



数学·统计学系列

Equation Theory

方程式论

[英] W·S·伯恩赛德 班登 著 幹仙椿 译



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



Equation Theory 方程式论

● [英] W. S. 伯恩赛德 班登 著 ● 幹仙椿 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书是已故英国群论大师伯恩赛德和班登的一本代数学经典著作. 书中详细地介绍了代数方程的各种解法及根的各种性质. 对了解代数方程的历史也是很好的素材.

本书适合大中师生及数学爱好者阅读及收藏.

图书在版编目(CIP)数据

方程式论/(英)伯恩赛德,(英)班登著;幹仙椿
译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.3

ISBN 978-7-5603-3222-2

I. ①方… II. ①伯… ②班…③幹… III. ①代数方
程-理论 IV. ①O151.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 038423 号

责任编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 王勇钢

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 15.25 字数 281 千字

版 次 2011 年 3 月第 1 版 2011 年 3 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-3222-2

定 价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

马 序

余夙爱武林山水，环湖名胜，游览殆遍，常于青峰碧涧间，获识幹子仙椿，此君欣赏自然，另具兴趣，数子身临极巔上，叱咤纵横，夷然自得，余初以为运动健儿也，今夏此君携其旧译方程式论，托余介绍，余始奇之，为之浏览一周，其书理论精深，内容丰富，与余在北洋大学习矿学时所读者迥异，至其措词之工，译笔之明，叙述之慎详，结构之严密，尤非坊间浅薄浮饰之作所可拟，后将原本与译本对阅，始知原书之艰深，绝非吾国学子所能洞晓，此君有鉴于此，乃为之批却导窾，钩玄抉微，触类引申，旁征博采，此后学者读之，即无良师益友，亦得头头是道，兴味盎然，恍如置身三竺六桥间，大有左顾右盼掉臂游行之乐，余嘉此君译述之勤，且信此书必有益于世也，乃为之向书馆介绍，俾早刊行，公诸同好，余因之有感焉，吾国自有译书事业以来，金装灿烂，蔚然成帙，炫耀于吾人之眼帘者夥矣，但理蕴渊深，不合普通程度之书，每致无人迁译，今幹君以明畅之笔，发幽深之理，推陈出新，曲折入微，极文字之能事，以宜扬此海外之鸿秘，庶几莘莘学子，得以升堂入室，一窥全豹，其在数学上之贡献，岂曰小补之哉，幹君尝言，今后将以其毕生精力，阐述近代名著，谋吾国数学上之基本建设，于此可知幹君之抱负为何如，其所以日驰骋乎崇山峻岭之间，嘘气成云，挥汗如雨，历尽艰辛而不已者，其目的盖别有在矣，本书将于明春贡诸世，余虽未曾专攻数学，窃幸阅君之书，乐君有志竟成，而喜为士林道也，于是乎序。

嵊县马寅初识于杭州
一九三三年十二月十日

冯 序

昔孔德常称代数学之目的. 唯在分析方程式. 其言固不尽当. 而方程式论之重要可见矣. 近百年来, 欧西畴人类多殚精竭虑. 求解高次代数方程式. 虽未大奏厥功. 而近世代数之两大支论及不变论于焉发轫. 遂使今日之代数学在数学上所占地位. 得与几何学函数论诸大宗派相埒. 则方程式论之重要. 不尤可见欤. 近百年来, 西哲论方程式之书. 无虑十百种. 然择精语详. 要推班布二氏之所著作. 余曩主讲杭州优级师范学校. 尝多译为汉文. 印作讲义. 惜原稿散佚. 未能公诸同好. 今岁幹君仙椿又取是书译之. 披读一过. 见其颇能以明畅之笔. 达幽深之旨. 原书之艰涩难读者. 均疏通而证明之. 其阔略不备者. 又博采众书而补苴之. 其于是书之用力. 可谓勤矣. 幹君将以其译本付剞劂. 爰识数语. 弁诸简端.

