Math Fundamentals

21世纪数学基础课系列教材

工科积分变换及其应用

熊 辉 编著

中国人民大学出版社

Math Fundamentals

21世纪数学基础课系列教材

工科积分变换及其应用

熊 辉 编著

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

工科积分变换及其应用/熊辉编著. —北京：中国人民大学出版社，2011.8
21世纪数学基础课系列教材
ISBN 978-7-300-14230-2

Ⅰ.①工… Ⅱ.①熊… Ⅲ.①积分变换-高等学校-教材 Ⅳ.①O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第171488号

21世纪数学基础课系列教材

工科积分变换及其应用

熊 辉 编著

Gongke Jifen Bianhuan Jiqiyingyong

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东方圣雅印刷有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16开本	**版　　次**	2011年8月第1版
印　　张	11 插页1	**印　　次**	2011年8月第1次印刷
字　　数	205 000	**定　　价**	22.00元

前　言

之所以要写本书，是因为目前对于工科学生来说，国内并无一本合适的数学教材。国内现行的积分变换教材分成两类，一是只讲“积分变换”，毫不涉及“复变函数”，这就使得积分变换的很多结果工科学生都不知道是怎么来的，只好死背公式；二是将积分变换与复变函数合在一起，但复变函数所占的课时比例实在太多，以致一讲到积分变换，就接近期末，这使得学生并不能很好地把握积分变换。而对于工科学生来说，掌握积分变换是最终的目的，复变函数的理论基础（除留数理论外）稍微了解即可。本书正是基于此想法编写。

本书主要针对工科学生，由于他们的专业课程和技术对于复变函数的基础知识要求甚少，因此本书将在重点介绍连续积分变换和离散积分变换的同时，仅简单介绍有关复变函数的知识。由于其中的奇点理论和留数理论是计算积分变换必不可少的工具，因此单独成章。本书中的某章节若标记了“*”，则表示其为选讲内容，讲授与否，视课时多寡而定。

本书不仅对积分变换的古典理论作了严谨的介绍和论证，而且在内容、概念与方法等方面注意了与现代知识的内在联系，注意了各数学分支知识和复变函数与积分变换的结合应用。在介绍Fourier（傅里叶）变换和离散Fourier变换时，本书重点指明变换公式在数学领域和工程领域的区别。此外，本书附录了一篇“数学实验”，鉴于符号计算能力的显著性，实验采用专业数学软件Mathematica7.0来完成。

本书内容丰富，方法多样，技巧性强，并配有适量的例题与习题，难易兼顾，雅俗共赏。

本书可作为综合性大学、理工科大学非数学专业教材或数学专业的参考书和高等师范院校数学专业本科生选修课的教材。另外，可供一般的数学、电子、通信、控制等领域的工作者和工程技术人员作为参考书。

作者

2011.5.5

符号说明

小写英文字母a, b, c, x, y等一般表示实数；z，s表示复数。

$\mathrm{i} = \mathrm{j} = \sqrt{-1}$表示虚数单位，i用于数学领域，j用于工程领域。

$\mathbb{N}$表示自然数集。

$\mathbb{Z}$表示整数集。

$\mathbb{Q}$表示有理数集。

$\mathbb{R}$表示实数全集，$\mathbb{R}^+$表示正实数全集，$\mathbb{R}^-$表示负实数全集。

$\mathbb{C}$表示有限复数全集。

$\mathbb{C}^*$表示扩充复平面，包括$\mathbb{C}$和无穷大。

$f(x), f(t)$表示实数空间上的实值函数，$f(z)$表示复数空间上的复变函数。

常用积分区间的表示：

$$\int_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{+\infty},\quad \int_{\mathbb{R}^+} = \int_{0}^{+\infty},\quad \int_{\mathbb{R}^-} = \int_{-\infty}^{0}。$$

单位脉冲函数为

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases},$$

单位阶跃函数为

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}。$$

目 录

第一章　复变函数基础

复数的概念起源于求方程的根，在二次、三次代数方程的求根中就出现了负数开平方的情况。在很长时间里，人们对这类数不能理解。但随着数学的发展，这类数的重要性就日益显现出来。

以复数作为自变量的函数就叫做复变函数，而与之相关的理论就是复变函数论。解析函数是复变函数中一类具有解析性质的函数，复变函数论主要研究复数域上的解析函数，因此通常也称复变函数论为解析函数论。

