若 x_i 表示燃烧值，则平均值为

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 248.3℃$$

样品的标准差（精密度指数）为

$$S_x = \left[\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}\right]^{1/2} = 0.5477℃$$

使用置信水平 95% 的学生 t 分布和 $10 - 1 = 9$ 的自由度，由参考文献［1］（表 2.3）

可以查得 t 值为

$$t=2.26$$

每个样本的精密极限为

$$P_i=tS_x=2.26\times0.5477℃=1.238℃$$

由于 $S_{\bar{x}}=S_x/\sqrt{n}$，均值的精密极限为

$$P_{\bar{x}}=t\frac{S_x}{\sqrt{n}}=2.26\times\frac{0.5477}{10^{1/2}}℃=0.3914℃$$

10. 在结构的应变测量中，为了估计应变测量中的总误差，分别地试验应变仪和传输线。从在同样负载下 10 次应变仪测量的输出得出平均输出 80mV 时的标准差为 0.5mV。从 15 次传输电压的测量得到 1mV 的标准差。试确定由应变仪产生的置信 95% 的应变测量精密度指数和随机误差。

解：精密度指数为

$$S_x = \sqrt{1^2+0.5^2}\text{mV} = 1.118\text{mV}$$

$$v_x = \frac{\left(\sum_{i=1}^{2} S_i^2\right)^2}{\sum_{i=1}^{2}(S_i^4/v_i)} = \frac{(1+0.5^2)^2}{1/14+0.5^4/9} = 19.9, 取\ v_x = 19$$

查表得 $t=2.093$，随机误差为

$$P_x=tS_x=2.093\times1.118\text{mV}=2.34\text{mV}$$

11. 热电偶（温度测量装置）是在有限温度范围内常用的近似线性设备。表 2-2 是一品牌热电偶生产厂商所得的一对热电偶金属线的数据：

表 2-2　热电偶金属线数据

T/℃	20	30	40	50	60	75	100
U/mV	1.02	1.53	2.05	2.55	3.07	3.56	4.05

试确定这些数据的最佳线性拟合。

解：设拟合曲线方程为

$$U=aT+b$$

列方程组，有

$$S_0b+S_1a=f_0$$
$$S_1b+S_2a=f_1$$

其中　$S_0=7$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{7} T_i = 20+30+40+50+60+75+100 = 375$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{7} T_i^2 = 20^2+30^2+40^2+50^2+60^2+75^2+100^2 = 24625$$

$$f_0 = \sum_{i=1}^{7} U_i = 1.02+1.53+2.05+2.55+3.07+3.56+4.05 = 17.83$$