# 拉卡代数与核結构

张 庆 营

（湖南大学）

下 册

安徽大學 物 理 系 印

一九七九年十月

# 第 六 章

# 原子核能譜的壳层模型理论

## 第一节 原子核壳层模型的本征函数

本章内容是关于壳层模型的能谱计算问题，首先找出壳层模型的零级近似的本征函数，用它来计算微扰能量，并具体地应用于计算一些轻原子核的基态和低激发态能量，将理论值和实验值作一比较、以检验壳层模型的理论。

本节先寻找出壳层模型的零级本征函数和零级能量。原子核的 Schrödinger 方程是

$$H\psi_\beta \equiv (T+V)\psi_\beta = E_\beta\,\psi_\beta \qquad (6.1a)$$

其中

$$T=\sum_{i=1}^{A}\frac{1}{2M_i}P_i^2 \qquad (6.1b)$$

是A个核子的总动能算符，

$$V=\sum_{i<j}^{Z}V_{ij}^{\pi}+\sum_{i<j}^{N}V_{ij}^{\nu}+\sum_{i,j}^{Z,N}V_{ij}^{\pi\nu} \qquad (6.1c)$$

是A个核子之间的相互作用势能算符，$V_{ij}^{\pi}$、$V_{ij}^{\nu}$、$V_{ij}^{\pi}$ 分别表示质子之间、中子之间、质子与中子之间的相互作用势能算符，这是核子之间的真实相互作用，我们这里假定核力是二体力，而且与电荷无关，也就是说，质子和中子的相互作用势能算符同中子和中子的相互作用势能算符有一样的形式。至于质子和质子的相互作用，包含了电磁力（主要是库仑力）和核子

力两部分，而核子力的部分也和质子和中子（或中子和中子）的相互作用一样。

我们已经知道，当外场不存在时，原子核的总能量和原子核的总角动量的取向无关，即总能量算符的矩阵元和磁量子数M无关，H必须是标量算符，所以，$V_{ij}^{\pi}$，$V_{ij}^{\nu}$，$V_{ij}^{\pi\nu}$ 都应是标量算符。

真实的核子力是很复杂的，目前还不十分清楚。即使知道了真实的核子力，Schrödinger方程（6.1）也无法精确求解，这是一个很复杂的多体问题。因此，必须寻找近似的解法。我们把（6.1）式的总哈密顿量作如下的改变

$$H = H_0 + H' \qquad (6.2a)$$

$$H_0 = \left(\sum_{i=1}^{A} \frac{1}{2M_i} P_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{A} U_i\right) \equiv T + U \qquad (6.2b)$$

$$H' = \sum_{i<j}^{Z} V_{ij}^{\pi} + \sum_{i<j}^{N} V_{ij}^{\nu} + \sum_{i,j}^{Z,N} V_{ij}^{\pi\nu} \qquad (6.2c)$$

$H_0$是零级哈密顿量，是由动能算符和单粒子势能算符构成，单粒子势能算符是第$i$个粒子所感觉到的平均场。在实际问题中，选择适当的平均场U，使得平均场U能够把粒子之间的相互作用项V的效果大部分代替，使H′的影响尽可能小。这样，我们可以找出$H_0$的本征函数$\psi^{(0)}$和本征值$E^{(0)}$，而把H′作为微扰处理，而通常Schrödinger的微扰法或Hilbert空间截断法计算原子核的能谱，H′一般称为剩余相互作用，又叫做有效相互作用。

相互作用 $V_{ij}$ 形状不一样，前者强度大，而尺

有效相互作用 $V_{ij}^{\pi}$ 等和真实的自由核子者强度小。由真实的核子相互作用（例如由核子和核子散射实验确定的核子力）找出平均场和有效相互作用是很困难的问题，同时也是核物理中最主要的问题之一，目前还没有很好解决，不过也取得了不小的进展（参看[81]、[82]、[83]）。在实际计算原子核能谱时，往往采用半唯

象的方法，下面我们就会谈到这些方法（参看[84]、[85]）。

根据实验数据的分析，合理的平均场是中心场加上强自旋轨道耦合项[28]：

$$U_i = V(r_i) + \xi(r_i)\, \vec{l}_i \cdot \vec{S}_i \tag{6.3}$$

$\xi(r_i)$ 的精确形式还不能从理论上导出，在原子中，$\xi(r_i) = \frac{V_0^c}{r}\frac{dV_c}{dr}$，$V_c$是库仑势。我们假设在原子核中也有相同的关系，即 $\xi(r_i) = \frac{V_0}{r}\frac{dV(r_i)}{dr}$。

$H_0$是单粒子哈密顿量，满足（3.5）的本微方程

$$H_0 \psi_\beta^{(0)} = E_\beta^{(0)} \psi_\beta^{(0)} \tag{6.4a}$$

$\psi_\beta^{(0)}$ 是壳层模型的组态波函数。当未满壳层中只有一种粒子（例如质子）时，

$$\psi_\beta^{(0)} = \psi(C\, j_\pi^m (\alpha_\pi J_\pi) J = J_\pi M_\pi) \tag{6.4b}$$

$$E_\beta^{(0)} = E_\beta^{(0)} C + m U_{j\pi} \equiv E_{\beta C_\pi}^{(0)} + E_{\beta C_\nu}^{(0)} + m U_{j_\pi} \tag{6.4c}$$

其中C是未填满壳层$j_\pi$以下的所有满壳层，包括质子和中子的满壳层在内，满壳层的总角动量只能等于零，上面没有明显写出。$E_{\beta C}^{(0)}$是满壳层的零级总能量，即满壳层中所有质子和中子的能量之和。$U_{j\pi}$是未满壳层中单质子的能量。在（6.4b）中，波函数的径向部分没有写出。

当未满壳层中有质子和中子时，那么，零级本征函数和本征值是

$$\psi_\beta^{(0)} = \psi(C_\pi j_\pi^m (J_\pi) C_\nu j_\nu^n (J_\nu) JM) \tag{6.4d}$$

$$E_\beta^{(0)} = E_{C_\pi}^{(0)} + E_{C_\nu}^{(0)} + m U_{j\pi} + n U_{j\nu} \tag{6.4e}$$