复变函数论产生于18世纪，为其创建做了最早期工作的是瑞士数学家Euler（欧拉）和法国数学家D'Alembert（达朗贝尔），随后法国数学家Laplace（拉普拉斯）也研究过复变函数的积分，他们都是创建这门学科的先驱。后来，为这门学科的发展作了大量奠基工作的要数法国数学家Cauchy（柯西）和德国数学家Riemann（黎曼）、Weierstrass（魏尔斯特拉斯）。20世纪初，复变函数论又有了很大的进展，数学家们开拓了复变函数论更广阔的研究领域，为这门学科的发展做出了贡献。

复变函数论的全面发展是在19世纪，就像微积分的直接扩展统治了十八世纪的数学那样，复变函数这个新的分支统治了19世纪的数学。当时的数学家公认复变函数论是最丰饶的数学分支，并且称之为这个世纪的数学享受，也有人称赞它是抽象科学中最和谐的理论之一。

复变函数论在应用方面涉及的面很广，有很多复杂的计算都是用它来解决的。比如物理学上有很多不同的稳定平面场（所谓场就是每点对应有物理量的一个区域），对它们的计算就是通过复变函数来解决的。比如俄国的茹柯夫斯基在设计飞机的时候，就用复变函数论解决了飞机机翼的结构问题，他在运用复变函数论解决流体力学和航空力学方面的问题上也做出了贡献。

复变函数论不但在其他学科得到了广泛的应用，而且在数学领域的许多分支中也都有其应用。它已经深入到微分方程、积分方程、概率论和数论等学科，对它们的发展影响既深远又广泛。

1.1　重温复数

称形如$z=x+\mathrm{i}y$的数为复数，其中$x,y\in\mathbb{R}$，$\mathrm{i}\doteq\sqrt{-1}$为虚数单位，并记

$$\mathrm{Re}(z)=x,\quad \mathrm{Im}(z)=y$$

分别表示复数z的**实部**（real part）和**虚部**（imaginary part）。显然，实部和虚部都是实数。若$\mathrm{Re}(z)=x=0$，则z为纯虚数；若$\mathrm{Im}(z)=y=0$，则z为实数；若$x=y=0$，则等价于$z=0$，此时z既为实数又为纯虚数$0\,\mathrm{i}$。

设

$$z_1=x_1+\mathrm{i}\,y_1,\ z_2=x_2+\mathrm{i}\,y_2,$$

若$x_1=x_2$且$y_1=y_2$，则$z_1=z_2$，否则两个复数不能比较大小。即虚部不为零的复数只存在相等与否的关系，而不能比较谁大谁小。称$\overline{z}=x-\mathrm{i}\,y$为$z=x+\mathrm{i}\,y$的**共轭复数**（conjugate complex number）。共轭复数是相互的，即若z_2是z_1的共轭复数，则z_1也是z_2的共轭复数。因此共轭复数满足自反性，即$\overline{\overline{z}}=z$。

称$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$为复数$z=x+\mathrm{i}\,y$的**模**（module），显然$|z|=|\overline{z}|$。

例 1.1 若$z=1+2\mathrm{i}$，则$\mathrm{Re}(z)=1,\mathrm{Im}(z)=2$，$\overline{z}=1-2\mathrm{i}$，$|z|=\sqrt{5}$。

一个复数可以看成是一个实数加上一个虚数，是实数与虚数的复合，因此它才被称为"复数"。称$z=x+\mathrm{i}\,y$为复数的**代数形式**（algebraic form）。设$z_1=x_1+\mathrm{i}\,y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}\,y_2$，则两复数满足如下的四则运算法则和关系：

1. 加减法：$z_1\pm z_2=x_1\pm x_2+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$，且

$$\mathrm{Re}(z_1\pm z_2)=\mathrm{Re}(z_1)\pm\mathrm{Re}(z_2),$$

$$\mathrm{Im}(z_1\pm z_2)=\mathrm{Im}(z_1)\pm\mathrm{Im}(z_2)。$$

2. 乘法：$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$，且

$$\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2)=x_1x_2-y_1y_2,$$

$$\mathrm{Im}(z_1\cdot z_2)=x_1y_2+x_2y_1。$$

若z_1,z_2互为共轭，则还有$z\cdot\overline{z}=x^2+y^2=|z|^2$。

3. 除法：$z=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$。

4. 运算关系（证明从略，读者可自行验算）

1° $z_1+z_2=z_2+z_1$，$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$（交换律）；

