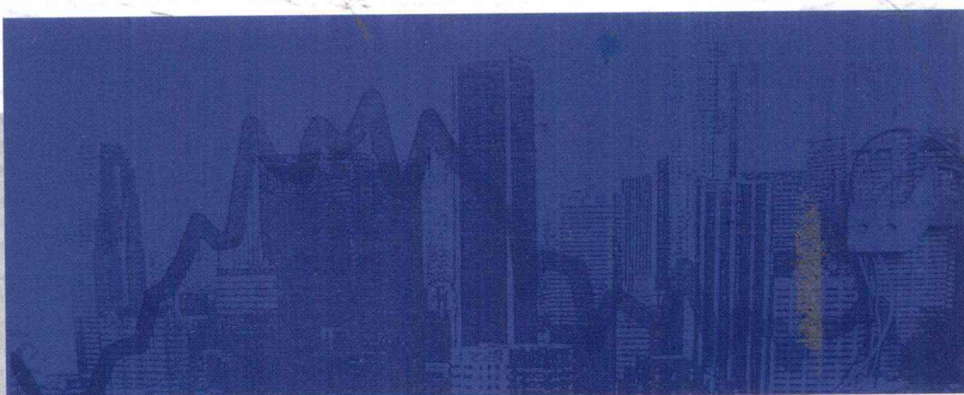
科学经管文库



不确定模糊判断矩阵原理、方法与应用

巩在武 著

科学出版社

不确定模糊判断矩阵原理、方法与应用

巩在武　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

决策环境中存在大量的复杂不确定性信息，人类的“知识有限”、“理性有限”，专家的经验与判断是解决非结构性、定性以及定性与定量结合等决策问题的一种有效的方法。在不确定模糊判断矩阵决策论域下，以一致性理论为理论研究基础，利用信息融合方法集成不精确性、不确定性和部分真实性的判断信息，利用软计算、优化技术得到易处理、低求解成本和融合实际的“满意”或“近似”解，是本书主要探讨的内容。

本书可作为高等院校、科研院所从事管理科学、信息科学、系统工程和运筹学等专业研究人员的参考书，也可作为经济与管理、数学与系统科学等专业高年级研究生的参考教材，还可作为政府决策部门、企业管理、工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

不确定模糊判断矩阵原理、方法与应用/巩在武著. —北京：科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-030974-7

Ⅰ.①不… Ⅱ.①巩… Ⅲ.①模糊集理论-应用-判断矩阵-研究 Ⅳ.①O159②C934

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 081127 号

责任编辑：彭 楠/责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠/封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年5月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2011年5月第一次印刷 印张：10 1/2
印数：1－1 800 字数：210 000

定价：36.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

现实生活中，专家的经验与判断（判断矩阵）是解决非结构性、定性以及定性与定量结合等决策问题的一种有效的方法。然而，面对决策环境中大量的复杂不确定性信息，人类的“有限知识”、“有限理性”，决策专家很难给出“精确的”、“满足一致性条件的”、“整体最优的”判断信息。哈蒙德（Hammond）的研究指出，越是遇到复杂不定且不熟悉的任务，人们越有可能采用“直觉”判断策略，“直觉”判断比精确判断更能反映人类的行为认知过程。“直觉”判断策略实质上表现为一种不确定的模糊判断区间。随着模糊集及其拓展理论研究的不断深入，这种不确定的模糊区间在区间模糊集中表现为区间模糊判断知识、三角模糊判断知识、梯形模糊判断知识；在模糊逻辑与软计算中体现为自然语言判断知识；在直觉模糊集中体现为直觉模糊判断知识。

因此，本书从基础理论角度出发，以模糊集及其拓展理论为研究论域，探讨不确定模糊区间判断知识的定量化理论与方法；研究不确定判断知识的一致性理论，研究不确定判断知识的判断信息的集成方法，研究“满意”方案选择建模与智能算法。从应用角度出发，利用实际案例验证理论研究的合理性与可行性，规范理论研究的应用途径。本书为作者 2004～2010 年研究成果的汇总与优化。

