HIT

数学 · 统计学系列

Equation Theory

方程式论

[英] W·S·伯恩赛德 班登 著 幹仙椿 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

方程式论

Equation Theory

●[英] W·S·伯恩赛德 班登 著

●幹仙椿 译

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书是已故英国群论大师伯恩赛德和班登的一本代数学经典著作. 书中详细地介绍了代数方程的各种解法及根的各种性质. 对了解代数方程的历史也是很好的素材.

本书适合大中师生及数学爱好者阅读及收藏.

图书在版编目(CIP)数据

方程式论/(英)伯恩赛德,(英)班登著;幹仙椿译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.3

ISBN 978-7-5603-3222-2

Ⅰ.①方… Ⅱ.①伯… ②班…③幹… Ⅲ.①代数方程-理论 Ⅳ.①O151.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 038423 号

责任编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 15.25 字数 281 千字
版　　次 2011 年 3 月第 1 版 2011 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3222-2
定　　价 38.00 元

马　　序

余夙爱武林山水．环湖名胜．游览殆遍．常于青峰碧涧间．获识幹子仙椿．此君欣赏自然．另具兴趣．数孑身临极巅上．叱咤纵横．夷然自得．余初以为运动健儿也．今夏此君携其旧译方程式论．托余介绍．余始奇之．为之浏览一周．其书理论精深．内容丰富．与余在北洋大学习矿学时所读者迥异．至其措词之工．译笔之明．叙述之慎详．结构之严密．尤非坊间浅薄浮饰之作所可拟．后将原本与译本对阅．始知原书之艰深．绝非吾国学子所能洞晓．此君有鉴于此．乃为之批却导窾．钩玄抉微．触类引申．旁征博采．此后学者读之．即无良师益友．亦得头头是道．兴味盎然．恍如置身三竺六桥间．大有左顾右盼掉臂游行之乐．余嘉此君译述之勤．且信此书必有益于世也．乃为之向书馆介绍．俾早刊行．公诸同好．余因之有感焉．吾国自有译书事业以来．金装灿烂．蔚然成帙．炫耀于吾人之眼帘者夥矣．但理蕴渊深．不合普通程度之书．每致无人迁译．今幹君以明畅之笔．发幽深之理．推陈出新．曲折入微．极文字之能事．以宣扬此海外之鸿秘．庶几莘莘学子．得以升堂入室．一窥全豹．其在数学上之贡献．岂曰小补之哉．幹君尝言．今后将以其毕生精力．阐述近代名著．谋吾国数学上之基本建设．于此可知幹君之抱负为何如．其所以日驰骋乎崇山峻岭之间．嘘气成云．挥汗如雨．历尽艰辛而不已者．其目的盖别有在矣．本书将于明春贡诸世．余虽未曾专攻数学．窃幸阅君之书．乐君有志竟成．而喜为士林道也．于是乎序．

嵊县马寅初识于杭州

一九三三年十二月十日

冯　　序

昔孔德常称代数学之目的.唯在分析方程式.其言固不尽当.而方程式论之重要可见矣.近百年来,欧西畴人类多殚精竭虑.求解高次代数方程式.虽未大奏厥功.而近世代数之二大支论及不变论于焉发轫.遂使今日之代数学在数学上所占地位.得与几何学函数论诸大宗派相埒.则方程式论之重要.不尤可见欤.近百年来,西哲论方程式之书.无虑十百种.然择精语详.要推班布二氏之所著作.余曩主讲杭州优级师范学校.尝多译为汉文.印作讲义.惜原稿散佚.未能公诸同好.今岁幹君仙椿又取是书译之.披读一过.见其颇能以明畅之笔.达幽深之旨.原书之艰涩难读者.均疏通而证明之.其阙略不备者.又博采众书而补苴之.其于是书之用力.可谓勤矣幹君将以其译本付剞劂.爰识数语.弁诸简端.

杭州冯祖荀

胡　　序

幹子仙椿尝从余游. 尤好治数理之学. 钩微索隐. 务穷其窍. 今春出其多译之方程式论. 索序于余. 余嘉其逻辑之勤. 且信此书之必有裨于世也. 即为之循览一过. 其书能通晓 William Snow Burnside 与 Arthur William Panton 二氏之艰奥. 博采 Bertrand, Salmon, Clebsch 诸氏之菁华. 视他书之菲薄浮饰. 耑资沽誉者. 盖有间矣. 仙椿久欲付枣. 亟请于余. 余虽不文. 然无以谢之. 聊缀数语. 弁诸简端. 是为序.