2° $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$（分配律）；

3° $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$；

4° $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$, $\overline{az}=a\overline{z}, a\in\mathbb{R}$; $\overline{(z_1/z_2)}=\overline{z_1}/\overline{z_2}$;

5° $z\overline{z}=x^2+y^2=(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2$;

6° $\mathrm{Re}(z)=x=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$, $\mathrm{Im}(z)=y=\dfrac{1}{2\,\mathrm{i}}(z-\overline{z})$。

由4°可见，复数的共轭运算可以和四则运算任意交换运算顺序，这是个很重要的信息；而6°是用来把实数平面的函数表达式和复平面的函数表达式互相转化的唯一工具。

例 1.2 将直线方程$y=kx+b$化成复数形式。

解：根据法则6°，代入直线方程即得

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})=\frac{k}{2}(z+\overline{z})+b,$$

变形为

$$\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)z+\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)\overline{z}+b=0。$$

因此直线$y=kx+b$的复数形式为

$$\overline{A}z+z\overline{z}+b=0,\ A=\frac{k}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}。$$

因向量具有平移不变性，若把向量的起点放在坐标原点，则该向量对应一个复数，该复数的坐标为对应向量的终点。如图1.1所示，假设复数z的对应向量与x轴正向的夹角为θ，记复数z的模为

$$r=|z|=\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{x^2+y^2},$$

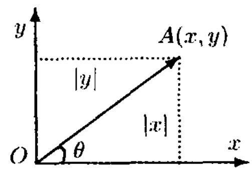

图 1.1 向量与复数

则有$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$，其中θ称为该复数的**辐角**（argument），记为$\operatorname{Arg}z$，其具有无穷多值。将仅取值于$(-\pi,\pi]$（有的书中也规定$[0,2\pi)$）的辐角称为**主辐角**（main argument），又叫**辐角主值**，记为$\arg z$。显然，$\operatorname{Arg}z=\arg z+2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$。当$z=0$时，等价于$x=y=0$，此时$\operatorname{Arg}z$，$\arg z$都是任意的。当$z$在第一象限时，$x>0,y>0$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}>0$，则

$$\arg z=\arctan\frac{y}{x};$$

当z在第二象限时，$x<0,y>0,\tan\theta=\dfrac{y}{x}<0$，则

$$\arg z=\pi+\arctan\frac{y}{x}=\pi-\arctan\left|\frac{y}{x}\right|;$$

当z在第三象限时，$x<0,y<0,\tan\theta=\dfrac{y}{x}>0$，则

$$\arg z=\arctan\frac{y}{x}-\pi;$$

当z在第四象限时，$x>0,y<0,\tan\theta=\dfrac{y}{x}<0$，则

$$\arg z=\arctan\frac{y}{x}=-\arctan\left|\frac{y}{x}\right|;$$

当z在坐标轴上时，$\begin{cases} x^+ : \arg z = 0 \\ x^- : \arg z = \pi \\ y^+ : \arg z = \dfrac{\pi}{2} \\ y^- : \arg z = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ 。

例 1.3 求以下各复数的主辐角：

(1) $z = -1 + \mathrm{i}$; (2) $z = 3 - 2\mathrm{i}$; (3) $z = -4 - \mathrm{i}$。

解：(1) $\arg z = \dfrac{3\pi}{4}$; (2) $\arg z = -\arctan\dfrac{2}{3}$; (3)$z = \arctan\dfrac{1}{4} - \pi$。

若$z = x + \mathrm{i}\,y$，因为$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，所以复数的**三角形式**（triangular form）为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \quad (r \geq 0),$$

且由于

$$z = r[\cos(\theta + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin(\theta + 2k\pi)] \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

因此复数的三角表示不唯一。若

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + \mathrm{i}\,y_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) \\ z_2 = x_2 + \mathrm{i}\,y_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \end{cases},$$

则$z_1 = z_2$等价于

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \text{或者} \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}。$$

若$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，则直接计算可得

$$\begin{aligned} z^n &= r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \cdot r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \cdots r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ &= r^2(\cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta) \cdots r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ &= r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)。 \end{aligned}$$

利用该公式可以证明三角函数的多倍角公式：

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta,$$
$$\sin 3\theta = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta。$$

开方可以看成是乘方的逆运算，从而类似地推导。设

$$\omega = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

若$\omega^n = z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，则

$$r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi),$$

显然，有$\rho = \sqrt[n]{r}$，且$\varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$，$k \in \mathbb{Z}$。