杭州冯祖荀

胡 序

幹子仙椿尝从余游. 尤好治数理之学. 钩微索隐. 务穷其窍. 今春出其多译之方程式论. 索序于余. 余嘉其逻辑之勤. 且信此书之必有裨于世也. 即为之循览一过. 其书能通晓 William Snow Burnside 与 Arthur William Panton 二氏之艰奥. 博采 Bertrand, Salmon, Clebsch 诸氏之菁华. 视他书之菲薄浮饰. 岌资沽誉者. 盖有间矣. 仙椿久欲付枣. 亟请于余. 余虽不文. 然无以谢之. 聊缀数语. 弁诸简端. 是为序.

慈谿胡浚济

绪 论	// 1
§1 定义	// 1
§2 数字方程式及代数方程式	// 2
§3 多项式	// 3
第一章 多项式之普通性质	// 4
§4 定理(多项式变数之值甚大时)	// 4
§5 定理(多项式变数之值甚小时)	// 6
§6 变数增减时多项式形式上之变化及导函数	// 7
§7 有理整函数之连续	// 9
§8 以二项式除多项式所得之商及其剩余	// 10
§9 作函数表法	// 11
§10 多项式之图表法	// 12
§11 多项式之极大值极小值	// 14
第二章 方程式之普通性质	// 16
§12 定理一(关于方程式之实根)	// 16
§13 定理二(关于方程式之实根)	// 17
§14 定理三(关于方程式之实根)	// 17
§15 普通方程式之根,虚根	// 18
§16 定理(定方程式中根之数自)	// 18
§17 等根	// 20

	§ 18	系数为实数之方程式	//	21
	§ 19	Descartes 之符号规则, 正根	//	22
	§ 20	Descartes 之符号规则, 负根	//	23
	§ 21	用 Descartes 规则证明虚根之存在	//	23
	§ 22	定理(以二已知数之代变数)	//	24
第三章		根与系数之关系及根之对称函数	//	28
	§ 23	根与系数之关系	//	28
	§ 24	应用	//	29
	§ 25	方程式相关二根之降次	//	33
	§ 26	1 之立方根	//	34
	§ 27	根之对称函数	//	37
	§ 28	对称函数之理论	//	42
第四章		方程式之变化	//	50
	§ 29	方程式之变化	//	50
	§ 30	变根之符号	//	50
	§ 31	以一定量乘方程式之根	//	51
	§ 32	逆根及逆方程式	//	52
	§ 33	增减方程式之根	//	54
	§ 34	消项	//	56
	§ 35	二项系数	//	57
	§ 36	三次方程式	//	59
	§ 37	四次方程式	//	61
	§ 38	同比异列变化	//	62
	§ 39	对称函数之变化	//	63
	§ 40	变换方程式以其根之乘幂	//	65
	§ 41	一般之变化	//	66
	§ 42	平方差之三次方程式	//	67
	§ 43	三次方程式中根之性质之标准	//	69
	§ 44	差之一般方程式	//	70
第五章		逆方程式及二项方程式之解答	//	75
	§ 45	逆方程式	//	75
	§ 46	二项方程式之普通性质, 命题 1	//	77
	§ 47	命题 2	//	77
	§ 48	命题 3	//	78
	§ 49	命题 4	//	78
	§ 50	命题 5	//	78
	§ 51	命题 6	//	79
	§ 52	命题 7	//	79