本书共分 8 章，在章节关系上，以模糊集扩展理论的发展历程为主线；在各章节结构体系上，以各种不确定偏好判断矩阵的一致性理论及决策方案建模、算法为研究主线。

第 1 章绪论部分介绍了不确定性的知识表现，不确定判断知识的研究范围及不确定判断矩阵的核心研究内容。

第 2 章模糊判断矩阵相关理论部分介绍了互反判断矩阵及模糊判断矩阵的一些基础理论知识如一致性理论、排序理论等，以作为后面几章的研究基础。本章还介绍了残缺信息下的模糊判断矩阵群体决策方法。

第 3 章区间数模糊判断矩阵理论部分介绍了区间数模糊判断矩阵的一致性理论、排序理论、残缺信息下的区间模糊判断矩阵的群决策方法及应用。

第 4 章三角模糊数判断矩阵理论部分介绍了三角模糊数判断矩阵的一致性理论、排序理论、残缺信息下的三角模糊数判断矩阵的群决策方法及应用。

第 5 章二元语义判断矩阵理论部分介绍了有关自然语言的决策研究进展，并研究了基于二元语义语言判断矩阵的一致性理论、群体决策理论及应用。

第 6 章梯形模糊数互补判断矩阵理论部分介绍了梯形模糊数与二元语义之间

的转化关系，研究梯形模糊数互补判断矩阵的集结、排序问题及应用。

第 7 章不同模糊偏好矩阵群决策理论部分介绍了多元偏好判断知识的集结方法、群体决策方法及应用。

第 8 章直觉模糊判断矩阵理论前半部分介绍了直觉模糊判断矩阵的一致性理论、排序理论、残缺信息下的直觉模糊数判断矩阵的群决策方法及应用。后半部分介绍了直觉模糊判断矩阵的群体一致性分析理论、最优群决策建模方法及应用。

本书是在作者的博士学位论文“不确定模糊判断矩阵理论方法研究”的基础上经过完善与扩充而成。本书还包括了作者博士后期间的一些研究工作。在此，作者谨对南京航空航天大学刘思峰教授、南京信息工程大学李廉水教授给予的指导与帮助致以由衷的感谢！

本书的研究工作得到了国家自然科学基金(70901043)、教育部人文社会科学研究项目(09YJC630130)及江苏省青蓝工程项目的资助。

由于作者水平有限，书中肯定会有诸多不足之处，恳请读者给予批评、指正。

巩在武

2011 年 5 月

目　　录

第1章　绪　　论

现实生活中，专家的经验与判断是解决非结构性、定性以及定性与定量结合等决策问题的一种有效的方法[1,2]。理想的决策过程总是希望个体思维理性、群体决策默契，以形成一致(consistency or consensus)的精确判断，在此基础上进行知识集成并形成“最优”决策方案。然而，面对决策环境中大量的复杂不确定性信息，人类的“有限知识”、“有限理性”，决策专家很难给出“精确的”、“满足一致性条件的”、“整体最优的”判断信息。专家更愿意给出不完全的、不确定的判断知识；专家思维只能满足一定限度条件的一致性；专家的选择方案只能局部最优而非全局最优。不确定条件下的专家判断决策理论研究是决策分析领域的重要研究内容。

1.1　不确定性的表现

在复杂的大型决策中，决策问题本身和决策客观环境的复杂性，以及决策专家主观判断的不确定性，专家之间的知识、经验、能力、偏好等因素的差别使得决策中的群体与个体知识分别呈现如下特点：知识本身的不确定性，即模糊性、随机性、灰性等；判断信息的不精确性，即知识本身的不确定性必然导致判断信息的不精确性。从某种意义讲，这些不精确信息是对复杂决策问题的最客观的认识和分析；个体判断的有限性，即个体判断是“有限理性的”，个体主观判断总有偏见，决策个体总有偏好，思维总有误差；群体判断的复杂性与冲突性，即通过克服群体知识之间的冲突、不一致以及个体知识的有限性，达成共识。上述不确定的表现，一言以蔽之——“不熟悉导致不确定”(波拉克——《不确定的科学与不确定的世界》)。