慈谿胡濬济

目录

绪论

§1 定 义

数或代表数之文字,以各种算术运算记号联结之,称为数学式.式中含有之文字,如能变化,则称变数,否则称常数.变数变化时,数学式全体亦随之变化,此数学式称为变数之函数.本书所讨论只限于一变数之函数.

代数函数之数学式,所有之运算记号,只限于加、减、乘、除、幂、开方六种.有理代数函数,只限于加、减、乘、除、幂五种,以下简称为有理函数.整代函数,以其所含之变数不在一分数中分母之位置为限,以下简称为函数.令 n 为正整数,$a,b,c,\cdots,k,l$ 为常数,x 为变数,则

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+kx+l$$

为变数 x 之有理整函数.式中之常数系数 $a,b,c,\cdots$ 不论为分数或无理数,上式仍为有理整函数.

变数 x 之函数,一般以 $F(x),f(x),\phi(x),\psi(x)$ 等类之记号表之.

表有理整函数之式，称为有理整式，或曰多项式．以等号联结二多项式所成之式，称为方程式．若变数 x 之一值能适合此方程式，则称此值为方程式之根．若欲将此方程式完全解开，即谓须将其所有之根一一定出．

若将方程式中等号右端所有之项，一律移于左端，且依 x 之降幂排列之，即此方程式可书为次之形状

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

因此方程式中 x 之最高方次为 n，故称之为 n 次方程式．细检此方程式中各项．其 x 之指数与其系数 a 下方所附数字之和，常等于方程式之次数 n．故知某项系数所附之数字，即能知其 x 之指数．

因方程式中各项，同以任一常数除之，此方程式之根不变．令以 a_0 除上式各项，则上之方程式可书为次之形状

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

若 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，n 个系数皆不为 0，则称此方程式为完全方程式，否则称为不完全方程式．不含有 x 之项，称为方程式之绝对项，或常数项．若方程式各项之系数皆为数字，则称之为数字方程式．若为字母，则称之为代数方程式．

§2　数字方程式及代数方程式

在研究数学及物理学之问题中，其最后结果常表现为一方程式，且须定出此方程式之根，始能将原问题解决．根之重要既若此．故治数学者咸从事于求任意次方程式之根所当遵守之法则．而方程论一学因之成立，即若方程式为数字，则须求满足此方程式之一数值或多数值．关于此节在数学上已有一大进步表现．至于发现数字方程式之根之精确值或近似值之法则，本书后当特别说明，兹不赘．

至代数方程式则无此种等量进步．我们已知二次代数方程式之根，能用其各项之系数表明，而成为二次数字方程式中根之公式．即以后者各项之数字系数，代入公式内各相当文字系数中，即可将后者之根定出，至于代数三次方程式及四次方程式，虽能将其根之公式定出，然有时用于数字方程式，竟不能决定其根．以视二次方程式之公式，其用途又较狭隘矣．

至欲求五次或五次以上代数方程式之根，乃近世解析学上之问题，非如前述各种代数方程式，仅藉普通代数记号，便能以系数之项表根之价值也．

§3 多项式

由上述便知方程论之重要目的,在发现变数x能令多项式为0之值.实行此计划时,又当讨论对于变数之每一值多项式所取之相应值.在次章便知变数x之值自$-\infty$至∞连续变化时,多项式之相应值亦连续变化.此项研究,在多项式理论中甚占重要.

解数字方程式,纯用实验方法.当检查对于变数之某值多项式之相应值时.若此多项式为0,则此变数之值即此数字方程式之根.若此多项式不为0,然我们总能依此方法将根所在之位置定出.令此根在a与b二数之间,我们又可依同一方法在a,b二数间求出二数a_1,b_1,使方程式之根在a_1与b_1之间.以下逐次如此,便可将根之近似值或其真值定出.

多项式之普通性质

第一章

§4 定理(多项式变数之值甚大时)

讨论对于变数之值之变化,多项式之相应值之变化时.须先讨论对于变数之甚大及甚小值,多项式中何项关系较大.本节及以下诸节便为此问题而设.

将多项式书之如次

$$a_0x^n(1+\frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x}+\frac{a_2}{a_0}\frac{1}{x^2}+\frac{a_3}{a_0}\frac{1}{x^3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{a_0}\frac{1}{x^n})$$

自上式我们便知当 x 之值与 ∞ 接近时,多项式之值与 a_0x^n 接近.次之定理能给我们一数值.若将此数值或比此较大之数值代 x,能令上式中 a_0x^n 一项比其余各项之和大.

定理 于多项式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

之系数绝对值 $|a_1||a_2|\cdots|a_n|$ 中,以 $|a_k|$ 为最大时.若 x 之值等于或大于$\dfrac{|a_k|}{a_0}+1$,则第一项之值比其余各项之和之绝对值大.