（6.4d）式只有在特殊情况（即在未满壳层中只有一个粒子或

一个空穴时）下才正确，一般应该是下面的形式

$$\psi_{\beta}^{(0)}=\psi\left(C_\pi j_\pi^m(\alpha_\pi J_\pi)C_\nu j_\nu^n(\alpha_\nu J_\nu)JM\right) \qquad (6.4_f)$$

即 $J_\pi$，$J_\nu$ 不止一个，而且 $J_\pi$，$J_\nu$ 也可能是简併的。但上已的本征函数的本征值仍然由（6.4e）式给出，一般是一个高度简併的态。为了解除简併，必须将（6.4f）的波函数组合起来，以构成新的零级波函数

$$\psi_{\alpha JM}^{(0)}=\sum_{\substack{\alpha_\pi J_\pi\\ \alpha_\nu J_\nu}} C^{\alpha J}_{\alpha_\pi J_\pi,\alpha_\nu J_\nu}\,\psi\left(C_\pi j_\pi^m(\alpha_\pi J_\pi)C_\nu j_\nu^n(\alpha_\nu J_\nu)JM\right) \qquad (6.4g)$$

组合係数 $C^{\alpha J}_{\alpha_\pi J_\pi,\alpha_\nu J_\nu}$ 由一级微扰的久期方程解出。

我们用（6.2b）的 $H_0$ 验証一下

$$\langle (j_\pi^m)\alpha_\pi J_\pi M_\pi|\left(\sum_{i=1}^m\frac{1}{2M_i}P_i^2+\sum_{i=1}^m U_i\right)|(j_\pi^m)\alpha_\pi J_\pi M_\pi\rangle$$

$$=m\langle j_\pi m_\pi|\left(\frac{1}{2m_i}P_i^2+U_i\right)|j_\pi m_\pi\rangle$$

$$=m\,U_{j_\pi} \qquad (6.5a)$$

$P_i^2$ 和 $U_i$ 都是标量算符，由（4.85）和（2.36b）以及派生系数的正交关系式即可推出上式，同样

$$\langle (j_\nu^n)\alpha_\nu J_\nu M_\nu|\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{2M_i}P_i^2+\sum_{i=1}^n U_i\right)(j_\nu^n)\alpha_\nu J_\nu M_\nu\rangle$$

$$=m\langle j_\nu m_\nu|\left(\frac{1}{2M}P_i^2+U_i\right)|j_\nu m_\nu\rangle$$

$$=m\,U_{j_\nu}$$

满壳层的能量也是单粒子能量的简单相加，因此（注意，系数 $C^{\alpha J}_{\alpha_\pi J_\pi\alpha_\nu J_\nu}$ 有正交规一性质）。

$$E_{\alpha J}^{(0)}=E_{C\pi}^{(0)}+E_{C\nu}^{(0)}+m\,U_{j_\pi}+n\,U_{j_\nu} \qquad (6.5_c)$$

正好是(6.4e)式，这是应该予料到的结果。

在第五章已指出，在原子中可以用Hartree—Fock自洽场法找出好的平均场，在这个基础上再作微扰计算，往往算到一级微扰近似就能得到满意的结果（参看[10]）。但对于原子核，由于真实的核力还不十分清楚，而且这里的多体问题比原子复杂得多，从理论上确定出好的平均场和具体的有效相互作用还没有满意的结果。目前有两种半唯象的方法处理这个问题。一种方法是不考虑平均场和有效相互作用的具体形式，而只作出一般的假定，即假定平均场是中心力场加上强自旋轨道耦合项，有效相互作用是二体力并且与电荷无关。将各级微扰能量化为用两粒子有效相互作用的矩阵元来表示，或用第三章所讲的Hilbert空间截除法，各种多粒子组态矩阵元也是化为用在粒子有效相互作用的矩阵元来表示。这些两粒子矩阵元数目不多时，可直接作为待定参数，由一些实验数据确定，再去计算其他实验数据。这样，就避开了不知道平均场和有效相互作用的具体形式的困难，而只和一般的假设有关，对壳层模型理论的正确程度是很好的检验。这种方法早期在轻核中取得了一定的成功[29]，[84]—[91]，自那时以来，仍不断进行这方面的研究工作，并已扩展到较重的原子核，也从纯组态到较复杂的组态，都能得到较满意的结果[86]、[92]—[97]。本章主要介绍这种方法。

另一种半唯象的方法是给出平均场和有效相互作用的具体形式，直接算出有效相互作用矩阵元。平均场和有效相互作用的选择，有很大的任意性，对计算结果的好坏程度有很大的关系，平均场和有效相互作用选择得正确与否，由算出的结果和实验的符合程度来检验。虽然这种方法的任意性较大，但也有助于了解原子核和剩余相互作用的性质。

目前$V(r_i)$主要选用以下三种：

1、方位阱

$$V(r) = -V_0 \quad r < R$$
$$= \infty \quad r > R \tag{6.6}$$

$V_0$ 是常数，$R$ 是原子核半经。

2，谐振子势

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2} M\omega^2 r^2 \tag{6.7}$$

$V_0$ 是常数，$\omega$ 是势阱强度参数，将在后面确定。

3、Woods—Saxon势

$$V(r) = -V_0 \left[1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)\right]^{-1} \tag{6.8}$$

$V_0$ 和 $a$ 都是常数，$V_0 = -50\,MeV$，$a = 0.65\,fm$。

方位阱过于简单，但它的波函数计算起来并不方便，很少使用。谐振子势的计算很方便，在核理论中广泛使用。Woods-Saxon势虽然比较合理，但计算麻烦，也很少用到[99]、[100]。

平均场给出后，就可以由Schrödinger方程算出单粒子波函数来，实际上就是算出径向波函数。

在计算核谱中所使用的剩余相互作用的形式，种类繁多，甚至有用δ函数型的、这方面的问题已超出本讲义的范围（例如可看[75]—[78]、[101]—[110]）。

## 第二节 相互作用能量矩阵元的公式

我们在（6.4c）和（6.5）式看到，零级微扰能量和 $J$ 都没有关系，只是每个粒子的能量的简单相加，显然太粗略了，不可能符合实际情况，因此，必须计算一级微扰能量。