1.2　不确定判断知识的范围

判断知识的不确定性表现为知识的不完全性与“直觉”性：判断知识的不完全性表现为决策参数的不完备性、部分决策数据的残缺性。“直觉”性表现为：区间值模糊知识(Zadeh)用连续的隶属度范围；三角形模糊知识用最低隶属度、最高隶属度及最可能度；梯形模糊知识用最低可能区间、最高可能区间；语言判断知识以自然语言评价(如优、良、中、差等)作为显性判断，以明确数(crisp number)或区间模糊数或三角模糊数或梯形模糊数为隐性知识；直觉模糊判断知识(Atanassov)用隶属度、非隶属度和犹豫度三个离散的信息对决策问题进行直观判断与理性选择。

1.3 不确定模糊集理论的历史沿革

1965 年，Zadeh[3]提出了模糊集理论，开创了定性问题定量分析的新时代。1975 年，Zadeh[4]又提出了区间值模糊集扩展理论，将普通意义上的模糊隶属度推广至一个不确定的区间。在专家决策领域，不确定知识表达由明确数偏好逐渐发展到区间偏好如区间值、三角值、梯形值以及自然语言模糊数。1982 年，“The Control Problem of Grey System”一文在北荷兰出版公司发表，标志着灰色系统理论[5,6]的诞生。灰色决策理论用灰数偏好表达专家的决策知识。1986 年 Atanassov[7]提出了直觉模糊集，是经典模糊理论的推广，也是区间值模糊集扩展理论的推广。国外学者统称区间偏好、灰数偏好、直觉模糊判断知识为“直觉”知识[8]。“直觉”知识表达方式实质上是思维判断的一种直觉行为。1989 年，Atanassov 和 Gargov[9]建立了直觉模糊集与区间值模糊集之间的关系。判断知识的不确定性随着模糊集理论的发展而不断创新：明确数判断→区间数判断→三角模糊数判断→梯形模糊数判断→自然语言判断→二元语义判断→直觉模糊判断。

1.4 不确定判断矩阵的核心研究内容

一致性偏好是理性选择的基础。然而，通过大量的实例说明，在复杂、不确定决策中，非一致性更容易发生。决策、福利经济学等领域中，一致性与非一致性偏好长达 50 年的争论产生了如阿罗(Arrow)、阿马蒂亚·森(Amartya)以及费施伯恩(Fishburn)等为代表的社会选择理论、群决策理论。基于“直觉”判断知识进行决策的一致性研究是判断知识融合与决策方案优选选择的基础；“直觉”判断在模拟人类决策思维方面的特点又使得该理论容许不一致性在一定范围内、一定条件下的存在。判断知识的不完全性、不确定性很难对应现实生活的“最优”决策方案。利用软计算技术集成所允许的不精确性、不确定性和部分真实性的判断信息，得到易处理、低求解成本和融合实际的“满意”或“近似”解，是专家“直觉”判断决策方案的理想选择。

本书从基础理论角度出发，以模糊集及其拓展理论为研究论域，探讨不确定模糊区间判断知识的定量化理论与方法；研究不确定判断知识的一致性理论，研究不确定判断知识的判断信息的集成方法，研究“满意”方案选择建模与智能算法。从应用角度出发，利用实际案例验证理论研究的合理性与可行性，规范理论研究的应用途径。基于“直觉”判断知识的一致性理论、一致性理论下的决策方案优选研究是本书研究的重点。

第 2 章　判断矩阵相关理论研究

AHP(层次分析法)研究的核心问题是构造合理的判断矩阵[1,2]，在此基础上获取合适的方案排序。判断一个判断矩阵构造的是否合理，主要通过判断矩阵的性质来检验。因此，判断矩阵的研究实际上要解决两大主要问题：一是判断矩阵的一致性性质及一致性检验理论研究；一是建立在此性质基础上的排序方法研究。关于这两方面的研究，目前已经取得了极为丰硕的成果，业已基本成熟，在很多专著与教材中皆有详细论述[10~12]。尽管如此，作为本书研究的基础，还是有必要论述其中的一些重要基础研究成果[13~16]，以作为后续章节的理论基础。

本章的研究内容包括：首先介绍判断矩阵及其两种不同的标度形式，在此基础上介绍两种不同的判断矩阵——互反判断矩阵、模糊判断矩阵的性质，本章的第三节介绍两种判断矩阵的特征向量排序方法，本章的第四节介绍残缺信息下的模糊判断矩阵排序方法，对这个内容的研究也是过去 20 年间本领域中较为活跃的一个研究课题。需要指出的是，第三节介绍的特征向量方法，也将在后续章节中继续使用，这也是在本章中介绍判断矩阵排序方法的原因之一。