简单计算可知，当取到$k = n$后，$\cos\varphi$，$\sin\varphi$的取值出现周期性循环，所以只需取$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$。因此

$$\omega = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

共有n个不同根值。不难验证，z的n个根值$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$在圆周$|z| = r$上组成一个内接正$n$边形。

例 1.4 计算：(1) $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^3$； (2) $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^{1/3}$。

解：(1) 原式$= 2^3\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^3 = -8$；

$$\text{(2) 原式} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right),\ k = 0, 1, 2。$$

1.2 复变函数

定义 1.1 对任意的$z \in G$，经映照法则f的作用后，都至少存在一个$\omega \in G^*$，使得$\omega = f(z)$，则称ω为z的一个**复变函数**(function of complex variable)。若对应的ω是唯一的，则称ω为单值函数；否则称其为多值函数。

本书$\omega = f(z)$一般指单值函数。把复变函数$\omega = f(z)$的实部和虚部分开，写成以下形式：

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\,v(x, y), \tag{1.1}$$

其中$u(x, y)$，$v(x, y)$都是关于x, y的二元实变函数，且分别为复变函数$f(z)$的实部和虚部。显然一个复变函数相当于一对二元实变函数的结合。

例 1.5 将定义在全平面上的函数$f(z) = z^2 + 1$化为一对二元实变函数。

解：设$z = x + \mathrm{i}y$，则$f(z) = x^2 - y^2 + 1 + \mathrm{i}\,2xy$，则

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 1, \quad v(x, y) = 2xy。$$

例 1.6 将以下一对二元实变函数

$$u=\frac{2x}{x^2+y^2},\ v=\frac{y}{x^2+y^2}\quad (x^2+y^2\neq 0)$$

化为一个复变函数。

解：因为$x=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$，$y=\dfrac{1}{2\,\mathrm{i}}(z-\overline{z})$，则

$$\begin{aligned}f(z)=u+\mathrm{i}\,v&=\frac{2x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{y}{x^2+y^2}\\&=\frac{1}{|z|^2}(x+z)=\frac{3}{2\overline{z}}+\frac{1}{2z}。\end{aligned}$$

和实变函数一样，也可以给复变函数的极限一个经典的$\varepsilon-\delta$定义。

定义 1.2 对任意$\varepsilon>0$，若存在$\delta>0$，使得对任意$z\in\overset{\circ}{U}(z_0,\delta)$，都有

$$|f(z)-A|<\varepsilon,$$

则称当$z\to z_0$时，A为$f(z)$的**极限**（limit），记作

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A \text{ 或 } f(z)\to A\ (z\to z_0)。$$

跟多元实变函数的极限一样，$z\to z_0$有无穷多个趋近方向。若极限含有∞，则定义如下（其中$A\in\mathbb{C}$，$|A|<+\infty$）：

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}f(\frac{1}{t})=A\Leftrightarrow\lim_{z\to\infty}f(z)=A,\\&\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0\Leftrightarrow\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty,\\&\lim_{t\to 0}\frac{1}{f(\frac{1}{t})}=0\Leftrightarrow\lim_{z\to\infty}f(z)=\infty。\end{aligned}$$

还可以给出极限的等价定义，即

定理 1.1 若$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$，$A=u_0+\mathrm{i}\,v_0$，$z=x_0+\mathrm{i}\,y_0$，则

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A \tag{1.2}$$

的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=v_0。\tag{1.3}$$

即实部收敛到实部，虚部收敛到虚部。

证明：在此只给出充分性的证明，必要性请读者自行完成。由于式(1.3)成立，则当$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$时，有

$$|u-u_0|<\frac{\varepsilon}{2},\ |v-v_0|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

而

$$|f(z)-A|=|(u-u_0)+\mathrm{i}(v-v_0)|\le|u-u_0|+|v-v_0|,$$

因此，当$0<|z-z_0|<\delta$时，有

$$|f(z)-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$。 □

复变函数极限的四则运算法则同实变函数，即同时对$z\to z_0$或$z\to\infty$，有

$$\lim(f\pm g)=\lim f+\lim g,$$
$$\lim(fg)=\lim f\cdot\lim g,$$
$$\lim\frac{f}{g}=\frac{\lim f}{\lim g}\ (\lim g\ne 0)。$$

