

国家工科数学课程教学基地建设系列教材

线性代数

XIANXING DAISHU (第二版)

华南理工大学数学科学学院

方卫东 吴洪武 编



华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

国家工科数学课程教学基地建设系列教材

线 性 代 数

(第二版)

华南理工大学数学科学学院

方卫东 吴洪武 编



华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

· 广州 ·

内 容 简 介

本书介绍了行列式、矩阵、线性方程组、向量的线性相关性、相似矩阵及二次型方面的知识,涵盖硕士研究生入学考试大纲有关线性代数的全部内容,并在附录中收集了历年工科类考研试题和课程知识的应用例子。

本书内容丰富,涵盖面广,论证严谨,叙述简洁,例题精选,习题适量,循序渐进.适合理工科大学所有非数学专业以及非理工院校理工、经管、医药、农林等专业的学生、教师学习和教学使用,对考研的同学也有很大帮助.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/方卫东,吴洪武编.—2版.—广州:华南理工大学出版社,2014.1
(国家工科数学课程教学基地建设系列教材)

ISBN 978-7-5623-3919-9

I. ①线… II. ①方…②吴… III. ①线性代数-高等学校-教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 311275 号

线性代数

方卫东 吴洪武 编

出 版 人: 韩中伟

出版发行: 华南理工大学出版社

(广州五山华南理工大学 17 号楼, 邮编 510640)

<http://www.scutpress.com.cn> E-mail: scutcl3@scut.edu.cn

营销部电话: 020-87113487 87111048 (传真)

责任编辑: 张 颖

印 刷 者: 广州市穗彩彩印厂

开 本: 787mm×960mm 1/16 印张: 7.75 字数: 180 千

版 次: 2014 年 1 月第 2 版 2014 年 1 月第 4 次印刷

定 价: 15.00 元

版权所有 盗版必究 印装差错 负责调换

前 言

《线性代数》是大学数学课程中一门重要的基础课,对于培养学生的抽象思维能力和逻辑推理能力有重要的作用.近二三十年来,中国高等教育得到飞速发展.一方面,高等教育的规模日益扩大,精英式的教育向大众化的教育模式转化;另一方面,教学内容越来越多,课时数相对偏少.如何使学生在有限的时间内更好地学习数学知识,掌握数学思想,提高数学素养,是教育工作者在教学过程中必须思考的问题.我们认为有两方面的工作要做:一是编写优秀的教学参考书,二是培养因材施教的优秀教师.

编著本书的宗旨是力求以最小的篇幅、最简洁的语言、最准确的描述、最少的时间、最合理的安排、最容易接受的方式系统地介绍经典的线性代数知识,给读者提供一本较有价值的线性代数教学参考书,学时数 32~36 节.在这门被认为抽象难学的课程中,我们按照“引例—定义—例子—性质—定理—应用”的次序来介绍知识内容.在每章附有练习题和提高题,练习题是最基本的要求,题量不大,学生一般能独立完成;提高题为满足学有余力的学生的需要.读者可以根据自身的情况选择.每一章突出主要性质和定理,便于读者掌握.附录 1 提供了历年工科类线性代数研究生入学考试试题,供读者练习和考研复习;附录 2 列出了线性代数知识在实际中的应用,借以帮助读者更好地学习和运用.

在本书编写过程中,得到很多同事的关心、鼓励和支持,在此深表谢意! 特别感谢浙江大学的李慧陵教授,华南理工大学的周胜林教授、罗家洪副教授、姚仰新教授、唐西林教授,他们认真地审查了书稿,并提出了很多宝贵建议.

鉴于编者水平有限,书中难免会有不足之处,敬请广大读者批评指正.

