21世纪大学数学精品教材

线性代数及其应用

喻方元 主编

科学出版社

21 世纪大学数学精品教材

线性代数及其应用

喻方元　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是根据教育部制定的理工类线性代数课程教学基本要求编写的．全书共分为四章，第一章介绍矩阵与行列式，第二章讨论向量组的线性相关性理论，第三章介绍线性方程组的基本理论，第四章讨论矩阵的相似对角化问题与二次型理论．同时，针对数学建模的需要，本书还增加了附录 Matlab 介绍与应用．全书突出矩阵的重要性，以矩阵及其初等变换为主线，讨论了向量组的线性相关性及矩阵的秩，并应用于解线性方程组上．全书从内容安排与讲述方法上自成一体，一气呵成，分散了难点，便于教学．

本书结构严谨，思路清晰，叙述由浅入深，文字流畅，例题应用特色明显，习题选材难易适当，可供高等学校理工类以及经济管理类专业学生选用，也可供其他工程技术类人员作为参考．

图书在版编目（CIP）数据

线性代数及其应用/喻方元主编．一北京：科学出版社，2012．1

21 世纪大学数学精品教材

ISBN 978-7-03-033220-2

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①喻…　Ⅲ．①线性代数一高等学校一教材　Ⅳ．①O151．2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 279715 号

责任编辑：曾　莉/责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超/封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1000)

2012 年 1 月第　一　版　印张：13 1/4

2012 年 1 月第一次印刷　字数：256 000

定价：23.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

本书依据教育部"本科数学基础课程(线性代数部分)教学基本要求"编写而成.

线性代数是高等理工科院校一门重要的基础数学课程,具有较强的理论性与抽象性,学好线性代数这门课程可以较好地培养学生的抽象思维能力与逻辑思维能力.

线性代数又是一门实用性很强的、工具性的数学课程,它所介绍的矩阵运算方法、线性方程组解的理论、矩阵对角化的理论与方法等广泛运用于工程技术、经济与管理等各个领域.

如何把线性代数严谨而抽象的理论内容与其广泛实用的工具性方法完美地结合,使得学生一方面受到严格的理论熏陶,体会严谨的数理逻辑的魅力,同时又熟练掌握其主要的计算方法,为后续的课程学习与科学研究打下数学基础,一直是广大数学工作者与教育家不懈追求的目标.本书力求对此进行有益的探索.一方面,在讲述线性代数的理论部分时尽量做到严格严谨、简约规范、逻辑清晰,先介绍向量的线性相关性理论,然后用此理论解决线性方程组解的存在性与解的结构等问题,前后一脉相承,交相呼应.另一方面,在介绍线性代数的方法部分力求简明扼要,切入要点,使学生易于掌握.

全书共分为四章,第一章介绍矩阵与行列式,先介绍矩阵的概念与基本运算,再以"矩阵的行列式"来介绍行列式的内容,突出"矩阵"与"矩阵的初等变换"这一线性代数的核心概念与核心方法.第二章介绍向量的线性相关性理论,导出向量组的秩以及矩阵的秩的一致性的结论,是全书的主要理论部分,体现了线性代数的抽象性与逻辑性.第三章讲述线性方程组解的存在与解的结构等理论,是第二章理论在线性方程组上的具体运用.最后一章讨论矩阵对角化理论以及二次型化标准形问题.最后以附录的形式介绍 Matlab 及其在线性代数上的应用,让学生阅读,使学生体会运用线性代数知识以及数学软件工具建立数学模型,解决实际问题的乐趣.

本书由湖北汽车工业学院长期在教学一线从事教学工作的经验丰富的数学教师编写.参加编写的有喻方元、雷国梁、胡政发、严钦容、茹永刚、肖海霞、甄新、刘开拓、李立安、邱敏等,全书由喻方元教授统稿.全书文字流畅、叙述严谨、说理充分,例题选材适当,习题丰富,适合作为普通高等学校理工、经济、管理类本科各专业学生学习线性代数的教材,同时可供广大科技工作者阅读.

本书选择了一些线性代数在工程技术上的典型应用问题作例题与习题，但限于作者的学识水平以及全书的篇幅，这方面的选材尚不足. 由于编者水平有限，本书难免存在遗漏与不足，诚心欢迎读者提出意见.