定义 1.3 对任意$\varepsilon>0$，若存在$\delta>0$，使得对任意$z\in\mathring{U}(z_0,\delta)$，都有

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon,$$

则称复变函数$f(z)$在点$z=z_0$处连续。

根据极限性质可知，若$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，则$f(z)$在点$z=z_0$处连续。若$f(z)$在任意点$z\in D$上连续，则称复变函数$f(z)$在区域$D$内连续。其中，连通的开集谓之区域。根据这个等价定义，设$z_0=x_0+\mathrm{i}\,y_0$，则$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$在点$z_0$处连续等价于$u(x,y),v(x,y)$都在点$(x_0,y_0)$处连续。

根据定义1.3不难得出，函数z, $\overline{z}$, $|z|$都是连续的。而且若复变函数$f(z)$连续，则$\overline{f(z)}$, $|f(z)|$也是连续的。$f(z)$和$\overline{f(z)}$的连续性是等价的，但若$|f(z)|$连续却不一定能得出$f(z)$连续。如函数

$$f(z)=\begin{cases} z-1, & \mathrm{Re}(z)\le 0\\ z+1, & \mathrm{Re}(z)>0\end{cases}$$

在点$z=0$处是不连续的，但$|f(z)|$在点$z=0$处却是连续的。

连续函数经过四则运算后仍旧连续（除法中除去分母为零的点），连续函数经过有限次复合后仍旧连续。在有界闭区域$\overline{D}$上连续函数的性质与实变函数基本相仿，即在$\overline{D}$上$|f(z)|$存在最大值和最小值。

例 1.7 确定极限是否存在：(1) $\lim\limits_{z\to 0}\arg z$；(2) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\overline{z}}{z}$；(3) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{z}$。

解：(1) 由于在零点辐角的任意性，可知极限不存在；

(2) 令$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则

$$\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z}=\lim_{r\to 0}\frac{r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}{r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}=\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta,$$

由零点辐角的任意性可知，极限不存在；

(3) 假设选取趋向$y=kx$，$0\neq k\in\mathbb{R}$，则原式

$$\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{Im}(z)}{z}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x+\mathrm{i}kx}=\frac{k}{1+\mathrm{i}k},$$

由$k\in\mathbb{R}$的任意性可知，该极限不存在。

1.3 复变函数的导数

有了极限和连续的概念后，就可以把实变函数的导数概念推广到复变函数。

定义 1.4 若$\omega=f(z)$ 在z_0的某邻域有定义，$z_0+\triangle z$是该邻域内任一点，且极限

$$\lim_{\triangle z\to 0}\frac{\triangle\omega}{\triangle z}=\lim_{\triangle z\to 0}\frac{f(z_0+\triangle z)-f(z_0)}{\triangle z}$$

存在，则称复变函数$f(z)$在点$z=z_0$处**可导**，并记该点的导数为$\left.\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}$或$f'(z_0)$。若$f(z)$在区域$D$的每一点都可导，则称$f(z)$在区域$D$内可导。

显然在点z_0处可导的函数也在该点连续，且

$$\triangle\omega=f'(z_0)\triangle z+\mathrm{o}(|\triangle z|),\quad |\triangle z|\to 0 \tag{1.4}$$

即微分$\mathrm{d}f(z_0)=f'(z_0)\triangle z=f'(z_0)\mathrm{d}z$存在，可见函数$f(z)$在点$z=z_0$处也可微。

例 1.8 根据定义求导数：(1)$f(z)=\dfrac{1}{z}$；(2)$f(z)=z^2$；(3)$f(z)=|z|^2$。

解：(1) 当$z=0$时函数$\dfrac{1}{z}$不连续，因此不可导；当$z\neq 0$时，有

$$\begin{aligned}f'(z)&=\lim_{\triangle z\to 0}\frac{\dfrac{1}{z+\triangle z}-\dfrac{1}{z}}{\triangle z}\\&=\lim_{\triangle z\to 0}\frac{-\triangle z}{z\triangle z(z+\triangle z)}=-\frac{1}{z^2}。\end{aligned}$$

(2)$f(z)=z^2$在全平面连续，对$\forall z\in\mathbb{C}$有

$$f'(z)=\lim_{\triangle z\to 0}\frac{(z+\triangle z)^2-z^2}{\triangle z}$$
$$=\lim_{\triangle z\to 0}\frac{2z\triangle z+(\triangle z)^2}{\triangle z}=2z。$$

(3)$f(z)=|z|^2$在全平面连续，对$\forall z\in\mathbb{C}$有

$$f'(z)=\lim_{\triangle z\to 0}\frac{|z+\triangle z|^2-|z|^2}{\triangle z}$$
$$=\begin{cases}0, & z=0\\ \text{不存在}, & z\neq 0\end{cases}。$$