编者

2013 年 12 月

目 录

第一章 行列式	(1)
第一节 行列式的定义	(1)
一、引例(1) 二、排列(2) 三、行列式定义(3)	
第二节 行列式的性质	(4)
第三节 按行(列)展开定理	(8)
习题一	(12)
第二章 矩阵	(15)
第一节 矩阵的概念	(15)
第二节 矩阵的运算	(16)
一、加(减)法(16) 二、数与矩阵的乘法(16) 三、乘法(17) 四、转置(20)	
第三节 矩阵的逆	(21)
一、方阵的行列式(21) 二、可逆矩阵(22) 三、伴随矩阵(23)	
第四节 分块矩阵	(24)
一、加法(25) 二、数乘(25) 三、乘法(26) 四、转置(27)	
第五节 矩阵的秩与初等变换	(29)
一、秩(Rank)(29) 二、初等变换(30) 三、初等矩阵(32) 四、初等变换求逆(34)	
习题二	(36)
第三章 线性方程组	(39)
第一节 解的有关概念	(39)
第二节 线性方程组的解法	(40)
第三节 解的理论	(42)
习题三	(43)
第四章 向量的线性相关性	(47)
第一节 n 维向量	(47)
第二节 线性相关性	(48)
一、线性表示(48) 二、线性相关性(49)	
第三节 等价向量组	(51)
一、等价向量组(51) 二、极大线性无关组(52) 三、有关秩的一些结果(55)	
第四节 线性方程组解的结构	(55)
第五节 基、维数、坐标	(59)
习题四	(61)

第五章 相似矩阵	(64)
第一节 特征值与特征向量	(64)
第二节 相似矩阵	(65)
第三节 向量的内积	(69)
一、内积定义(69) 二、标准正交基(70) 三、正交矩阵(72)	
第四节 实对称矩阵的对角化	(73)
习题五	(76)
第六章 二次型	(79)
第一节 二次型的基本概念	(79)
第二节 标准形	(80)
第三节 正定二次型	(84)
习题六	(88)
附录 1 工学类线性代数历年考研试题	(89)
附录 2 线性代数的应用	(104)
参考文献	(116)

第一章 行列式

行列式是线性代数的基础,是线性代数的基本工具,讨论很多问题都用到它.在数学的其他分支中行列式也有着重要的应用.

第一节 行列式的定义

一、引例

我们先看线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,其解可由消元法得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (1-1)$$

在中学数学中,定义二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

则上述线性方程组的解(1-1)可写为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (1-2)$$

可以发现解(1-2)的形式比解(1-1)的形式更便于记忆.对于三元线性方程组也有类似的结论.更一般地,结论可以推广到 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1-3)$$

的情形,为此我们先做一些准备.

二、排列

定义 1 由数 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

n 级排列通常记为 $j_1 j_2 \cdots j_n$, 其中 $j_1, j_2, \dots, j_n$ 分别表示排列中第 1 个, 第 2 个, $\dots$, 第 n 个位置上的数. 易知, n 级排列的个数为 $n!$. 例如, 45321 是一个 5 级排列, 5 级排列的个数为 $5! = 120$.

定义 2 在一个排列中, 如果某两个位置上的数前大后小, 称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为该排列的逆序数.

排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数通常记为 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$. 记 τ_k 表示排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 中数字 k 前面比 k 大的数的个数, 则有排列逆序数的计算公式:

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n = \tau_{j_1} + \tau_{j_2} + \cdots + \tau_{j_n},$$

其中 $\tau_n = 0$. 例如,

$$\tau(45321) = 4 + 3 + 2 + 0 + 0 = 9, \quad \tau(12 \cdots n) = 0.$$

定义 3 逆序数为奇(偶)数的排列, 称为奇(偶)排列.

由定义可知, 排列 45321 为奇排列; 排列 $12 \cdots n$ 为偶排列.

如果把排列中某两个位置上的数进行交换, 就得到另一排列, 这样一个交换称为对换.

关于对换, 有下面主要定理:

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

证 分两种情形来讨论.

(1) 对换的两个数相邻, 设排列为 $\cdots jk \cdots$. 当 $j < k$ 时, 记

$$\tau(\cdots jk \cdots) = \cdots + \tau_j + \cdots + \tau_k + \cdots = \tau,$$

则

$$\tau(\cdots kj \cdots) = \cdots + (\tau_j + 1) + \cdots + \tau_k + \cdots = \tau + 1;$$

当 $j > k$ 时, 同理可得

$$\tau(\cdots kj \cdots) = \tau(\cdots jk \cdots) - 1,$$

从而定理成立.

(2) 对换为一般情形, 设排列为 $\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots$. $i_1, i_2, \dots, i_s$ 为 j, k 之间的 s 个数.

先将 j 依次与 $i_1, i_2, \dots, i_s$ 对换变为 $\cdots i_1 i_2 \cdots i_s j k \cdots$, 经过 s 次对换, 再将 k 依次与 $j, i_1, i_2, \dots, i_s$ 对换变为 $\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots$, 经过了 $s+1$ 次对换, 故排列的对换共经过了

$$s + (s + 1) = 2s + 1$$

次的相邻对换, 由(1)知定理成立.