上式中第一项之系数 a_0 假定为正,以下准此.

证 我们之目的,在证明 x 之值等于或大于$\frac{|a_k|}{a_0}+1$ 时,同时

$$a_0x^n > |a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n| \tag{1}$$

今作不等式

$$a_0x^n > |a_k|(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1) \tag{2}$$

因式(2)右端 $\geqslant$ 式(1)右端,故 x 之值若能满足式(2),则必能满足式(1).因式(2)右端括弧内为一等比级数,其总和为$\frac{x^n-1}{x-1}$,故式(2)得化之为

$$1 > \frac{|a_k|}{a_0(x-1)}\frac{x^n-1}{x^n} \tag{2'}$$

然 x 之值比 1 大,故 x^n 比 x^n-1 大.因之$\frac{x^n-1}{x^n}$当小于 1,故

$$\frac{|a_k|}{a_0(x-1)} > \frac{|a_k|}{a_0(x-1)}\frac{x^n-1}{x^n}$$

今作一不等式

$$1 \geqslant \frac{|a_k|}{a_0(x-1)} \tag{3}$$

故 x 之值若满足式(3),则 x 之值必满足式(2).因之能满足式(2),故终能满足式(1)也.然自式(3)$x \geqslant \frac{|a_k|}{a_0}+1$,故本定理能成立.

由本定理可知当 x 之值自$\frac{|a_k|}{a_0}+1$向 ∞ 处增长时,多项式 $f(x)$ 常为正.又若 x 之符号由正变负,则 n 为偶数时 a_0x^n 之符号为正.n 为奇数时 a_0x^n 之符号为负.此时 x 之值自 $-(\frac{|a_k|}{a_0}+1)$ 向 $-\infty$ 处减少,且若 n 为偶数,则多项式 $f(x)$ 之符号常为正.若 n 为奇数,则多项式 $f(x)$ 之符号常为负.此理可由次之补题明之.

补题 于多项式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

之诸系数绝对值 $|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|$ 中,以 $|a_k|$ 为最大时,若 $|x|$ 之值大于或等于$\frac{|a_k|}{a_0}+1$,则第一项之绝对值,比其余各项之和之绝对值大.

证 我们之目的在证明 $|x|$ 等于或大于$\frac{|a_k|}{a_0}+1$ 时,同时有

$$|a_0x^n| > |a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n|$$

今作不等式

$$|a_0x^n|>|a_k|(|x|^{n-1}+|x|^{n-2}+\cdots+|x|+1)$$

以下与前之推论完全相同. 结果即得 $|x|\geqslant\frac{|a_k|}{a_0}+1.$

我们观于上定理之证明,即知由上法求得之值,能令多项式全体与第一项同符号. 然我们终可由他法求得另一值,比前值小,且与前值呈同一功用. 盖原多项式中各系数,本可为正或负或0,又其绝对值亦可大可小. 今上证明中除第一项外,其余各项纵皆假定为负,又其各项之绝对值纵皆假定为 a_k,亦可得上述同一之结果. 故上之法则殊不精密,益可断言.

§5　定理(多项式变数之值甚小时)

前节表明 x 自极限值 $\frac{|a_k|}{a_0}+1$ 增长时,多项式内之主要项为第一项,今探求 x 逐渐减少时多项式内最重要之项,并如前决定一极限值. 若 x 自此极限值减少,则此项与多项式全体同符号.

定理　于多项式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+x_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\quad(a_n\neq 0)$$

之诸系数绝对值中, 以 a_k 为最大时. $(k\neq n)$ 若 $|x|$ 之值等于或小于 $\frac{|a_n|}{|a_k|+|a_n|}$,则末项 a_n 之绝对值,比其余各项之和之绝对值大. 换言之, $|x|$ 自此极限减小时,多项式全体与末项同符号. 即对于 $|x|$ 之小值,末项为主要项也.

证　令 $x=\frac{1}{y}$,则原多项式可化为

$$a_0\left(\frac{1}{y}\right)^n+a_1\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\frac{1}{y}+a_n=$$

$$\frac{1}{y^n}(a_0+a_1y+\cdots+a_{n-1}y^{n-1}+a_ny^n)$$

自 §4 可知 $|y|$ 等于或大于 $\frac{|a_k|}{|a_n|}+1$ 时则有

$$|a_ny^n|>|a_{n-1}y^{n-1}+a_{n-2}y^{n-2}+\cdots+a_1y+a_0|$$

令以 $|y^n|$ 除其两端. 因 $\frac{1}{y}=x$,是以

$$|a_n|>|a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_1x^{n-1}+a_0x^n|$$