这是因为当$z\neq 0$时，极限$\lim\limits_{\triangle z\to 0}\dfrac{x\triangle x}{\triangle x+\mathrm{i}\,\triangle y}$和$\lim\limits_{\triangle z\to 0}\dfrac{y\triangle y}{\triangle x+\mathrm{i}\,\triangle y}$不存在，可见该函数只在零点可导，且导数$f'(0)=0$。

由于复变函数导数定义的形式与实变函数的情形相同，仿照高等数学中相应定理的证明方法易得：若$f(z)$和$g(z)$在区域D内可导，则

1° $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$；

2° $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$；

3° $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$，　$(g(z)\neq 0)$。

复合函数的求导法则可同样推广。假设函数$f(z)$在点$z=z_0$处可导，$g(h)$在$h_0=f(z_0)$处可导，则复合函数$g[f(z)]$在z_0处可导，且

$$g'[f(z)]|_{z=z_0}=g'(h_0)f'(z_0)。$$

至于反函数的导数也可以直接推广。假设$\omega=f(z)$，$z=\varphi(\omega)$是两个互为反函数的单值函数，且$\varphi'(\omega)\neq 0$，则

$$f'(z)=1/\varphi'(\omega)。$$

例 1.9 求复变函数的导数：(1)$f(z)=(2z^2+\mathrm{i})^5$；(2)$f(z)=\dfrac{(1+z^2)^4}{z^2}$。

解：根据复合函数的求导法则，有

(1) $f'(z)=5(2z^2+\mathrm{i})^4\cdot 4z=20z(2z^2+\mathrm{i})^4$；

(2) 当$z=0$时，函数不连续，也不可导；当$z\neq 0$时，有

$$f'(z)=\frac{8z^3(1+z^2)^3-2z(1+z^2)^4}{z^4}=\frac{2(1+z^2)^3(3z^2-1)}{z^3}。$$

下面给出函数可导的判定定理。

定理 1.2 若函数$f(z)=u+\mathrm{i}\,v$在点$z=z_0$处可导则等价于以下两点:

1° $u(x,y)$, $v(x,y)$在点$z=z_0$处可微;

2° $u(x,y)$, $v(x,y)$在点$z=z_0$处满足Cauchy-Riemann方程，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}。\tag{1.5}$$

证明: 先证明必要性。假设函数$f(z)$在点$z=z_0$处可导，记作$f'(z)=a+\mathrm{i}\,b$，则由式(1.4)，有

$$\begin{aligned}\triangle\omega&=f(z+\triangle z)-f(z)\\&=(a+\mathrm{i}\,b)\triangle z+\mathrm{o}(|\triangle z|)\\&=(a+\mathrm{i}\,b)(\triangle x+\mathrm{i}\,\triangle y)+\mathrm{o}(|\triangle z|)\\&=(a\triangle x-b\triangle y)+\mathrm{i}(b\triangle x+a\triangle y)+\mathrm{o}(|\triangle z|)\\&=\triangle u(x,y)+\mathrm{i}\,\triangle v(x,y)+\mathrm{o}(|\triangle z|),\end{aligned}$$

可见$u(x,y)$, $v(x,y)$在点z_0可微，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=a,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-b。$$

再证明充分性。假设u, v在点$z=z_0$处可微，则有

$$\begin{aligned}\triangle u&=\frac{\partial u}{\partial x}\triangle x+\frac{\partial u}{\partial y}\triangle y+\mathrm{o}(|\triangle z|),\\ \triangle v&=\frac{\partial v}{\partial x}\triangle x+\frac{\partial v}{\partial y}\triangle y+\mathrm{o}(|\triangle z|)。\end{aligned}$$

又因为$u(x,y)$, $v(x,y)$在点$z=z_0$处满足Cauchy-Riemann方程(1.5)，于是

$$\triangle\omega=\triangle u+\mathrm{i}\,\triangle v=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\triangle x+\mathrm{i}\,\triangle y)+\mathrm{o}(|\triangle z|),$$

因而

$$\lim_{\triangle z\to 0}\frac{\triangle\omega}{\triangle z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}=a+\mathrm{i}\,b。$$

定理得证。 □

由以上论证可见，复变函数$f(z)$的导数可按下列公式之一计算:

$$\begin{aligned}f'(z)&=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}\\&=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}。\end{aligned}\tag{1.6}$$