编　　者

2011 年 10 月 10 日

目　　录

第一章　矩阵与行列式 …… 1
第一节　矩阵的概念 …… 1
第二节　矩阵的运算 …… 6
第三节　方阵的行列式 …… 14
第四节　逆矩阵及其计算 …… 31
第五节　矩阵的分块 …… 36
第六节　矩阵的初等变换 …… 42
第七节　矩阵的秩 …… 51
习题一 …… 54

第二章　向量组的线性相关与向量空间 …… 63
第一节　向量组的线性表示 …… 63
第二节　向量组的线性相关性 …… 68
第三节　向量组的秩 …… 76
第四节　向量空间 …… 79
习题二 …… 84

第三章　线性方程组 …… 90
第一节　克拉默法则 …… 90
第二节　齐次线性方程组有非零解的条件与解的结构 …… 93
第三节　非齐次线性方程组有解判别定理与解的结构 …… 99
习题三 …… 108

第四章　相似矩阵与二次型 …… 113
第一节　欧氏空间的基本概念 …… 113
第二节　方阵的特征值与特征向量 …… 119
第三节　相似矩阵 …… 127
第四节　实对称矩阵的对角化 …… 133
第五节　二次型 …… 138
第六节　正定二次型 …… 144
习题四 …… 146

附录 Matlab 介绍与应用 …… 152
第一节 Matlab 概述 …… 152
第二节 Matlab 的变量和函数 …… 156
第三节 Matlab 绘图 …… 162
第四节 Matlab 程序设计与应用 …… 178

习题答案 …… 196

第一章

矩阵与行列式

矩阵(matrix)是线性代数的一个基本概念,是使数据有序排列的数学表示.矩阵运算是线性代数的基本内容.今天,矩阵的理论与方法已广泛应用于自然科学、工程技术和经济领域等方面,是解决线性问题的有力工具.

第一节 矩阵的概念

一、矩阵的定义

定义1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 按一定顺序排成的 m 行 n 列的数表(为表达它是一个整体,加一个括弧)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

称为 m 行 n 列矩阵,简称 $m\times n$ 矩阵,一般用粗黑体英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示.这 $m\times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素,简称为元,数 a_{ij} 位于矩阵的第 i 行第 j 列,称为矩阵的 (i,j) 元.以数 a_{ij} 为 (i,j) 元的 $m\times n$ 矩阵可简记为 $(a_{ij})_{m\times n}$. $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

元素是实数的矩阵称为实矩阵,例如

$$\begin{pmatrix} 20 & 18 & 28 \\ 22 & 34 & 30 \end{pmatrix}$$

是一个 2×3 实矩阵.

元素是复数的矩阵称为复矩阵,例如

$$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2\mathrm{i} \\ 2 & 2 & 2 \\ \mathrm{i} & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

是一个 3×3 复矩阵.

本书中提到的矩阵一般指的是实矩阵. 行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可记为$\boldsymbol{A}_n$,例如

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}13&6&-13\\2&2&-2\\-11&-3&21\end{pmatrix}$$

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 两矩阵的行数与列数都相同,则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 为同型矩阵,并且它们的对应元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等,记为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}.$$

例如,矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-4&3\\-9&8&5&2\\4&2&1&0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&3&2\\1&-2&4\\9&0&5\end{pmatrix}$$

分别为 3×4 矩阵和 4×3 矩阵,它们不是同型矩阵;而矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&5\\-9&8\\4&2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&5\\0&8\\-1&7\end{pmatrix}$$

都是 3×2 矩阵,它们是同型矩阵,但不相等;而矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

是相等的矩阵.

例 1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2x-1\\y-2&3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}s+1&1\\0&t\end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,求 x,y,s,t.

解 因为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,有 $x=1,y-2=0,s+1=1,t=3$. 解得 $x=1,y=2,s=0,t=3$.

二、常用的特殊矩阵

1. 行矩阵与列矩阵

只有一行的矩阵称为行矩阵(也称行向量):

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

只有一列的矩阵称为列矩阵(也称列向量):

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

2. 零矩阵

所有元素都为零的矩阵称为零矩阵：

$$\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

$m \times n$ 零矩阵记为$\boldsymbol{0}_{m\times n}$，简记为 $\boldsymbol{0}$，不同型的零矩阵是不相等的.