2.1　判断矩阵及其标度

记集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，$M=\{1,2,\cdots,m\}$。设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为有限方案(因素、元素)集，其中 $x_i(i\in N)$ 表示第 i 个决策方案。设决策准则集合为 $H=\{h_1,h_2,\cdots,h_m\}$，其中 $h_l(l\in M)$ 表示第 l 个决策准则。针对某个决策准则 $h_l(l\in M)$，决策专家根据自己的经验、知识对方案集 X 中的任意两个方案 x_i 与 $x_j(i,j\in N)$ 进行两两比较判断，构造出如下形式的判断矩阵(judgment matrix)[1,2]：

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中，a_{ij} 表示在准则 $h_l(l\in M)$ 下，方案 x_i 相对于方案 $x_j(i,j\in N)$ 的重要(优或劣等)程度。

由于判断矩阵表达的是专家主观思维的一种偏好，因此，在国外文献中，判断矩阵被表述为偏好关系(preference relation)。决策专家在对方案进行两两比较判

断时，需要遵循一定的判断标度。目前，最常用的判断标度有两种，一种是萨蒂(Saaty)提出的1～9标度法[1]，另一种是模糊标度(0.1～0.9)[17]标度法。前者也称为互反型标度，后者也称为模糊型标度或互补型标度。表2.1与表2.2分别给出了这两种标度所表示的含义。

表2.1　互反型(1～9)标度

1～9标度	含义
1	元素 i 与元素 j 同样重要
3	元素 i 稍重要于元素 j
5	元素 i 明显重要于元素 j
7	元素 i 强烈重要于元素 j
9	元素 i 极端重要于元素 j
2,4,6,8	表示上述相邻判断的中间值
倒数	若元素 i 与元素 j 的重要性之比为 a_{ij}，那么元素 j 与元素 i 的重要性之比为 $a_{ji}=a_{ij}^{-1}$

表2.2　模糊型(0.1～0.9)标度

0.1～0.9标度	含义
0.1	元素 j 极端重要于元素 i
0.2	元素 j 强烈重要于元素 i
0.3	元素 j 明显重要于元素 i
0.4	元素 j 稍微重要于元素 i
0.5	元素 i 与元素 j 同样重要
0.6	元素 i 稍微重要于元素 j
0.7	元素 i 明显重要于元素 j
0.8	元素 i 强烈重要于元素 j
0.9	元素 i 极端重要于元素 j
互补	若元素 i 与元素 j 的重要性程度为 a_{ij}，那么元素 j 与元素 i 的重要性程度为 $a_{ji}=1-a_{ij}$

若判断矩阵中的元素以互反型标度给出，我们得到互反型判断矩阵；若判断矩阵中的元素以模糊型标度给出，我们得到模糊型(互补)判断矩阵。

定义2.1[1,17,18]　若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ii}=1, a_{ij}=\dfrac{1}{a_{ji}}, a_{ij}>0, i,j\in N$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为互反判断矩阵，其中 a_{ij} 表示在互反型标度下，元素 i 与元素 j 相对于某一准则 H 的重要性程度。

定义2.2[19]　若矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}$ 满足 $r_{ii}=0.5, r_{ij}+r_{ji}=1, r_{ij}\geqslant 0, i,j\in N, i\neq j$，

则称 $\boldsymbol{R}$ 为模糊判断矩阵，其中 r_{ij} 表示在模糊型标度下元素 i 与元素 j 相对于某一准则 H 的重要性程度。

2.2　两种判断矩阵的性质

互反判断矩阵与模糊判断矩阵皆具有良好的性质，这些性质一方面客观地说明了构造判断矩阵的合理性；另一方面，可以验证决策专家判断思维的一致性与合理性。这些性质包括完全一致性、满意一致性、中分一致性、弱一致性等。

2.2.1　互反判断矩阵的性质

定义 2.3[1,17]　若互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij}=a_{ik}a_{kj}(i,k,j\in N)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为完全一致性互反判断矩阵。