零级波函数有（6.4g）的形式，我们先考虑没有简併的情况，即用（6.4f）的本征函数。一级微扰能是

$$E_\beta^{(1)} \equiv E(j_\pi^m) J_\pi (j_\nu^n) J_\nu, J) = E_\beta^{(0)} + \langle \psi_\beta^{(0)} | H' | \psi_\beta^{(0)} \rangle \tag{6.9}$$

上式可以写成

$$E_{\beta}^{(1)}=E_{\beta C}^{(1)}+E_{\beta_1}^{(1)}+E_{\beta_2}^{(1)} \qquad (6.10)$$

其中

$$E_{\beta C}^{(1)}=E_{\beta C}^{(0)}+E_{\beta C}^{(1)\prime} \qquad (6.11)$$

是满壳层的能量，$E_{\beta C}^{(0)}$ 是满壳层的零级能量，而

$$E_{\beta C}^{(1)\prime}=\langle C_\pi|(\sum_{i<j}^{Z-m}V_{ij}^{\pi})|C_\pi\rangle+\langle C_\nu|(\sum_{i<j}^{N-n}V_{ij}^{\nu})|C_\nu\rangle$$

$$+\langle C_\pi|(\sum_{i=1}^{Z-m}\frac{1}{2M_i}P_i^2)|C_\pi\rangle+\langle C_\nu|(\sum_{i=1}^{N-n}\frac{1}{2M_i}P_i^2)|C_\nu\rangle$$

$$+\langle C_\pi C_\nu|(\sum_{i=1}^{Z-m}\sum_{j=1}^{N-n}V_{ij}^{\pi\nu})|C_\pi C_\nu\rangle \qquad (6.12)$$

又

$$E_{\beta_1}^{(1)}=m\,a_{j_\pi}+n\,a_{j_\nu} \qquad (6.13)$$

$$a_{j_\pi}=(Z-m)[\langle \underset{(1)}{C}_\pi(\underset{(2)}{j_\pi^m})J_\pi M_\pi|V_{12}^{\pi}|\underset{(1)}{C}_\pi(j_\pi^m)J_\pi M_\pi\rangle$$

$$-\langle \underset{(1)}{C}_\pi(\underset{(2)}{j_\pi^m})J_\pi M_\pi|V_{12}^{\pi}|\underset{(2)}{C}_\pi(\underset{(1)}{j_\pi^m})J_\pi M_\pi\rangle]$$

$$+(N-n)\langle \underset{(2)}{C}_\nu(\underset{(1)}{j_\pi^m})J_\pi M_\pi|V_{12}^{\pi\nu}|\underset{(2)}{C}_\nu(\underset{(1)}{j_\pi^m})J_\pi M_\pi\rangle \qquad (6.14)$$

$a_{j_\pi}$ 是质子能级 $j_\pi$ 中的一个质子和满壳层中的质子及中子的相互作用能量。$a_{j_\nu}$ 是对中子而言，和 $a_{j_\pi}$ 的表达式及意义相似。

(6.10) 式的最后一项是

$$E_{\beta_2}^{(1)}=mU_{j_\pi}+nU_{j_\nu}+\langle j_\pi^m J_\pi M_\pi|\sum_{i<j}V_{ij}^{\pi}|j_\pi^m J_\pi M_\pi\rangle$$

$$+\langle j_\nu^n J_\nu M_\nu|\sum_{i<j}^{n}V_{ij}^{\nu}|j_\nu^n J_\nu M_\nu\rangle$$

$$+\langle (j_\pi^m)J_\pi(j_\nu^n)J_\nu,JM|\sum_{i,j}^{m,n}V_{2ij}^{\pi\nu}|(j_\pi^m)J_\pi(j_\nu^n)J_\nu,JM\rangle \qquad (6.15)$$

是未满壳层的能量。

以上各式，都不难由（6.4f）的波函数求出，注意，对于全同粒子，必须先解除反对称化，方法和第四章第一节的相同参看〔89〕）。

为了把问题简化，我们一般都是用满壳层的总能量 $E^{(1)}_{\beta C}$ 作为起点来计算原子核某一能级的总结合能。那么，组态本征函数 $\Psi((j_\pi^m)J_\pi(j_\nu^n)J_\nu, JM)$ 的总结合能是

$$E^J_{\alpha_\pi J_\pi \alpha_\nu J_\nu} \equiv E((j_\pi^m)J_\pi(j_\nu^n)J_\nu, J) = E^{(1)}_\beta - E^{(1)}_{\beta C}$$

$$= E^{(1)}_{\beta_1} + E^{(1)}_{\beta_2} = m\epsilon_{j_\pi} + n\epsilon_{j_\nu} + E^{(1)\prime}_\beta \qquad (6.16)$$

其中

$$\epsilon_{j_\pi} = U_{j_\pi} + a_{j_\pi} \equiv \epsilon_\pi, \quad \epsilon_{j_\nu} = U_{j_\nu} + a_{j_\nu} \equiv \epsilon_\nu \qquad (6.17)$$

是未满壳层中单个核子的能量，包括零级能量和一级修正项。

$$E^{(1)\prime}_\beta = \langle j_\pi^m J_\pi M_\pi | \sum_{i<j} V^\pi_{ij} | j_\pi^m J_\pi M_\pi \rangle$$

$$+ \langle j_\nu^n J_\nu M_\nu | \sum_{i<j}^{n} V^\nu_{ij} | j_\nu^n J_\nu M_\nu \rangle$$

$$+ \langle (j_\pi^m)J_\pi(j_\nu^n)J_\nu, JM | \sum_{i<j}^{m,n} V^{\pi\nu}_{ij} | (j_\pi^m)J_\pi(j_\nu^n)J_\nu, JM \rangle \qquad (6.18)$$