3. 对角矩阵、数量矩阵和单位矩阵

n 阶方阵中位于第 i 行第 i 列 $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 交叉位置上的元素称为主对角元素，从左上角到右下角的直线称为主对角线，从右上角到左下角的直线称为反对角线. 主对角线上有非零元，主对角以外的元素全为零的矩阵称为对角矩阵. 对角矩阵可记为

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

有时也写成 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$ 时，方阵

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

称为数量矩阵. 特殊地，称

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

为单位矩阵，其特点是主对角线上的元素为 1，其他元素为 0.

三、矩阵举例

例 2 三个商店销售某厂生产的四种产品，其售价可列成矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

其中 a_{ij} 表示第 i 店销售第 j 种产品的单价.

例 3 a，b 两省各城市间的交通道路情况如图 1.1 所示. 其中 a_i 表示 a 省的第 i 个城市，b_j 表示 b 省的第 j 个城市，连线上的数值表示交通道路数，若用 a_{ij} 表示 a 省的第 i 城到 b 省的第 j 城的交通道路数，则可列成矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

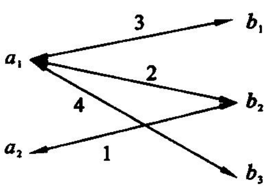

图 1.1

例 4 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{2}$$

称为一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的线性变换，其中 a_{ij} 为常数. 线性变换(2) 的系数构成矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

A 称为线性变换(2) 的系数矩阵. 显然，给定了线性变换(2)，就确定了系数矩阵 A. 反之，给定矩阵 A，就给出了由它作为系数矩阵的线性变换. 因此，线性变换与矩阵之间存在一一对应关系.

在线性变换中，有一种特殊的变换，其形式为

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1, \\ y_2 = \lambda_2 x_2, \\ \cdots\cdots \\ y_n = \lambda_n x_n, \end{cases}$$

可以称为伸缩变换,其对应的矩阵为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

特别地,当 $\lambda_i = 1 \ (i = 1,2,\cdots,n)$ 时为恒等变换,对应的矩阵为单位矩阵.

常见的线性变换还有投影变换和旋转变换.例如

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = y, \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

就是从三维空间到平面上的一个投影变换(图 1.2),对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

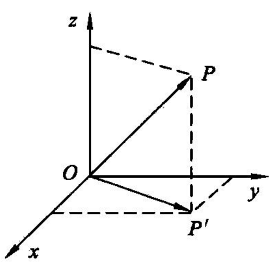

图 1.2

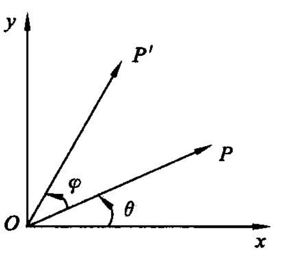

图 1.3

又如,矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

对应的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

是 xOy 平面上的一个旋转变换,旋转角为 φ(图 1.3).事实上,令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,可得

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi = r\cos(\theta+\varphi), \\ y_1 = r\cos\theta\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi = r\sin(\theta+\varphi). \end{cases}$$

由此可见，该变换为 xOy 平面上的一个旋转角为 φ 的逆时针方向的旋转变换.

第二节 矩阵的运算

一、矩阵的加法

定义 1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，称矩阵 $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之和，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

注意 只有当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵时才能相加. 例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+1 & 3+8 & -5+7 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3-1 & 6+2 & 4+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 11 & 2 \\ 7 & -4 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

不难验证矩阵加法满足如下运算规律(设 A,B,C 都是同型矩阵)：

(1) 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

(2) 结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

二、数与矩阵相乘

定义 2 设 λ 为常数，矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵 $(\lambda a_{ij})_{m\times n}$ 为数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积，记为 $\lambda\boldsymbol{A}$. 即

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

简称为数乘矩阵.

数乘矩阵满足如下运算规律(此处 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵；λ，μ 为实数)：

(1) 结合律 $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$.