定理 1 的证明思想是先考虑一个简单情形, 然后利用简单情形讨论一般情况. 这种处理问题的方法值得借鉴. 另外, 把一个对换转化为若干个相邻对换的类似处理方法教材中还会经常

用到.

三、行列式定义

定义 4 设 a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) 是 n^2 个数 (也称为元素), 定义 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

其中, $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

说明: (1) n 阶行列式是一个数, 由 $n!$ 项的代数和构成.

(2) 除符号外, 每项为 n 个数的乘积, 这 n 个数取自于不同的行和列.

(3) 乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的 n 个数 (元素) (从左到右) 行数按自然顺序由小到大进行排列, 元素的列数构成的排列为 $j_1 j_2 \cdots j_n$, 排列逆序数 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 的奇偶性决定这一项的符号.

例 1 按定义计算 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$

解 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$
 $= (-1)^{\tau(12)} a_{11} a_{22} + (-1)^{\tau(21)} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$

结果与中学里的直接定义一致. 三阶行列式亦是如此, 读者按定义写出结果, 有助于对抽象定义的理解.

例 2 利用定义计算 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$

解 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{33}$
 $= \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{22} a_{33} = a_{11} a_{22} a_{33}.$

类似地, 可求得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这种形式的行列式称为上三角行列式.

同理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

该行列式称为下三角行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

该行列式称为对角线行列式(行列式中从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线).

从定义可知,一个 n 阶行列式共有 $n!$ 项,计算量很大,但从例 2 来看,上(下)三角行列式的计算比较简单.下面介绍行列式的一些性质,以便利用这些性质化一般行列式为三角行列式,从而简化行列式的计算.

第二节 行列式的性质

性质 1 行列互换,行列式不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注意 左边行列式称为右边行列式的转置行列式.

证明从略.

性质 1 表明行列式中行与列的地位是对称的,因此后面有关行的性质,对列也成立.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 记右边行列式 i 行 j 列 ($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$) 的元素为 b_{ij} , 则

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \sum_{j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n}. \\ \text{右边} &= - \sum_{j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} b_{1j_1} \cdots b_{sj_s} \cdots b_{tj_t} \cdots b_{nj_n} \\ &= - \sum_{j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n} \\ &= - \sum_{j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n} = \text{左边}. \end{aligned}$$

推论 1 两行(列)元素相同, 行列式等于 0.

证 记

$$D = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix},$$

交换元素相同的两行, 行列式不变; 另由性质 2 可知行列式变号, 从而 $D = -D$, 即 $D = 0$.

性质 3 某行(列)的各元素如有公因数 k , 则可把 k 提出行列式符号外. 即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \text{左边} &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= \text{右边}. \end{aligned}$$

推论 2 某行(列)元素全为 0, 则行列式为 0.

推论 3 两行(列)元素成比例,则行列式为 0.

性质 4 (“加法”规则)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \text{左边} &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (b_{ij_i} + c_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} [a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + a_{1j_1} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n}] \\ &= \text{右边}. \end{aligned}$$

性质 5 某一行(列)元素的 k 倍加到另一行(列)对应元素上,行列式不变. 即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & a_{j2} + ka_{i2} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}.$$

证 由性质 4 和性质 3 的推论 3 立即得证.

在计算行列式时,可利用性质 2 和性质 5 把行列式化为上(下)三角行列式. 通常用记号 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$) 表示互换行列式的第 i 行(列)和第 j 行(列);用 $r_j + kr_i$ 表示第 i 行元素的 k 倍加到第 j 行对应的元素上. 类似地, $c_j + kc_i$ 表示第 i 列元素的 k 倍加到第 j 列对应的元素上(建议初学者计算时使用这些记号,便于检查).