是未满壳层中的核子剩余相互作用能，下面我们将上式按第五章第一节的方法化简，最后变为用以下两粒子矩阵元表示：

$$V^\pi_{J_\pi'} \equiv \langle j_\pi^2 J_\pi' | V_{ij} | j_\pi^2 J_\pi' \rangle, \quad J_\pi' = \text{偶数} \qquad (6.19a)$$

$$V^\nu_{J_\nu'} \equiv \langle j_\nu^2 J_\nu' | V_{ij} | j_\nu^2 J_\nu' \rangle, \quad J_\nu' = \text{偶数} \qquad (6.19b)$$

$$V^{\pi\nu}_{J_{\pi\nu}'} \equiv \langle j_\pi j_\nu J_{\pi\nu}' | V^{\pi\nu}_{ij} | j_\pi j_\nu J_{\pi\nu}' \rangle \qquad (6.19c)$$

这样一来，原子核某一能级J的结合能（相对于满壳层计算）就

由 $\epsilon_{j\pi}$，$\epsilon_{j\nu}$，$V_{J_\pi}^{\pi}{}'$，$V_{J_\nu}^{\nu}{}'$，$V_{J\pi\nu}^{\pi\nu}$，表示，这些都可以作为参数由实验定出，或直接用具体的剩余相互作用和径向波函数计算。

如果未满壳层只有一种核子（例如质子），那么，$E_\beta^{(1)}{}'$ 变得很简单

$$E_\beta^{(1)}{}' = \langle j_\pi^m J_\pi M_\pi | \sum_{i<j}^{m} V_{ij}^{\pi} | j_\pi^m J_\pi M_\pi \rangle \qquad (6.20)$$

能级J的结合能只需要用 $\epsilon_{j\pi}$ 和 $V_{J_\pi}^{\pi}{}'$ 表示，计算起来要简单多了。

如前所述，(6.4d) 的本征函数只在特殊情况下才适用。一般情况下应该使用 (6.4g) 的本征函数，由 (6.5c) 的零级能量看出；这是高度简并的态，只有算到一级微扰能量才能解除简并，而一级微扰能量可以求解下面的联立方程而求出：

$$\sum_{\substack{\alpha_\pi' J_\pi' \\ \alpha_\nu' J_\nu'}} \langle (j_\pi^m)\alpha_\pi J_\pi (j_\nu^n)\alpha_\nu J_\nu, JM | V | (j_\pi^m)\alpha_\pi' J_\pi' (j_\nu^n)\alpha_\nu' J_\nu' JM \rangle C_{\alpha_\pi' J_\pi' \alpha_\nu' J_\nu'}^{\alpha J}$$

$$= E_\beta^{(1)}{}' C_{\alpha_\pi J_\pi, \alpha_\nu J_\nu}^{\alpha J} \qquad (6.21a)$$

其中

$$V = \sum_{i<j}^{m} V_{ij}^{\pi} + \sum_{i<j}^{n} V_{ij}^{\nu} + \sum_{i,j}^{m,n} V_{ij}^{\pi\nu} \qquad (6.21b)$$

$$E_\beta^{(1)} = E_{\beta c}^{(1)} + m\epsilon_{j\pi} + n\epsilon_{j\nu} + E_\beta^{(1)}{}' \qquad (6.21c)$$

(6.21a) 式是关于 $C_{\alpha_\pi J_\pi, \alpha_\nu J_\nu}^{\alpha J}$ 的齐次方程，它有非零解的充要条件是 $C_{\alpha_\pi J_\pi, \alpha_\nu J_\nu}^{\alpha J}$ 的系数行列式等于零：

$$\sum_{\alpha_\pi' J_\pi', \alpha_\nu' J_\nu'} \Big[ \langle (j_\pi^m)\alpha_\pi J_\pi (j_\nu^n)\alpha_\nu J_\nu, JM | V | (j_\pi^m)\alpha_\pi' J_\pi' (j_\nu^n)\alpha_\nu' J_\nu', JM \rangle$$

$$- E_\beta^{(1)}{}' \delta_{\alpha_\pi, \alpha_\pi'} \delta_{J_\pi, J_\pi'} \delta_{\alpha_\nu, \alpha_\nu'} \delta_{\alpha_\nu, \alpha_\nu'} \delta_{J_\nu, J_\nu'} \Big] = 0 \qquad (6.22)$$

解上面的久期方程式，求出本征值 $E_\beta^{(1)}{}'$，就可得出准到一级近似的能量 (6.21c)。求出本征值 $E_\beta^{(1)}{}'$ 后，代入 (6.21a)，就可

以科出组合系数 $C^{\alpha J}_{\alpha_\pi J_\pi \alpha_\nu J_\nu}$，因而得出了零级本征函数（6.4g）

现在的问题在于化出（6.21a）中的多粒子组态的矩阵元，分别写出在下面

$$\langle (j_\pi^m)\alpha_\pi J_\pi (j_\nu^n)\alpha_\nu J_\nu\, JM | \sum_{i<j}^{m} V_{ij}^{\pi} | (j_\pi^m)\alpha'_\pi J'_\pi (j_\nu^n)\alpha'_\nu J'_\nu\, JM \rangle$$

$$= \langle j_\pi^m \alpha_\pi J_\pi M_\pi | \sum_{i<j}^{m} V_{ij}^{\pi} | j_\pi^m \alpha'_\pi J_\pi M_\pi \rangle \delta_{J_\pi J'_\pi} \delta_{\alpha_\nu \alpha'_\nu} \delta_{J_\nu, J'_\nu} \quad (6.23)$$

同样

$$\langle (j_\pi^m)\alpha_\pi J_\pi (j_\nu^n)\alpha_\nu J_\nu, JM | \sum_{i<j}^{m} V_{ij}^{\pi} | (j_\pi^m)\alpha'_\pi J'_\pi (j_\nu^n)\alpha'_\nu J'_\nu, JM \rangle$$

$$= \langle j_\nu^n \alpha_\nu J_\nu M_\nu | \sum_{i<j}^{n} V_{ij}^{\nu} | j_\nu^n \alpha'_\nu J_\nu M_\nu \rangle \delta_{J_\nu J'_\nu} \delta_{\alpha_\pi \alpha'_\pi} \delta_{J_\pi J'_\pi} \quad (6.24)$$