(2) 分配律 $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$；$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，记

$$-\boldsymbol{A}=(-1)\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}=(-a_{ij})_{m\times n},$$

则 $-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}.$$

由此规定矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

例 1 已知 $2\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B}=0$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 方程可变形为 $5\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}$. 而

$$\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 5 & -2\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{5}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{5} & \dfrac{2}{5}\\ 1 & -\dfrac{2}{5}\end{pmatrix}.$$

三、矩阵与矩阵相乘

引例 甲、乙两公司每月分别生产I,II,III型机床20,18,28台和22,34,30台. 可把这些数据列成一个矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III}\end{array}\\ \begin{pmatrix}20 & 18 & 28\\ 22 & 34 & 30\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \text{甲公司}\\ \text{乙公司}\end{array}.$$

如果生产这三种型号的机床每台利润(万元) 为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ b_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}\begin{array}{l}\mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\end{array},$$

那么，这两家公司的月利润应为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}20\times4+18\times5+28\times6\\ 22\times4+34\times5+30\times6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}338\\ 438\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{甲公司利润}\\ \text{乙公司利润}\end{array}.$$

事实上，$\boldsymbol{C}$ 的元素是这样构成的：$\boldsymbol{C}$ 的位于(i,j) 位置的元是由 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列元对应相乘后相加的结果.

由此引出两矩阵相乘的概念.

定义 3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，则规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中 $\boldsymbol{C}$ 的位于(i,j) 位置

的元是由 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列元对应相乘后相加的结果. 即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),\tag{2}$$

记为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}.$$

$\boldsymbol{AB}$ 的图示如下：

$$\begin{pmatrix}\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{is}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}_{m\times s}\begin{pmatrix}\vdots&b_{1j}&\vdots\\\vdots&b_{2j}&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&b_{sj}&\vdots\end{pmatrix}_{s\times n}=\begin{pmatrix}\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&c_{ij}&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}_{m\times n}.$$

注意 只有当左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与右边的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才能相乘.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix},\qquad\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\\2&0\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1\times3+2\times(-1)+3\times2&1\times(-2)+2\times1+3\times0\\4\times3+5\times(-1)+6\times2&4\times(-2)+5\times1+6\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&0\\19&-3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-4&-3\\3&3&3\\2&4&6\end{pmatrix}.$$

又

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\-1&2\end{pmatrix},\qquad\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}4&5\\1&3\\0&7\end{pmatrix}.$$

但是，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 不能相乘.

矩阵乘法满足如下运算规律(读者可以自己推证，λ 为数，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为矩阵)：

(1) 结合律　$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；$\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$.

(2) 分配律　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.

值得注意的是，并非所有关于数的运算规律对于矩阵乘法都成立，请看下面两例.

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & -3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$.

解 由矩阵乘法的定义

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 28\\ -7 & -14\end{pmatrix}.$$

例 3 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{AC}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

上述两例表明两矩阵相乘与数的乘法运算有如下几点不同（设 a,b,c 为常数；$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为矩阵）：

(1) 数的乘法满足交换律，即 $ab=ba$；而矩阵乘法交换律不成立. 即一般来说，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

(2) 数的乘法满足消去律，即若 $ab=ac$，则当 $a\neq 0$ 时，有 $b=c$；而对于矩阵乘法，当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 时，可以有 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$. 特殊地，在数的运算中，当 $ab=0$ 时，有 $a=0$ 或 $b=0$；而矩阵相乘中，当 $\boldsymbol{AB}=0$ 时，可以 $\boldsymbol{A}\neq 0$ 且 $\boldsymbol{B}\neq 0$.

若方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换. 显然，数量矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}$ 与任何矩阵的乘法是可交换的.

例 4 设有线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}\tag{3}$$

由矩阵相等，上式可写为

$$\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}.$$

利用矩阵乘积,上式可表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{4}$$

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则线性方程组可用矩阵形式记为

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}. \tag{5}$$

例 5 在上节给出的由变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 到变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性变换的关系式(2) 中,令 $m = n$,记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

则线性变换(2) 可用矩阵形式记为 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{AY}$.

如果又有一个线性变换 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{BZ}$,其中

$$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n}, \quad \boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1n}z_n, \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \cdots + b_{2n}z_n, \\ \cdots\cdots \\ y_n = b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \cdots + b_{nn}z_n. \end{cases}$$

将(2) 代入(3) 得变换

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{Z}$$

变换(4) 就是从 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 到 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性变换,这两个线性变换的合成所对应的矩阵正是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积. 历史上,人们正是从线性变换引出矩阵乘法定义的.

对单位矩阵 $\boldsymbol{E}$,有