§ 53 方程式 $x^n - 1 = 0$ 之特根 // 80

§ 54 以圆函数解二项方程式 // 83

第六章 三次方程式及四次方程式之代数解法 // 90

§ 55 方程式之代数解法 // 90

§ 56 三次方程式之代数根 // 93

§ 57 数字方程式之应用 // 94

§ 58 化三次式为两立方之差 // 95

§ 59 以根之对称函数解三次方程式 // 97

§ 60 三次方程式中二根之同比异列关系 // 104

§ 61 四次方程式之第一解法, Euler 氏之假定 // 105

§ 62 四次方程式之第二种解法 // 109

§ 63 分解四次式为二次因子——第一法 // 111

§ 64 分解四次式为二次因子——第二法 // 115

§ 65 四次方程式之逆方程式 // 116

§ 66 以根之对称函数解四次方程式 // 119

§ 67 四次方程式之平方差方程式 // 122

§ 68 四次方程式中根之性质之准则 // 123

第七章 导函数之性质 // 133

§ 69 导函数之图表法 // 133

§ 70 多项式之极大极小值, 定理 // 134

§ 71 Rolle 氏之定理 // 135

§ 72 导函数之组织 // 136

§ 73 复根, 定理 // 137

§ 74 复根之决定 // 137

§ 75 定理一(变数经过方程式之一根) // 138

§ 76 定理二(变数经过方程式之一根) // 139

第八章 根之对称函数 // 142

§ 77 牛顿之定理, 命题 1 // 142

§ 78 命题 2 // 144

§ 79 命题 3 // 146

§ 80 以根之乘方和之项表系数之式 // 146

§ 81 对称函数之级数及其次数和 // 150

§ 82 根之对称函数之计算 // 151

§ 83 同次积 // 154

第九章 根之极限 // 156

§ 84 极限之定义 // 156

§ 85 命题 1 // 157

§ 86 命题 2 // 157

- § 87 应用 // 158
- § 88 命题 3 // 159
- § 89 下限及负根之极限 // 161
- § 90 限制方程式 // 161

第十章 区分方程式之根 // 164

- § 91 一般解释 // 164
- § 92 Fourier 及 Budan 之定理 // 165
- § 93 定理之应用 // 166
- § 94 根为虚数时定理之应用 // 168
- § 95 前定理之推论 // 170
- § 96 Sturm 之定理 // 171
- § 97 Sturm 之定理, 等根 // 174
- § 98 Sturm 定理之应用 // 176
- § 99 方程式之根皆为实根之条件 // 179
- § 100 四次方程式之根皆为实数之条件 // 180

第十一章 数字方程式之解答 // 184

- § 101 代数方程式及数字方程式 // 184
- § 102 定理(关于可通约根) // 185
- § 103 牛顿之约数法则 // 185
- § 104 约数法则之应用 // 186
- § 105 限制约数数目之方法 // 188
- § 106 复根之决定 // 189
- § 107 牛顿之近似值方法 // 192
- § 108 Horner 氏之数字方程式解法 // 193
- § 109 试约数之原理 // 195
- § 110 Horner 氏之简法 // 198
- § 111 方程式之根异常接近时 Horner 氏法则之应用 // 199
- § 112 Lagrange 氏之近似值方法 // 202
- § 113 四次方程式之数字解答 // 203

第十二章 复数及复变数 // 208

- § 114 复数, 图表法 // 208
- § 115 复数, 加法及减法 // 209
- § 116 乘法及除法 // 210
- § 117 复数之他种运算 // 211
- § 118 复变数 // 211
- § 119 复变数函数之连续 // 212
- § 120 复变数画一小闭曲线时 $f(x)$ 中幅角之相当变化 // 213
- § 121 Cauchy 氏之定理 // 214

§ 122	普通方程式中根之数目	//	215
§ 123	基本定理之第二证法	//	216
§ 124	复数根之决定,三次方程式之解答	//	216
§ 125	四次方程式之解法	//	218
§ 126	续四次方程式之解法	//	220

编辑手记	//	224
------	----	-----

§ 1 定 义

数

或代表数之文字,以各种算术运算记号联结之,称为数学式.式中含有之文字,如能变化,则称变数,否则称常数.变数变化时,数学式全体亦随之变化,此数学式称为变数之函数.本书所讨论只限于一变数之函数.

代数函数之数学式,所有之运算记号,只限于加、减、乘、除、幂、开方六种.有理代数函数,只限于加、减、乘、除、幂五种,以下简称为有理函数.整代函数,以其所含之变数不在一分数中分母之位置为限,以下简称为函数.令 n 为正整数, $a, b, c, \dots, k, l$ 为常数, x 为变数,则

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + kx + l$$

为变数 x 之有理整函数.式中之常数系数 $a, b, c, \dots$ 不论为分数或无理数,上式仍为有理整函数.

变数 x 之函数,一般以 $F(x), f(x), \phi(x), \psi(x)$ 等类之记号表之.

表有理整函数之式,称为有理整式,或曰多项式.以等号联结二多项式所成之式,称为方程式.若变数 x 之一值能适合此方程式,则称此值为方程式之根.若欲将此方程式完全解开,即谓须将其所有之根一定出.