矩阵元 $\langle j_\pi^m \alpha_\pi J_\pi M_\pi | \sum_{i<j}^{m} V_{ij}^{\pi} | j_\pi^m \alpha'_\pi J_\pi M_\pi \rangle$ 等可以照套公式（5.3）或（5.10）。

现在要把质子和中子的相互作用矩阵元化简：

$$\langle (j_\pi^m)\alpha_\pi J_\pi (j_\nu^n)\alpha_\nu J_\nu, JM | \sum_{i<j}^{mn} V_{ij}^{\pi\nu} | (j_\pi^m)\alpha'_\pi J'_\pi (j_\nu^n)\alpha'_\nu J'_\nu, JM \rangle$$

$$= m\cdot n \langle (j_\pi^m)\alpha_\pi J_\pi (j_\nu^n)\alpha_\nu J_\nu JM | V_{mn}^{\pi\nu} | (j_\pi^m)\alpha'_\pi J'_\pi (j_\nu^n)\alpha'_\nu J'_\nu, \alpha JM \rangle$$

$$= m\cdot n \sum_{\alpha''_\pi J''_\pi \alpha'''_\pi J'''_\pi} \sum_{\alpha''_\nu J''_\nu} \langle j_\pi^m \alpha_\pi J_\pi \{| j_\pi^{m-1}(\alpha''_\pi J''_\pi) j_\pi J_\pi \rangle$$

$$\times \langle j_\pi^{m-1}(\alpha'''_\pi J'''_\pi) j_\pi J'_\pi |\} j_\pi^m \alpha'_\pi J_\pi \rangle \langle j_\nu J_\nu \{| j_\nu^{n-1}(\alpha''_\nu J''_\nu) j_\nu J_\nu \rangle$$

$$\times \langle j_\nu^{n-1}(\alpha'''_\nu J'''_\nu) j_\nu J'_\nu |\} j_\nu^n \alpha'_\nu J_\nu \rangle$$

$$\times \langle (j_\pi^{m-1})\alpha''_\pi J''_\pi \underset{(m)}{(j_\pi)} J_\pi ; (j_\nu^{n-1})\alpha''_\nu J''_\nu \underset{(n)}{(j_\nu)} J_\nu, JM | V_{mn}^{\pi\nu}$$

$$\times | (j_\pi^{m-1})\alpha'''_\pi J'''_\pi \underset{(m)}{(j_\pi)} J'_\pi ; (j_\nu^{n-1})\alpha'''_\nu J'''_\nu \underset{(n)}{(j_\nu)} J'_\nu, JM \rangle$$

$$\times \delta_{\alpha''_\pi, \alpha'''_\pi} \delta_{J''_\pi J'''_\pi} \delta_{\alpha''_\nu \alpha'''_\nu} \delta_{J''_\nu J'''_\nu} \quad (6.25)$$

利用 9j 符号，把第 m 个质子和第 n 个中子耦合在一起

$$\langle J_\pi''(j_\pi)J_\pi, J_\nu''(j_\nu)J_\nu, JM|$$

$$=\sum_{J'J_{\pi\nu}'}\left[(2J_\pi+1)(2J_\nu+1)(2J'+1)(2J_{\pi\nu}'+1)\right]^{\frac{1}{2}}\begin{Bmatrix} J_\pi'' & j_\pi & J_\pi \\ J_\nu'' & j_\nu & J_\nu \\ J' & J_{\pi\nu}' & J \end{Bmatrix}$$

$$\times\langle J_\pi'' J_\nu''(J') j_\pi j_\nu (J_{\pi\nu}') JM| \qquad (6.25)$$

代入（6.25式中得

$$\langle (j_\pi^m)\alpha_\pi J_\pi (j_\nu^n)\alpha_\nu J_\nu, JM|\sum_{i,j}^{m,n} V_{ij}^{\pi\nu}|(j_\pi^m)J_\pi'(j_\nu^n)J_\nu' JM\rangle$$

$$=mn\sum_{\alpha_\pi''J_\pi''}\sum_{\alpha_\nu''J_\nu''}\langle j_\pi^m\alpha_\pi J_\pi\{|j_\pi^{m-1}(\alpha_\pi''J_\pi'')j_\pi J_\pi\rangle$$

$$\times\langle j_\pi^{m-1}(J_\pi)j_\pi J_\pi'|\}j_\pi^m\alpha_\pi'J_\pi'\rangle\langle j_\nu^n\alpha_\nu J_\nu\{|j_\nu^{n-1}(\alpha_\nu J_\nu)j_\nu J_\nu\rangle$$

$$\times\langle j_\nu^{n-1}(\alpha_\nu''J_\nu'')j_\nu J_\nu'|\}j_\nu^n\alpha_\nu'J_\nu'\rangle\sum_{J'}\sum_{J_{\pi\nu}'} V_{J_{\pi\nu}'}^{\pi\nu}(2J'+1)(2J_{\pi\nu}'+1)$$

$$\times\left[(2J+1)(2J_\nu+1)(2J_\pi'+1)(2J_\nu+1)\right]^{\frac{1}{2}}\begin{Bmatrix} J_\pi'' & j_\pi & J_\pi' \\ J_\nu'' & j_\pi & J_\nu' \\ J' & J_{\pi\nu}' & J \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} J_\pi'' & j_\pi & J_\pi \\ J_\nu'' & j_\nu & J_\nu \\ J' & J_{\pi\nu}' & J \end{Bmatrix}\quad(6.26)$$