定义 2.4[1,11]　若互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足

(1) 当 $1\leqslant\lambda\leqslant 9$ 时，若 $a_{ij}\geqslant\lambda, a_{jk}\geqslant\lambda$，则 $a_{ik}\geqslant\lambda$；

(2) 当 $1/9\leqslant\lambda\leqslant 1$ 时，若 $a_{ij}\leqslant\lambda, a_{jk}\leqslant\lambda$，则 $a_{ik}\leqslant\lambda$。

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有中分传递性。

定义 2.5[11,18]　若互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足

(1) 当 $a_{ik}\geqslant 1$ 且 $a_{kj}\geqslant 1$ 时，有 $a_{ij}\geqslant 1$；

(2) 当 $a_{ik}\leqslant 1$ 且 $a_{kj}\leqslant 1$ 时，有 $a_{ij}\leqslant 1$。

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有满意一致性。

性质 2.1[11]　完全一致性互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足中分传递性、满意一致性。

互反判断矩阵的这种满意一致性表现为决策方案之间优劣关系的一种传递性：

定义 2.5′　若互反判断矩阵具有满意一致性，则决策者针对方案集 $X=\{x_1, x_2,\cdots,x_n\}$ 优劣关系的判断值具有传递性，即存在方案优劣排序链 $x_{u_1}\geqslant x_{u_2}\geqslant\cdots\geqslant x_{u_n}$，其中 x_{u_i} 表示方案集中按照方案优劣关系排在第 i 位的方案；反之，若存在某个方案优劣排序循环链 $x_{u_{i1}}\geqslant x_{u_{i2}}\geqslant\cdots\geqslant x_{u_{ik}}\geqslant x_{u_{i1}}$，其中 $u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{ik}$ 为 $\{1,2,\cdots,k\}$，$k\leqslant n$ 的一个置换，则称决策者针对方案集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 优劣关系的判断值不具有传递性，即互反判断矩阵不具有满意一致性。

此外，互反判断矩阵还具有其他重要的性质，有兴趣的读者可以参阅文献 [1]，[2]，[11]，这些性质不是本书介绍的重点，因此不再详述。

2.2.2　模糊判断矩阵的性质

模糊判断矩阵的判断标度在 0.1～0.9，这种判断较 1～9 标度更符合人们的

思维习惯。国内外学者[20,21]针对模糊判断矩阵性质的研究，给予了较多的关注。例如，中分传递性、满意一致性、严格强一致性（restricted max-max transitivity）、严格弱一致性（restricted max-min transitivity）等，模糊判断矩阵这些丰富的性质在数学表现形式上更能反映决策者的思维状态。

关于模糊判断矩阵完全一致性的定义有两种：

定义 2.6[22,23]　若模糊判断矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}$ 满足 $r_{ij}=r_{ik}-r_{jk}+0.5, i,j,k\in N, i\neq j\neq k$，则称 $\boldsymbol{R}$ 为加性（完全）一致性模糊判断矩阵。

定义 2.7[23]　若模糊判断矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}$ 满足 $r_{ik}r_{kj}r_{ji}=r_{ij}r_{jk}r_{ki}, i,j,k\in N, i\neq j\neq k$，则称 $\boldsymbol{R}$ 为乘性（完全）一致性模糊判断矩阵。

事实上，这两种完全一致性皆来源于互反判断矩阵的完全一致性，即通过数学映射关系，将互反判断矩阵的完全一致性转化为两种不同的完全一致性模糊判断矩阵。

引理 2.1[23]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为互反判断矩阵，$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}$ 为模糊判断矩阵，则当模糊标度为 0.1～0.9 时，有

$$r_{ij}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{5}\log_9 a_{ij}\right);\ a_{ij}=3^{5(r_{ij}-0.5)}, i,j\in N \tag{2.1}$$

$$r_{ij}=(1+a_{ji})^{-1}; a_{ij}=r_{ij}r_{ji}^{-1}, i,j\in N \tag{2.2}$$

引理 2.2[23]　完全一致性互反判断矩阵与加性一致性模糊判断矩阵、乘性一致性模糊判断矩阵可以分别通过公式(2.1)和公式(2.2)互相转换。

定义 2.8[11]　设 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}$ 为模糊判断矩阵，对任意的 $i,j,k\in N, i\neq j\neq k$，有