若将方程式中等号右端所有之项,一律移于左端,且依 x 之降幂排列之,即此方程式可书为次之形状

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

因此方程式中 x 之最高方次为 n ,故称之为 n 次方程式.细检此方程式中各项.其 x 之指数与其系数 a 下方所附数字之和,常等于方程式之次数 n .故知某项系数所附之数字,即能知其 x 之指数.

因方程式中各项,同以任一常数除之,此方程式之根不变.令以 a_0 除上式各项,则上之方程式可书为次之形状

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

若 $p_1, p_2, \cdots, p_n, n$ 个系数皆不为 0,则称此方程式为完全方程式,否则称为不完全方程式.不含有 x 之项,称为方程式之绝对项,或常数项.若方程式各项之系数皆为数字,则称之为数字方程式.若为字母,则称之为代数方程式.

§ 2 数字方程式及代数方程式

在研究数学及物理学之问题中,其最后结果常表现为一方程式,且须定出此方程式之根,始能将原问题解决.根之重要既若此.故治数学者咸从事于求任意次方程式之根所当遵守之法则.而方程论一学因之成立,即若方程式为数字,则须求满足此方程式之一数值或多数值.关于此节在数学上已有一大进步表现.至于发现数字方程式之根之精确值或近似值之法则,本书后当特别说明,兹不赘.

至代数方程式则无此种等量进步.我们已知二次代数方程式之根,能用其各项之系数表明,而成为二次数字方程式中根之公式.即以后者各项之数字系数,代入公式内各相当文字系数中,即可将后者之根定出,至于代数三次方程式及四次方程式,虽能将其根之公式定出,然有时用于数字方程式,竟不能决定其根.以视二次方程式之公式,其用途又较狭隘矣.

至欲求五次或五次以上代数方程式之根,乃近世解析学上之问题,非如前述各种代数方程式,仅藉普通代数记号,便能以系数之项表根之价值也.

§ 3 多项式

由上述便知方程论之重要目的,在发现变数 x 能令多项式为0之值.实行此计划时,又当讨论对于变数之每一值多项式所取之相应值.在次章便知变数 x 之值自 $-\infty$ 至 ∞ 连续变化时,多项式之相应值亦连续变化.此项研究,在多项式理论中甚占重要.

解数字方程式,纯用实验方法.当检查对于变数之某值多项式之相应值时.若此多项式为0,则此变数之值即此数字方程式之根.若此多项式不为0,然我们总能依此方法将根所在之位置定出.令此根在 a 与 b 二数之间,我们又可依同一方法在 a, b 二数间求出二数 a_1, b_1 ,使方程式之根在 a_1 与 b_1 之间.以下逐次如此,便可将根之近似值或其真值定出.

多项式之普通性质

第

一

章

§ 4 定理(多项式变数之值甚大时)

讨

论对于变数之值之变化,多项式之相应值之变化时. 须先讨论对于变数之甚大及甚小值,多项式中何项关系较大. 本节及以下诸节便为此问题而设.

将多项式书之如次

$$a_0x^n(1 + \frac{a_1}{a_0} \frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{x^2} + \frac{a_3}{a_0} \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0} \frac{1}{x^n})$$

自上式我们便知当 x 之值与 ∞ 接近时,多项式之值与 a_0x^n 接近. 次之定理能给我们一数值. 若将此数值或比此较大之数值代 x ,能令上式中 a_0x^n 一项比其余各项之和为

定理 于多项式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

之系数绝对值 $|a_1| |a_2| \cdots |a_n|$ 中,以 $|a_k|$ 为最大时. 若 x 之值等于或大于 $\frac{|a_k|}{a_0} + 1$,则第一项之值比其余各项之和之绝对值大.

上式中第一项之系数 a_0 假定为正, 以下准此.