把派生系数和9j符号代入上式，即可化为两粒子矩阵元 $V_{J\pi\nu}^{\pi\nu}$ 的组合。

（6.26）式的计标相当麻烦，特别是无9j符号表可查时，还要计标9j符号，工作量很大。我们可以先计标下面的 $n=1$ 的较简单的矩阵元

$$\langle j_\pi^m(\alpha_\pi J_\pi)j_\nu JM|\sum_{i=1}^{m} V_{ij}^{\pi\nu}|j_\pi^m(\alpha_\pi'J_\pi')j_\nu JM\rangle$$

$$=m\sum_{\alpha_\pi''J_\pi''}\langle j_\pi^m\alpha_\pi J_\pi\{|j_\pi^{m-1}(\alpha_\pi''J_\pi'')j_\pi J_\pi\rangle$$

$$\times\langle j_\pi^{n-1}(\alpha_\pi''J_\pi'')j_\pi J_\pi'|\}j_\pi^m\alpha_\pi'J_\pi'\rangle$$

$$\times\langle J_\pi'' \underset{(m)}{j_\pi}(J_\pi)\underset{(j)}{j_\nu} J| V_{mj}|J_\pi''\underset{(m)}{j_\pi}(J_\pi')\underset{(j)}{j_\nu} J\rangle$$

$$=m\sum_{\alpha_\pi''J_\pi''}\langle j_\pi^m\alpha_\pi J_\pi\{|j_\pi^{m-1}(\alpha_\pi''J_\pi'')j_\pi J_\pi\rangle$$

$$\times\langle j_\pi^{m-1}(\alpha_\pi''J_\pi'')j_\pi J_\pi'|\}j_\pi^{m}\alpha_\pi'J_\pi'\rangle[(2J_\pi+1)(2J_\pi'+1)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\sum_{J_{\pi\nu}}V_{J_{\pi\nu}}^{\pi\nu}(2J_{\pi\nu}+1)\begin{Bmatrix}J_\pi'' & j_\pi & J_\pi\\ j_\nu & J & J_{\pi\nu}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}J_\pi'' & j_\pi & J_\pi'\\ j_\nu & J & J_{\pi\nu}\end{Bmatrix}\quad(6.27)$$

然后利用派生系数，由上面的矩阵元可求出任意$n$个中子组态的矩阵元：

$$\langle j_\pi^m(\alpha_\pi J_\pi)j_\nu^n(\alpha_\nu J_\nu)J|\sum_{i,j}^{m,n}V_{ij}^{\pi\nu}|j_\pi^m(\alpha_\pi'J_\pi')j_\nu^n(\alpha_\nu'J_\nu')J\rangle$$

$$=m\cdot n\sum_{\alpha_\nu''J_\nu''}\langle j_\nu^n\alpha_\nu J_\nu\{|j_\nu^{n-1}(\alpha_\nu''J_\nu'')j_\nu J_\nu\rangle\langle j_\nu^{n-1}(\alpha_\nu''J_\nu'')j_\nu J_\nu'|\}j_\nu^n\alpha_\nu'J_\nu'\rangle$$

$$\times\langle j_\pi^m(\alpha_\pi J_\pi)j_\nu^{n-1}(\alpha_\nu''J_\nu'')j_\nu J_\nu,JM|V_{m,n}^{\pi\nu}$$

$$\times|j_\pi^m(\alpha_\pi'J_\pi')j_\nu^{n-1}(\alpha_\nu''J_\nu'')\underset{(n)}{j_\nu}J_\nu',JM\rangle$$

$$=m\cdot n\sum_{\alpha_\nu''J_\nu''}\langle j_\nu^n\alpha_\nu J_\nu\{|j_\nu^{n-1}(\alpha_\nu''J_\nu'')j_\nu J_\nu\rangle\langle j_\nu^{n-1}(\alpha_\nu''J_\nu'')j_\nu J_\nu'|\}j_\nu^n\alpha_\nu'J_\nu'\rangle$$

$$\times\sum_{J'}(-1)^{J_\nu-J_\nu'}\langle j_\pi^m(\alpha_\pi J_\pi)\underset{(n)}{j_\nu}(J'),j_\nu^{n-1}(\alpha_\nu''J_\nu''),JM|V_{m,n}^{\pi\nu}$$

$$\times|j_\pi^m(\alpha_\pi J_\pi)\underset{(n)}{j_\nu}(J'),j_\nu^{n-1}(\alpha_\nu''J_\nu''),JM\rangle$$

$$\times\langle J_\pi,j_\nu J_\nu''(J_\nu)J|J_\pi j_\nu(J')J_\nu'',J\rangle$$

$$\times\langle J_\pi,j_\nu J_\nu''(J_\nu')J|J_\pi j_\nu(J')J_\nu'',J\rangle$$

$$=n\sum_{\alpha_\nu''J_\nu''}\langle j_\nu^n\alpha_\nu J_\nu\{|j_\nu^{n-1}(\alpha_\nu''J_\nu'')j_\nu J_\nu\rangle\langle j_\nu^{n-1}(\alpha_\nu''J_\nu'')j_\nu J_\nu'|\}j_\nu^n\alpha_\nu'J_\nu'\rangle$$

$$(-1)^{J_\nu-J_\nu'}\sum_{J'}\langle j_\pi^m(\alpha_\pi J_\pi)j_\nu J'M'|\sum_{i=1}^{m}V_{ij}^{\pi\nu}|j_\pi^m(\alpha_\pi'J_\pi')j_\nu J'M'\rangle$$

$$\times(-1)^{J_\pi-J_\pi'}(2J'+1)[(2J_\nu+1)(2J_\nu'+1)]^{\frac{1}{2}}\begin{Bmatrix}J_\pi & j_\nu & J'\\ J_\nu'' & J & J_\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}J_\pi' & j_\nu & J'\\ J_\nu'' & J & J_\nu'\end{Bmatrix}\quad(6.28)$$

相因子$(-1)^{J_\nu-J_\nu'}$是由改变角动量的耦合次序而出现的，这样，求出了矩阵元（6.27），也就能求出任意情况的矩阵元（6.28）了。（6.27）式和（6.26）式都只用到6j符号，显然比(6.26)式简单。

到这里为止，所有多粒子组态的矩阵元都已化出，问题就在于如何由实验确定（6.19）式的两体矩阵元了。两体矩阵元确定以后，即可计算出能谱和（6.4g）的本征函数，利用这个本征函数还能计算电磁矩，电磁多极跃迁几率，β衰变的 logft 值等。