例 3 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned}
 \text{原式} & \xrightarrow[r_4 - 4r_1]{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow[r_4 - 7r_2]{\begin{matrix} r_3 - 2r_2 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{r_4 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 160.
 \end{aligned}$$

例 4 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 原式 $\xrightarrow[\begin{matrix} c_1 + 1 \cdot c_n \\ \vdots \\ c_1 + 1 \cdot c_2 \end{matrix}]{\begin{matrix} c_1 + 1 \cdot c_3 \\ c_1 + 1 \cdot c_2 \end{matrix}} \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a + (n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \quad (\text{即其余各列都加到第一列上})$

$$= [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_n - r_1]{\begin{matrix} r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ \vdots \end{matrix}} [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例 5 当 n 为奇数时,证明:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

证 $D = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = -D,$

从而 $D=0$.

这个结果也常说成奇数阶反对称行列式等于零.

第三节 按行(列)展开定理

利用上节介绍的性质 2 和性质 5,可以把一个具体的行列式化为三角行列式进行计算.为了更好地利用行列式知识来解决问题,下面介绍按行(列)展开定理,该定理是一个重要的理论基础.

先介绍余子式和代数余子式的概念.

定义 5 划去 n 阶行列式中元素 a_{ij} 所在行和列的元素,剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的顺序构成的 $(n-1)$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij} .称 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.例如,行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

定理 2(按行列展开定理) 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 则有

$$(1) \quad a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$(2) \quad a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} D & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

证 仅证(1),由性质 1,式(2)亦得证.

先看 $i=j$ 的情形,不妨设 $i=j=1$,由行列式的定义容易得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11},$$

再由列的交换(第 j 列依次与前面的 $j-1$ 个列进行交换,与前面依次轮换方法类似)易知

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1j} & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1}a_{1j}M_{1j} = a_{1j}A_{1j},$$

于是根据性质 4 可得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}. \end{aligned}$$

再看 $i \neq j$ 的情形,考察行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = 0.$$

D_2 是将 D_1 的第 j 行元素换成第 i 行元素,其他行的元素不变,这样 D_1 与 D_2 的第 j 行代数余子式完全相同, D_2 按第 j 行展开有

$$D_2 = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0.$$

定理 2 理论上具有重要的价值,后面有些地方会用到.另外,它也可以结合前面的性质简化行列式的计算.

例 6 计算
$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 原式 $= (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ (按第 4 列展开)

$$= 10 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -160.$$

例 7 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 原式 $= (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (按第 1 行展开)

$$= \cdots = (-1)^{1+n} \cdot (-1)^{1+(n-1)} \cdots (-1)^{1+2} n!$$

$$= (-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}} n!$$

事实上,此题还可以利用定义或者性质 2 来求解,读者自行练习.

例 8 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \\ -1 & 6 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$,

求: (1) $A_{13} + 2A_{23} - A_{33} + 3A_{43}$;

(2) $3A_{13} + 7A_{23} - 5A_{33} + 5A_{43}$.

解 (1) 中代数余子式是第 3 列的, 它们的系数是第 1 列的, 从而

$$A_{13} + 2A_{23} - A_{33} + 3A_{43} = 0.$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} & 3A_{13} + 7A_{23} + 5A_{33} + 5A_{43} \\ &= (1+2)A_{13} + (2+5)A_{23} + (-1+6)A_{33} + (3+2)A_{43} \\ &= (1A_{13} + 2A_{23} - 1A_{33} + 3A_{43}) + (2A_{13} + 5A_{23} + 6A_{33} + 2A_{43}) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & 3A_{13} + 7A_{23} - 5A_{33} + 5A_{43} \\ &= -10A_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= -10 \cdot 3 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= -120.
 \end{aligned}$$

例 8 中若求 $aA_{13} + bA_{23} + cA_{33} + dA_{43}$, 请思考并写出计算式.

例 9 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$.

解 原式 $\frac{c_2 - c_1}{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}
 &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} \\
 &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).
 \end{aligned}$$

利用递推或数学归纳法可以得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

上述行列式称为范德蒙(Vandermonde, 1735—1796, 法国)行列式, 这个结果以后可以直接利用.

有了按行(列)展开定理, 下面介绍 n 元线性方程组(1-3)的解.

定理 3 克莱姆(Cramer, 1704—1752, 瑞士)法则 若方程组(1-3)的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则(1-3)有唯一解 $x_j = D_j / D$ ($j = 1, 2, \dots, n$), 其中 D_j 是将 D 中第 j 列换成常数项列后得到的行列式.

证 设 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是方程组(1-3)的解. 将方程组(1-3)中的 n 个方程两边依次乘以 $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{n1}$, 再把它左右两边分别相加可得