证 我们之目的, 在证明 x 之值等于或大于 $\frac{|a_k|}{a_0} + 1$ 时, 同时

$$a_0 x^n > |a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n| \quad (1)$$

今作不等式

$$a_0 x^n > |a_k| (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) \quad (2)$$

因式(2)右端 $\geq$ 式(1)右端, 故 x 之值若能满足式(2), 则必能满足式(1). 因式

(2)右端括弧内为一等比级数, 其总和为 $\frac{x^n - 1}{x - 1}$, 故式(2)得化之为

$$1 > \frac{|a_k|}{a_0(x-1)} \frac{x^n - 1}{x^n} \quad (2')$$

然 x 之值比 1 大, 故 x^n 比 $x^n - 1$ 大. 因之 $\frac{x^n - 1}{x^n}$ 当小于 1, 故

$$\frac{|a_k|}{a_0(x-1)} > \frac{|a_k|}{a_0(x-1)} \frac{x^n - 1}{x^n}$$

今作一不等式

$$1 \geq \frac{|a_k|}{a_0(x-1)} \quad (3)$$

故 x 之值若满足式(3), 则 x 之值必满足式(2). 因之能满足式(2), 故终能满足

式(1)也. 然自式(3) $x \geq \frac{|a_k|}{a_0} + 1$, 故本定理能成立.

由本定理可知当 x 之值自 $\frac{|a_k|}{a_0} + 1$ 向 ∞ 处增长时, 多项式 $f(x)$ 常为正. 又

若 x 之符号由正变负, 则 n 为偶数时 $a_0 x^n$ 之符号为正. n 为奇数时 $a_0 x^n$ 之符号为

负. 此时 x 之值自 $-(\frac{|a_k|}{a_0} + 1)$ 向 $-\infty$ 处减少, 且若 n 为偶数, 则多项式 $f(x)$

之符号常为正. 若 n 为奇数, 则多项式 $f(x)$ 之符号常为负. 此理可由次之补题明之.

补题 于多项式

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

之诸系数绝对值 $|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|$ 中, 以 $|a_k|$ 为最大时, 若 $|x|$ 之值大

于或等于 $\frac{|a_k|}{a_0} + 1$, 则第一项之绝对值, 比其余各项之和之绝对值大.

证 我们之目的在证明 $|x|$ 等于或大于 $\frac{|a_k|}{a_0} + 1$ 时, 同时有

$$|a_0 x^n| > |a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n|$$

今作不等式

$$|a_0 x^n| > |a_k| (|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \cdots + |x| + 1)$$

以下与前之推论完全相同. 结果即得 $|x| \geq \frac{|a_k|}{a_0} + 1$.

我们观于上定理之证明, 即知由上法求得之值, 能令多项式全体与第一项同符号. 然我们终可由他法求得另一值, 比前值小, 且与前值呈同一功用. 盖原多项式中各系数, 本可为正或负或 0, 又其绝对值亦可大可小. 今上证明中除第一项外, 其余各项纵皆假定为负, 又其各项之绝对值纵皆假定为 a_k , 亦可得上述同一之结果. 故上之法则殊不精密, 益可断言.

§ 5 定理(多项式变数之值甚小时)

前节表明 x 自极限值 $\frac{|a_k|}{a_0} + 1$ 增长时, 多项式内之主要项为第一项, 今探求 x 逐渐减少时多项式内最重要之项, 并如前决定一极限值. 若 x 自此极限值减少, 则此项与多项式全体同符号.

定理 于多项式

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \quad (a_n \neq 0)$$

之诸系数绝对值中, 以 a_k 为最大时. ($k \neq n$) 若 $|x|$ 之值等于或小于 $\frac{|a_n|}{|a_k| + |a_n|}$, 则末项 a_n 之绝对值, 比其余各项之和之绝对值大. 换言之, $|x|$ 自此极限减小时, 多项式全体与末项同符号. 即对于 $|x|$ 之小值, 末项为主要项也.

证 令 $x = \frac{1}{y}$, 则原多项式可化为

$$a_0 \left(\frac{1}{y}\right)^n + a_1 \left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \frac{1}{y} + a_n = \frac{1}{y^n} (a_0 + a_1 y + \cdots + a_{n-1} y^{n-1} + a_n y^n)$$

自 § 4 可知 $|y|$ 等于或大于 $\frac{|a_k|}{|a_n|} + 1$ 时则有

$$|a_n y^n| > |a_{n-1} y^{n-1} + a_{n-2} y^{n-2} + \cdots + a_1 y + a_0|$$

令以 $|y^n|$ 除其两端. 因 $\frac{1}{y} = x$, 是以

$$|a_n| > |a_{n-1} x + a_{n-2} x^2 + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n|$$