从 Hilbert 空间截断法看来，以上的计算只选取纯组态的波函数，所取的子空间（叫做"模型空间"）很小，在其他组态影响不大的情况下，也能够得出满意的结果（参看[78]、[98]及后面第四节）。但纯组态耦合得到的态数很有限，只能算出很少的低状态。现在实验上已经积累了大量的数据。为了能够解释更多的低状态能谱和其他实验数据，必须将模型空间扩大，适当选取邻近的组态，这样待定参数也增加很多，但也能够解释更多的实验数据。（参看[93]、[94]、[97]等）。

## 第三节 空穴和粒子的关系式

在粒子组态和共轭空穴组态之间，能量矩阵元存在着很简单的关系式，充分利用这些关系式，会在计算上带来很大的方便，同时也是壳层模型理论的很好的检验。本节推导几种很有用的空穴和粒子的能量矩阵元的关系式。

首先我们考虑全同核子的情形。将两粒子相互作用 $V_{ij}$ 按（2.37）式展开

$$V_{ij}=\sum_{L}\left(T^{(L)}_{(i)}\,T^{(L)}_{(j)}\right) \qquad (6.29)$$

由于 $V_{ij}=V_{ji}$，因此算符 $T^{(L)}_{M}(i)$ 和 $T^{(L)}_{M}(j)$ 的形式应相同。于是，$n$ 个粒子的两体相互作用算符可化为

$$\sum_{i<j}V_{ij}=\sum_{i<j}\sum_{L}\left(T^{(L)}_{(i)}\,T^{(L)}_{(j)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{L}\left(\sum_{i=1}^{n}\Pi^{(L)}_{(i)},\Pi^{(L)}_{(j)}\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\Pi^{(L)}_{(i)},\Pi^{(L)}_{(i)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{L}\left(\sum_{i=1}^{n}\Pi^{(L)}_{(i)},\sum_{j=1}^{n}\Pi^{(L)}_{(j)}\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}V_0^{(0)}(i) \quad (6.30)$$

其中

$$V_0^{(0)}(i)=\sum_{L}\left(\Pi^{(L)}_{(i)},\Pi^{(L)}_{(i)}\right) \quad (6.31)$$

是单粒子零阶张量标符。这样，$\sum_{i<j}V_{ij}$ 就化为单粒子张量标符来表示，由(6.39)式得：

$$\langle j^{-n}\alpha JM|\sum_{i<k}V_{ik}|j^{-n}\alpha' JM\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\alpha''J''M''}\sum_{LM_L}(-)^{M_L}\langle j^{-n}\alpha JM|\sum_{i=1}^{2j+1-n}T^{(L)}_{M_L}(i)|j^{-n}\alpha''J''M''\rangle\langle j^{-n}\alpha''J''M''|\sum_{k=1}^{2j+1-n}T^{(L)}_{-M_L}(k)|j^{-n}\alpha' JM\rangle$$

$$+\frac{1}{2}\langle j^{-n}\alpha JM|\sum_{i=1}^{2j+1-n}V_0^{(0)}(i)|j^{-n}\alpha' JM\rangle \quad (6.32)$$

上式第一项 $L\neq 0$ 的矩阵元利用(3.98)式，$L=0$ 的矩阵元以及第二项利用(3.95)式，将空穴组态变换到粒子组态得

$$\langle j^{-n}\alpha JM|\sum_{i<k}^{2j+1-n}V_{ik}|j^{-n}\alpha' JM\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\alpha''J''M''}\sum_{L\neq 0}\sum_{M_L}(-)^{M_L}\langle j^n\alpha JM|\sum_{i=1}^{n}T^{(L)}_{M_L}(i)|j^n\alpha''J''M''\rangle\langle j^n\alpha''J''M''|\sum_{k=1}^{n}T^{(L)}_{-M_L}(k)|j^n\alpha' JM\rangle$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(2j+1-n)^2}{n^2}\sum_{\alpha''J''M''}\langle j^n\alpha JM|\sum_{i=1}^{n}T_0^{(0)}(i)|j^n\alpha''J''M''\rangle\langle j^n\alpha''J''M''|\sum_{k=1}^{n}T_0^{(0)}(k)|j^n\alpha' JM\rangle$$

$$\times\delta_{\alpha,\alpha''}\delta_{\alpha'',\alpha'}\delta_{J,J''}\delta_{M,M''}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{2j+1-n}{n}\langle j^n\alpha JM|\sum_{i=1}^{n}V_0^{(0)}(i)|j^n\alpha' JM\rangle\delta_{\alpha,\alpha'} \quad (6.33)$$

上式第一项补上 $L=0$ 的矩阵元 $\frac{1}{2}\sum_{\alpha''J''M''}\langle j^n\alpha JM|\sum_{i=1}^{n}T_0^{(0)}(i)|j^n\alpha''J''M''\rangle\times\langle j^n\alpha''J''M''|\sum_{k=1}^{n}T_0^{(0)}(k)|j^n\alpha' JM\rangle+\frac{1}{2}\langle j^n\alpha JM|\sum_{i=1}^{n}V_0^{(0)}(i)|j^n\alpha' JM\rangle$，就变

为$n$个粒子组态的矩阵元$\langle j^n\alpha JM|\sum_{i<k}^{n}V_{ik}|j^n\alpha' JM\rangle$，在同式中应减去这一$L=0$的部分，于是得：

$$\langle j^{-n}\alpha JM|\sum_{i<k}^{2j+1-n}V_{ik}|j^{-n}\alpha' JM\rangle$$
$$=\langle j^n\alpha JM|\sum_{i<k}^{n}V_{ik}|j^n\alpha' JM\rangle$$
$$+\frac{2j+1}{2}\cdot\frac{2j+1-2n}{n^2}\langle j^n\alpha JM|\sum_{i=1}^{n}T_0^{(0)}(i)|j^n\alpha JM\rangle$$
$$\langle j^n\alpha JM|\sum_{k=1}^{n}T_0^{(0)}(k)|j^n\alpha JM\rangle$$
$$\times\delta_{\alpha,\alpha'}+\frac{1}{2}\frac{2j+1-2n}{n}\langle j^n\alpha J|\sum_{i=1}^{n}V_0^{(0)}(i)|j^n\alpha JM\rangle\delta_{\alpha,\alpha'}\tag{6.34}$$