(1) 若 $0.5\leqslant\lambda<1$，当 $r_{ij}\geqslant\lambda, r_{jk}\geqslant\lambda$ 时，则 $r_{ik}\geqslant\lambda$；

(2) 若 $0<\lambda\leqslant0.5$，当 $r_{ij}\leqslant\lambda, r_{jk}\leqslant\lambda$ 时，则 $r_{ik}\leqslant\lambda$。

则称矩阵 $\boldsymbol{R}$ 具有中分传递性。

定义 2.9[11]　设 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}$ 为模糊判断矩阵，对任意的 $i,j,k\in N, i\neq j\neq k$，有

(1) 若 $r_{ij}\geqslant0.5, r_{jk}\geqslant0.5$，则 $r_{ik}\geqslant0.5$，

(2) 若 $r_{ij}\leqslant0.5, r_{jk}\leqslant0.5$，则 $r_{ik}\leqslant0.5$。

则称矩阵 $\boldsymbol{R}$ 具有满意一致性。

模糊判断矩阵的这种满意一致性表现为决策方案之间优劣关系的一种传递性。

定义 2.9′　若模糊判断矩阵具有满意一致性，则决策者针对方案集 $X=\{x_1, x_2,\cdots,x_n\}$ 优劣关系的判断值具有传递性，即存在方案优劣排序链 $x_{u_1}\geqslant x_{u_2}\geqslant\cdots\geqslant x_{u_n}$，其中 x_{u_i} 表示方案集中按照方案优劣关系排在第 i 位的方案；反之，若存在某个方案优劣排序循环链 $x_{u_{i1}}\geqslant x_{u_{i2}}\geqslant\cdots\geqslant x_{u_{ik}}\geqslant x_{u_{i1}}$，其中 $u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{ik}$ 为 $\{1,2,\cdots,$

$k\}$，$k \leqslant n$ 的一个置换，则称决策者针对方案集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 优劣关系的判断值不具有传递性，即模糊判断矩阵不具有满意一致性。

定义 2.10[20,21]　设 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}$ 为模糊判断矩阵，对任意的 $i,j,k\in N$，$i\neq j\neq k$，

$$\text{当 } r_{ij}\geqslant 0.5, r_{jk}\geqslant 0.5 \text{ 时，有 } r_{ik}\geqslant \max\{r_{ij}, r_{jk}\}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{R}$ 具有严格强一致性。

定义 2.11[20,21]　设 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}$ 为模糊判断矩阵，对任意的 $i,j,k\in N$，$i\neq j\neq k$，满足

$$\text{当 } r_{ij}\geqslant 0.5, r_{jk}\geqslant 0.5 \text{ 时，有 } r_{ik}\geqslant \min\{r_{ij}, r_{jk}\}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{R}$ 具有严格弱一致性。

性质 2.2[20,21]　加性(完全)一致性模糊判断矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}$ 满足中分传递性、满意一致性、严格强一致性、严格弱一致性。

决策专家在构造判断矩阵时，往往很难给出满足上述性质的判断矩阵，需要多次对自己的判断进行调整。判断矩阵一致性判断及调整理论研究是判断矩阵研究的重点内容之一，有兴趣的读者可以参阅文献[11]，[19～24]。

2.3　判断矩阵的特征向量排序方法

决策者构造判断矩阵的一个重要目的，就是为了获得决策方案的排序。单一准则下判断矩阵的排序方法研究是判断矩阵研究的重要课题。如果决策专家足够理性、具有足够的判断能力，就能针对决策方案进行两两比较判断，构造出判断矩阵，从而得到准确的方案排序，这实际是一种理想的状态。理想状态的判断矩阵满足完全一致性条件，但在实际决策过程中，这种理想状态很难达到，即得到的判断矩阵很难达到完全一致性。为了得到判断矩阵的排序向量，需要建立优化模型，最小化个体判断与理想判断之间的差异，或者极大化个体判断与理想判断之间关联。目前，关于判断矩阵的排序方法研究成果众多，本节将基于前面提到的完全一致性定义，分别研究互反判断矩阵及模糊判断矩阵的排序方法。