由(3.94a)式得

$$\langle j^{-n}\alpha JM|\sum_{i<k}^{2j+1-n}V_{ik}|j^{-n}\alpha' JM\rangle$$
$$=\langle j^n\alpha JM|\sum_{i<k}^{n}V_{ik}|j^n\alpha' JM\rangle$$
$$+\frac{1}{2}(2j+1-2n)[\langle j\|T^{(0)}\|j\rangle\langle j\|T^{(0)}\|j\rangle$$
$$+(2j+1)^{-\frac{1}{2}}\langle j\|V^{(0)}\|j\rangle]\delta_{\alpha,\alpha'}\tag{6.34}$$

或写成

$$\langle j^{-n}\alpha JM|\sum_{i<k}^{2j+1-n}V_{ik}|j^{-n}\alpha' JM\rangle$$
$$=\langle j^n\alpha JM|\sum_{i<k}^{n}V_{ik}|j^n\alpha' JM\rangle+\frac{2j+1-2n}{2j+1}D\delta_{\alpha,\alpha'}\tag{6.35}$$

其中$D$是与$\alpha, J, M$无关的常数

$$D=\frac{1}{2}(2j+1)[\langle j\|T^{(0)}\|j\rangle\langle j\|T^{(0)}\|j\rangle+(2j+1)^{-\frac{1}{2}}\langle j\|V^{(0)}\|j\rangle]\tag{6.36}$$

在(6.35)式中，令$n=0$，立刻得出

$$D=\langle j^{2j+1}00|\sum_{i<k}^{2j+1}V_{ik}|j^{2j+1}00\rangle\tag{6.37}$$

实际上，由（6.30）、（6.36）和（3.93b）也可证明上式。

由（3.88）式得

$$\langle j^{2j+1-2}(J)j^{2}(J)0|\}j^{2j+1}0\rangle$$

$$=\left[\frac{2(2J+1)}{(2j+1)(2j)}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (6.38)$$

利用上式得

$$D=\frac{(2j+1)(2j)}{2}\langle j^{2j+1}00|V_{ik}|j^{2j+1}00\rangle$$

$$=\frac{(2j+1)(2j)}{2}\sum_{J=\text{偶数}}\langle j^{2j+1-2}(J)j^{2}(J)0|\}j^{2j+1}0\rangle^{2}$$

$$\times\langle j^{2}J|V_{ik}|j^{2}J\rangle$$

$$=\sum_{J}\frac{1+(-1)^{J}}{2}(2J+1)\langle j^{2}J|V_{ik}|j^{2}J\rangle \qquad (6.39)$$

（6.35）和（6.39）就是我们所要找的公式。

其次我们推导不同粒子（即质子和中子）之间的相互作用矩阵元的空穴和粒子关系式，仍然利用（2.37）式得

$$\langle j_{\pi}^{-m}(\alpha_{\pi}J_{\pi})j_{\nu}^{-n}(\alpha_{\nu}J_{\nu})J|\sum_{i,k}^{2j_{\pi}+1-m,\,2j_{\nu}+1-n}V_{ik}^{\pi\nu}|j_{\pi}^{-m}(\alpha'_{\pi}J'_{\pi})j_{\nu}^{-n}(\alpha'_{\nu}J'_{\nu})J\rangle$$

$$=\sum_{L}\langle j_{\pi}^{-m}(\alpha_{\pi}J_{\pi})j_{\nu}^{-n}(\alpha_{\nu}J_{\nu})J|\left(\sum_{i=1}^{2j_{\pi}+1-m}\mathrm{T}^{(L)}(\pi_{i})\cdot\sum_{k=1}^{2j_{\nu}+1-n}\mathrm{T}^{(L)}(\nu_{k})\right)|j_{\pi}^{-m}(\alpha'_{\pi}J'_{\pi})j_{\nu}^{-n}(\alpha'_{\nu}J'_{\nu})J\rangle$$

$$=\sum_{L}(-1)^{J_{\pi}+J'_{\nu}+J}\langle j_{\pi}^{-m}\alpha_{\pi}J_{\pi}\|\sum_{i=1}^{2j_{\pi}+1-m}\mathrm{T}^{(L)}\|j_{\pi}^{-m}\alpha'_{\pi}J'_{\pi}\rangle\langle j_{\nu}^{-n}\alpha_{\nu}J_{\nu}\|\sum_{k=1}^{2j_{\nu}+1-n}\mathrm{T}^{(L)}\|j_{\nu}^{-n}\alpha'_{\nu}J'_{\nu}\rangle$$

$$\times\begin{Bmatrix}J_{\pi} & J_{\nu} & J\\ J'_{\nu} & J'_{\pi} & L\end{Bmatrix} \qquad \text{（利用（2.32）式）}$$

$$=\sum_{L\neq 0}(-1)^{J_{\pi}+J'_{\nu}+J}\langle j_{\pi}^{m}\alpha_{\pi}J_{\pi}\|\sum_{i=1}^{2n}\mathrm{T}^{(L)}\|j_{\pi}^{m}\alpha'_{\pi}J'_{\pi}\rangle\langle j_{\nu}^{n}\alpha_{\nu}\|\sum_{k=1}^{n}\mathrm{T}^{(L)}\|j_{\nu}^{n}\alpha'_{\nu}J'_{\nu}\rangle$$

$$\times\begin{Bmatrix}J_{\pi} & J_{\nu} & J\\ J'_{\nu} & J'_{\pi} & L\end{Bmatrix}$$

$$+(-1)^{J_{\pi}+J_{\nu}+J}\frac{(2j_{\pi}+1-m)(2j_{\nu}+1-n)}{m\cdot n}\langle j_{\pi}^{m}\alpha_{\pi}J_{\pi}\|\sum_{i=1}^{m}\mathrm{T}^{(0)}\|j_{\pi}^{m}\alpha'_{\pi}J'_{\pi}\rangle$$

$$\langle j_{\nu}^{n}\alpha_{\nu}J_{\nu}\|\sum_{k=1}^{n}\mathrm{T}^{(0)}\|j_{\nu}^{n}\alpha'_{\nu}J'_{\nu}\rangle$$