下面的引理可以在很多文献中找到。

引理 2.3(Frobenius 引理[25])　设 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}r_{ij}\geqslant 0$，则

(1) $\boldsymbol{R}$ 有最大特征根 $\lambda_{\max}$，并且 $\lambda_{\max}$ 是单根；

(2) $\lambda_{\max}$ 对应于 $\boldsymbol{R}$ 的特征根可以全部由正分量组成，并且所有的特征向量只差一个比例因子。

单位化向量 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，$x_i\geqslant 0, y_i\geqslant 0, i\in N$，$\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的余弦夹角为 $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$。

2.3.1 互反判断矩阵排序的特征向量方法[13]

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为完全一致性互反判断矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 确定的排序向量为 $\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$，则 $a_{ij}=\dfrac{w_i}{w_j}$，$i,j\in N$。将互反判断矩阵的各列向量分别单位化得到的矩阵称为该判断矩阵的单位化矩阵。

设 $\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 是一致性互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的单位化权重向量，$\boldsymbol{A}$ 的单位化矩阵为 $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\cdots,\boldsymbol{E}_n)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2=\cdots=\boldsymbol{E}_n=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$，其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}w_i^2=1$。

显然，此时 $\boldsymbol{W}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的所有列向量余弦夹角平方之和 $\sum\limits_{i=1}^{n}(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_i)^2=n$ 达到最大。

由于互反判断矩阵往往是不一致的，设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的单位化权重向量，则可以将 $\boldsymbol{X}$ 看作使 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的各单位化列向量 $\boldsymbol{E}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的余弦夹角平方之和达到最大的向量。其中 $\boldsymbol{E}_j=(e_{1j},e_{2j},\cdots,e_{ij},\cdots,e_{nj})^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{E}$ 的列向量，$e_{ij}=a_{ij}(\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}}$，$i,j\in \boldsymbol{N}$。因此，可以构造如下非线性规划排序模型(NEM-新特征向量方法)：

$$\max\quad f(X)=\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{E}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^2=\sum_{j=1}^{n}[(e_{1j},e_{2j},\cdots,e_{nj})(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}]^2$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}(x_j)^2=1 \tag{2.3}$$

定理 2.1 设 $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\cdots,\boldsymbol{E}_n)^{\mathrm{T}}$ 是互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的单位化向量，$\lambda_{\max}$ 是 $\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}$ 的最大特征根，则互反判断矩阵 NEM 的单位化排序向量 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为属于 $\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}$ 的最大特征根 $\lambda_{\max}$ 的唯一的正特征向量。

证明 构造 Lagrange 函数

$$g(X,\lambda)=f(X)-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

令 $\dfrac{\partial g(X,\lambda)}{\partial x_i}=0,i=1,2,\cdots,n$，得

$$\boldsymbol{E}'_i\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\lambda x_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

其中，$\boldsymbol{E}'_i$ 为 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行向量。上式等价于

$$\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X} \tag{2.4}$$

由式(2.4)知，若 f 取极值，则 λ 恰好为 $\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}$ 的特征根，而 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}$ 的属于 λ 的特

征向量. 显然 $\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}$ 不可约,由引理 2.3 可知,$\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}$ 必存在唯一最大特征根 $\lambda_{\max}$,并且 $\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}$ 的属于 $\lambda_{\max}$的单位化特征向量 $\boldsymbol{X}^*$ 全部由正分量构成,又因为 $\boldsymbol{X}^*$ 是单位化向量,从而 $\boldsymbol{X}^*$ 必唯一。

下面将证明 $\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}$ 的属于 $\lambda_{\max}$的特征向量 $\boldsymbol{X}^*$ 就是使式(2.3)达到最大的约束非线性规划问题的最优解。

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}$ 的属于不同于 $\lambda_{\max}$的任意一个特征向量,并且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$,则

$$\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^* = \lambda_{\max}\boldsymbol{X}^*, \quad \boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$$

上式两边分别左乘 $\boldsymbol{X}^*$ 与 $\boldsymbol{\alpha}^*$,可得

$$\boldsymbol{X}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^* = \lambda_{\max}\boldsymbol{X}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^* = \lambda_{\max}, \quad \alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \lambda$$

所以有

$$\boldsymbol{X}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^* > \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$$

即

$$\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{E}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^*)^2 > \sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{E}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}^T)^2$$

由 λ 的任意性可知

$$\max\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{E}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^2 = \sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{E}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^*)^2 = \lambda_{\max}$$

从而命题成立。

推论 2.1　一致性互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$的 NEM 的单位化排序向量 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}$ 的最大特征根 n 的正特征向量,且 $\boldsymbol{X}$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征根 n 的特征向量,其中 $\boldsymbol{E}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的单位化矩阵。

证明　设 $\boldsymbol{X}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 属于特征根 n 的特征向量,并且满足 $\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2=1$. 因为

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n & \cdots & x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}$ 的特征根与 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}$ 的特征根相等,很容易得到 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}$ 的特征根为 $n,0,\cdots,0$,从而 $\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}$ 的最大特征根为 n。由定理 2.1 可知,若 $\boldsymbol{X}^*=(\overset{*}{x}_1,\overset{*}{x}_2,\cdots,\overset{*}{x}_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}$ 的属于 n 的特征向量,则

$$\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^* = n\boldsymbol{X}^*$$

而

$$EE^{\mathrm{T}}X=\begin{pmatrix}x_1 & x_1 & \cdots & x_1\\ x_2 & x_2 & \cdots & x_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n & x_n & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

由 X^* 的唯一性知 $X^*=X$，所以命题成立。

2.3.2 模糊判断矩阵排序的特征向量方法[13]

1. 基于乘性一致性指标的模糊判断矩阵排序的特征向量方法

设 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 为乘性一致性模糊判断矩阵，矩阵 R 确定的排序向量为 $V=(v_1,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$，则 $r_{ij}=\dfrac{v_i}{v_i+v_j}, i,j\in N$。

令 $b_{ij}=\dfrac{1}{r_{ij}}-1$，则 $b_{ij}=\dfrac{v_j}{v_i}$. 将矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 中的行向量单位化后得到的矩阵为 $F=(F_1, F_2,\cdots, F_n)^{\mathrm{T}}$，则 $F_i=(v_1,\cdots,v_n)$。

这里不妨称 F 为乘性一致性模糊判断矩阵的单位化矩阵。

设 $V=(v_1,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$ 是乘性一致性模糊判断矩阵 R 的单位化权重向量，R 的单位化矩阵为 $F=(F_1, F_2, \cdots,F_n)^{\mathrm{T}}$，则 $F_1=F_2=\cdots=F_n=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$。

显然，此时 V 与 F 的所有行向量余弦夹角平方之和 $\sum_{i=1}^{n}(F_iV)^2=n$ 达到最大。

由于模糊判断矩阵往往不满足乘性一致性，设 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 是模糊判断矩阵 R 的单位化权重向量，则可以将 Y 看作为使 Y 与 R 的单位化行向量 $F_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的余弦夹角平方之和达到最大的向量，其中 $F_j=(f_{j1},f_{j2},\cdots,f_{jn})$ 为 F 的第 j 行向量，$f_{ij}=\left(\dfrac{1}{r_{ij}}-1\right)\left(\sum_{l=1}^{n}(\dfrac{1}{r_{il}}-1)^2\right)^{-\frac{1}{2}}, i,j\in N$。

因此，可以构造如下非线性规划模型（MFNEM-基于乘性一致性指标的模糊判断矩阵新特征向量排序方法）：

$$\max\quad g(Y)=\sum_{j=1}^{n}(F_jY)^2=\sum_{j=1}^{n}\left[(f_{j1},f_{j2},\cdots,f_{jn})(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\right]^2$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}(y_j)^2=1 \tag{2.5}$$

定理 2.2 设 $F=(F_1, F_2,\cdots, F_n)^{\mathrm{T}}$ 是模糊判断矩阵 R 的单位化矩阵，$\lambda_{\max}$ 是 $F^{\mathrm{T}}F$ 的最大特征根，则模糊判断矩阵 MFNEM 的单位化排序向量 Y 为属于 $F^{\mathrm{T}}F$ 的最大特征根 $\lambda_{\max}$ 的唯一的正特征向量。

证明 略。